تمارين محلولة في القسمة نموذج بكالوريا

التمرين (1):

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $3x-5y=13.....(1)$

(1)حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) .

(2)حدد الحلول (x,y) للمعادلة (1) بحيث $\frac{x}{y}\in Z$.

(3)بين انه من أجل كل k من $\mathbb{N}$ لدينا: $PGCD(5k+1,3k-2)=PGCD(k-5\ ;\ 13)$

(4) حل في $\mathbb{Z}^2$ الجملة : $\begin{cases}3x-5y=13\\PGCD(x\ ;y)=13\end{cases}$

حل التمرين (1):

(1)حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) .

لدينا الثنائية $(1;-2)$ حل خاص للمعادلة (1) ومنه $\begin{cases}3x-5y=13.....(1)\\3(1)-5(-2)=13.....(2)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد : $3(x-1)-5(y+2)=0$ أي : $3(x-1)=5(y+2)$

لدينا : $3\nmid 5(y+2)$ وبما أن 3 و 5 أوليان فيما بينهما فحسب مبرهنة غوص $3\nmid(y+2)$ أي $y+2=3k$ ومنه

$y=3k-2\ /\ k\in Z$ وبنفس الطريقة نجد : $x=5k+1\ /\ k\in Z$

ومنه حلول المعادلة (1) هي $S=\{(5k+1\ ;\ 3k-2)\ ,k\in Z\}$

(2) تحديد الحلول (x,y) للمعادلة (1) بحيث $\frac{x}{y}\in\mathbb{Z}$.

$\frac{x}{y}\in\mathbb{Z}$ معناه y يقسم x أي ان $\frac{5k+1}{3k-2}\in\mathbb{Z}$

لدينا : $\begin{cases}3k-2\nmid 3k-2\\3k-2\nmid 5k+1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}3k-2\nmid 5(3k-2)\\3k-2\nmid 3(5k+1)\end{cases}$ أي $\begin{cases}3k-2\nmid 15k-10\\3k-2\nmid 15k+3\end{cases}$ وعليه

$3k-2\nmid(15k+3)-(15k-10)$ أي $3k-2\nmid 13$

$3k-2=$	-1	-13	1	13
$3k=$	1	-11	3	15
$k=$	مرفوض	مرفوض	1	5

لدينا : $D_{13}=\{1;13;-1;-13\}$ ومنه

ومنه الحلول هي :

$$S=\{(6\ ;\ 1)\ ,(26\ ;\ 13)\ \}$$

(3) تبيان انه من أ جل كل k من $\mathbb{N}$ لدينا: $PGCD(5k+1,3k-2)=PGCD(k-5\ ;\ 13)$

نضع $PGCD(5k+1,3k-2)=d$

$$\begin{cases} d/5k+1 \\ d/3k-2 \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} d/5k+1 \\ d/6k-4 \end{cases}$$ ومنه $d/(6k-4)-(5k+1)$ أي $d/k-5$

$$\begin{cases} d/5k+1 \\ d/3k-2 \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} d/15k+3 \\ d/15k-10 \end{cases}$$ ومنه $d/(15k+3)-(15k-10)$ أي $d/13$ ومنه

$$PGCD(5k+1,3k-2)=PGCD(k-5\ ;\ 13)$$

(4)حل في $\mathbb{Z}^2$ الجملة : $$\begin{cases} 3x-5y=13 \\ PGCD(x\ ;y)=13 \end{cases} .....(*)$$

الجملة (*)تكافئ $PGCD(5k+1,3k-2)=13$ وحسب (3) $PGCD(k-5\ ;\ 13)=13$

وهذا يعني أن $13/(k-5)$ أي $k-5=13k'$ ومنه $k=13k'+5 \quad / k'\in\mathbb{Z}$

ومنه مجموعة الحلول للجملة (*) هي : $S=\{(65k'+26\ ;\ 39k'-13)\ ,k'\in\mathbb{Z}\ \}$

التمرين(2)

نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : (1) ... $5x-3y=2$

(1) بين ان المعادلة (1) تقبل حلا

(2) (أ) اثبت انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فان : $x\equiv 1[3]$

(ب) استنتج حلول المعادلة (1)

(3) (أ)بين انه اذا كانت الثانية $(x;y)$حلا للمعادلة(1) فان $PGCD(x;y)=PGCD(x;2)$

(ب) استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$

(ج) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق $PGCD(x;y)=2$

حل التمرين (2) :

(1) تبيان ان المعادلة (1) تقبل حلا :

لدينا $PGCD(5;3)=1$ و 1 يقسم 2 ومنه المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا حسب مبرهنة بيزو

ونلاحظ وضوحا ان الثنائية $(1;1)$ هو حل لها

(2) (أ) اثابت انه اذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فان : $x\equiv 1[3]$:

$5x-3y=2$ تعني $5x=3y+2$ و هذه تكافئ $5x\equiv 2[3]$ ومن خواص الموافقة نكتب : $10x\equiv 4[3]$

ومنه $x+9x\equiv 1+3[3]$ وبالتالي : $x\equiv 1[3]$ اذن $x=3k+1$

(ب) استنتاج الحلول :

نعوض $x=3k+1$ في المعادلة (1) نجد $5(3k+1)-3y=2$ ومنه $3y=15k+3$ وبالتالي $y=5k+1$

اذن مجموعة الحلول هي الثنائيات $(x;y)=(3k+1;5k+1)$ حيث k عدد صحيح

(3) (أ) اذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة فان $PGCD(x;y)=PGCD(x;2)$

نضع $PGCD(x;y)=d$ و $PGCD(x;2)=d'$

لدينا من جهة $\begin{cases}d/x\\d/y\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}d/x\\d/5x-3y\end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases}d/x\\d/2\end{cases}$ وهذا يعني $d/PGCD(x;2)$ ومنه

d/d'

ومن جهة أخرى

$\begin{cases}d'/x\\d'/2\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}d'/x\\d'/x+2k\end{cases}$ اي $\begin{cases}d'/x\\d'/3k+1+2k\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}d'/x\\d'/y\end{cases}$ وبالتالي $d'/PGCD(x;y)$ اي d'/d

لدينا اذن (d/d' و d'/d) وبالتالي $d=d'$ اذن $PGCD(x;y)=PGCD(x;2)$

(ب) استنتاج القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$:

من السؤال السابق وجدنا $d/PGCD(x;2)$ اي ان $d/2$ ومنه $d\in\{1;2\}$ وهي القيم الممكنة

(ج) تعيين الحلول $(x;y)$ بحيث : $PGCD(x;y)=2$:

$PGCD(x;y)=2$ تعني $\begin{cases}x\equiv 0[2]\\y\equiv 0[2]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}3k+1\equiv 0[2]\\5k+1\equiv 0[2]\end{cases}$ وتعني $\begin{cases}k\equiv 1[2]\\k\equiv 1[2]\end{cases}$ وبالتالي $k=2\alpha+1$

وبالتالي الحلول التي تحقق الشرط: $PGCD(x;y)=2$ هي : $(x;y)=(3k+1;5k+1)$ مع $k=2\alpha+1$

اذن $(x;y)=(6\alpha+4;10\alpha+6)$ حيث α عدد صحيح

التمرين(3)

(1) عين القاسم ألمشترك الأكبر للعددين : 324 و405 .

(2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) : $324x-405y=\alpha\cdots(*)$ حيث : $\alpha\in Z$

(أ)عين شرط على α حتى تقبل المعادلة $(*)$ حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

(ب) نفرض أن $\alpha = -81$ ، حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $(*)$ علما أن (x_0, y_0) حلا لها و يحقق $x_0 - y_0 = 0$

(ج) عين كل الثنائيات (x, y) حلول المعادلة $(*)$ حيث يكون $\dfrac{8x+24}{y+1}$ عددا صحيحا .

(د) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha 6}$ في النظام ذو الأساس 9 ويكتب $\overline{\beta 1 \beta \alpha}$ في النظام ذو الأساس 2 ،عين N

حل التمرين(3):

(1) $405 = 3^4 \times 5$ و $324 = 2^2 \times 3^4$ ومنه $PGCD(324,405) = 3^4 = 81$

(2) $324x - 405y = \alpha \cdots (*)$ حيث : $\alpha \in Z$

(أ)تعيين شرط على α حتى تقبل المعادلة $(*)$ حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

$324x - 405y = \alpha$ معناه $81(4x-5y) = \alpha$ أي $4x-5y = \dfrac{\alpha}{81}$

بما أن $(4x-5y) \in \mathbb{Z}$ فيجب أن يكون $\dfrac{\alpha}{81} \in \mathbb{Z}$ أي α مضاعف لـ81ومنه $\alpha = 81k \ / \ k \in \mathbb{Z}$

(ب) $\alpha = -81$ ، و (x_0, y_0) حل للمعادلة $(*)$ و يحقق $x_0 - y_0 = 0$

لما $\alpha = -81$ تصبح المعادلة على الشكل $4x-5y = -1 \ldots\ldots (2)$

(x_0, y_0) حلا لها و يحقق $x_0 - y_0 = 0$ معناه $4x_0 - 5x_0 = -1$ أي $-x_0 = -1$ ومنه $x_0 = 1$ وعليه $y_0 = 1$

الحل الخاص لـ (2) هو الثنائية $(1,1)$

لدينا $\begin{cases} 4x-5y = -1 \ldots\ldots\ldots (2) \\ 4(1)-5(1) = -1 \ldots\ldots (3) \end{cases}$ بطرح (3) من (2) نجد $4(x-1)-5(y-1) = 0$

ومنه $4(x-1) = 5(y-1)$

$4 \mid 5(y-1)$ و بما أن 4 و 5 أوليان فيما بينهما فحسب مبرهنة غوص $4 \mid (y-1)$ ومنه $y-1 = 4k$

أي $(k \in \mathbb{Z})$ $y = 4k+1$ وبنفس الطريقة نجد $(k \in \mathbb{Z})$ $x = 5k+1$

$$S = \{(5k+1; 4k+1) \ / \ k \in Z\}$$

(ج) تعيين كل الثنائيات (x, y) حلول المعادلة $(*)$ حيث يكون $\dfrac{8x+24}{y+1}$ عددا صحيحا .

$$\frac{8x+24}{y+1} = \frac{8(5k+1)+24}{(4k+1)+1} = \frac{40k+32}{4k+2} = \frac{20k+16}{2k+1}$$

$\dfrac{8x+24}{y+1} \in \mathbb{Z}$ معناه $\dfrac{20k+16}{2k+1} \in \mathbb{Z}$ أي $2k+1 \mid 20k+16$

لدينا : $\dfrac{20k+16}{2k+1} = \dfrac{10(2k+1)+6}{2k+1} = 10 + \dfrac{6}{2k+1}$ وهذا معناه : $2k+1 \mid 6$

$2k+1$	-1	-2	-3	-6	1	2	3	6
$2k$	-2	-3	-4	-7	0	1	2	5
k	-1		-2		0		1	

لدينا : $D_6=\{-1;-2;-3;-6;1;2;3;6\}$

ومنه الثنائيات (x,y) حلول المعادلة $(*)$ حيث يكون $\dfrac{8x+24}{y+1}$ عددا صحيحا . هي :

$$S=\{,(-4,-3);(-9,-7);(1,1);(6,5)\}$$

(د) تعيين N العدد الطبيعي الذي يكتب $\overline{\alpha 6}^{9}$ ويكتب $\overline{\beta 1\beta\alpha}^{2}$

لدينا : $N=\overline{\alpha 6}^{(9)}=9\alpha+6$ $N=\overline{\beta 1\beta\alpha}^{(2)}=\beta\times 2^3+1\times 2^2+\beta\times 2+\alpha$

$N=10\beta+\alpha+4$

إذن : $10\beta+\alpha+4=9\alpha+6$ ومنه $10\beta-8\alpha=2$ أي $5\beta-4\alpha=1$ أو $4\alpha-5\beta=-1$

وهذه الاخيرة هي المعادلة (2) وحلولها هي : $\alpha=5k+1$ و $\beta=4k+1$ لكن مع شرط $\alpha\prec 2$ و $\beta\prec 2$

اي $5k+1\prec 2$ ومنه $k\prec -\dfrac{1}{5}$ وبالتالي $k=0$ اذن $\alpha=1$ و $\beta=1$ ومنه $N=15$

التمرين(4)

(1) – ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $\left(33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\right)$ يقبل القسمة على 10 .

(3) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها العدد $(7\times 3^{n+1}-1)\equiv 0[10]$ و $10\prec n\leq 25$

(4) N عدد طبيعي يكتب $\overline{xx02102}$ في نظام التعداد الذي أساسه 3 حيث $x\neq 0$ ويكتب $\overline{y67y}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9

(أ) عين x و y

(ب) أكتب N في النظام العشري

(ج) أكتب N في نظام التعداد ذي الأساس 7

حل التمرين(4):

(1) – دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .

لدينا $3^0\equiv 1[10]$ ، $3^1\equiv 3[10]$ ، $3^2\equiv 9[10]$ أي $3^2\equiv -1[10]$ ومنه $3^4\equiv 1[10]$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا $3^{4k}\equiv 1[10]$ ، $3^{4k+1}\equiv 3[10]$ ، $3^{4k+2}\equiv 9[10]$ ، $3^{4k+3}\equiv 7[10]$

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة 3^n على 10	1	3	9	7

(2) اثبات ان العدد $\left(33^{16n+2}-2\times109^{8n+1}-11\right)$ يقبل القسمة على 10 :

لدينا : $33\equiv3[10]$ و منه $33^{16n+2}\equiv3^{16n+2}[10]$ و بما ان $3^{16n+2}=3^{4(4n)+2}$ فإن $33^{16n+2}\equiv9[10]$.

$109\equiv9[10]$ ومنه $109^{8n+1}\equiv9^{8n+1}[10]$ و بما ان $9^{8n+1}=3^{16n+2}$ فإن $9^{8n+1}=9[10]$

و بالتالي $109^{8n+1}=9[10]$ ومنه $2\times109^{8n+1}\equiv8[10]$

ولدينا: $11\equiv1[10]$ و منه $33^{16n+2}-2\times109^{8n+1}-11\equiv9-8-1[10]$ اذن $\boxed{33^{16n+2}-2\times109^{8n+1}-11\equiv0[10]}$

(3) ايجاد الاعداد الطبيعية n حيث : $7\times3^{n+1}-1\equiv0[10]$ و $10\prec n\leq25$.

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$7\times3^{n+1}-1\equiv$	0	2	8	6	$[10]$

منه $k\in\mathbb{N}$ / $n=4k$.

بما ان $10\prec n\leq25$ فإن $10\prec4k\leq25$ أي $\frac{10}{4}\prec k\leq\frac{25}{4}$ منه $k\in\{3;4;5;6\}$

و بالتالي $n=4k$ $\boxed{n\in\{12;16;20;24\}}$

4) $N=\overline{xx02102}^{3}=\overline{y67y}^{9}$

(أ) تعيين x و y

لدينا : $0\prec x\prec3$ و $0\prec y\prec9$ مع x و y طبيعيان

و لدينا $\begin{cases}N=65+972x\\N=549+730y\end{cases}$ أي $\begin{cases}N=2+1\times3^2+2\times3^3+x\times3^5+x\times3^6\\N=y+7\times9+6\times9^2+y\times9^3\end{cases}$ و منه $972x-730y=484$.

- اذا كان $x=1$ فإن $y=\frac{244}{365}\notin\mathbb{N}$ مرفوض .

- إذا كان $x=2$ فإن $y=2$ اذن $\boxed{(x;y)=(2;2)}$.

(ب) كتابة N في النظام العشري : $N=65+972\times2=2009$ ، $\boxed{N=2009}$.

(ج) كتابة N في النظام ذي الاساس 7 :

$2009=287\times7+\boxed{0}$ ، $287=41\times7+\boxed{0}$ ، $41=5\times7+\boxed{6}$ ، $5=0\times7+\boxed{5}$ منه $N=\overline{5600}^{7}$.

التمرين(5) :

(1) (أ) انشر $(n+3)(3n^2-9n+16)$ حيث $n\in\mathbb{N}$

- استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$

(ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $3n^2-9n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم

(2) برهن انه من اجل كل الاعداد الطبيعية غير المعدومة a,b و c يكون : $PGCD(a;b)=PGCD(bc-a;b)$

(3) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n اكبر او يساوي 2 : $PGCD\left(3n^3-11n;n+3\right)=PGCD\left(48;n+3\right)$

(4) (أ) عين القواسم الطبيعية للعدد 48

(ب) استنتج الاعداد الطبيعية n بحيث يكون الكسر $\frac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا

<u>حل التمرين(5) :</u>

(1) (أ) نشر العبارة : $(n+3)\left(3n^2-9n+16\right)=3n^3-11n+48$ حيث $n\in\mathbb{N}$

واضح ان $n+3$ يقسم $3n^3-11n+48$

(ب) برهان انه من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $3n^2-9n+16\neq 0$ عدد طبيعي غير معدوم

مميزه $\Delta=-111$ وبالتالي فانه من اجل $n\in\mathbb{N}$ فان كثير الحدود $3n^2-9n+16$ لا ينعدم واشارته من إشارة 3 وبالتالي فهو موجب تماما

(2) برهان ان : $PGCD(a;b)=PGCD(bc-a;b)$ حيث a,b و cاعداد طبيعية

نضع : $PGCD(a;b)=d$ و $PGCD(bc-a;b)=d'$

$PGCD(a;b)=d$ تعني (d/a و d/b) ومنه $\begin{cases}d/bc-a\\d/b\end{cases}$ ومنه d/d'

ومن جهة أخرى $PGCD(bc-a;b)=d'$ تعني ($\begin{cases}d'/bc-a\\d'/b\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}d'/bc-a\\d'/bc\end{cases}$ وبالطرح نجد d'/a

ومنه $\begin{cases}d'/a\\d'/b\end{cases}$ وبالتالي : d'/d

وبما ان (d/d' و d'/d) فان $d'=d$ اذن $PGCD(a;b)=PGCD(bc-a;b)$

(3) برهان انه من اجل $n\geq 2$: $PGCD\left(48;n+3\right)=PGCD\left(3n^3-11n;n+3\right)$

من السؤال السابق وبوضع : $a=48$ و $b=n+3$ و $c=3n^2-9n+16$ نجد :

$$PGCD(a;b)=PGCD\left(48;n+3\right)$$

$$PGCD(bc-a;b)=PGCD\left((n+3)\left(3n^2-9n+16\right)-48;n+3\right)$$

$$=PGCD\left(3n^3-11n;n+3\right)$$

اذن $PGCD\left(48;n+3\right)=PGCD\left(3n^3-11n;n+3\right)$

(4) (أ) تعيين القواسم الطبيعية للعدد 48: $48=2^4\times 3$ عدد قواسمه الموجبة 10 وهي :

$$D_{48}=\{1;2;3;4;6;8;12;16;24;48\}$$

(ب) استنتاج قيم n بحيث يكون $\frac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا :

$\frac{3n^3-11n}{n+3}\in\mathbb{N}$ معناه $3n^3-11n$ موجب و $(n+3)$ قاسم لـ $3n^3-11n$

من اجل $n=0$ فان الكسر معدوم فهو طبيعي

ومن اجل $n=1$ فان $\frac{3n^3-11n}{n+3}=-2\notin\mathbb{N}$

ومن اجل $n\geq 2$ فان $\frac{3n^3-11n}{n+3}\in\mathbb{N}$ اذا كان $(n+3)/(3n^3-11n)$

أي $PGCD(3n^3-11n;n+3)=n+3$ ومن المساواة السابقة نجد $PGCD(48;n+3)=n+3$

وهذا يعني $n+3/48$ وبالتالي $n+3\in D_{48}$

$n+3$	1	2	3	4	6	8	12	16	24	48
n	لا يوجد	لا يوجد	0	1مرفوض	3	5	9	13	21	45

اذن قيم n حتى يكون الكسر $\frac{3n^3-11n}{n+3}\in\mathbb{N}$ هي : $\{0;3;5;9;13;21;45\}$

التمرين(6)

نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $324x-245y=7$ ... (1)

(1) باستعمال خوارزمية اقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (1) ثم حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ هذه المعادلة

(2) اثبت انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فان : $x\equiv 0[7]$

(3) (أ) نضع $PGCD(x;y)=d$ حيث $(x;y)$ حل للمعادلة(1) , عين القيم الممكنة للعدد d

(ب) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق $PGCD(x;y)=7$

حل التمرين(6):

$324x-245y=7$

(1) تعيين حل خاص للمعادلة (1) :

بالقسمة المتتابعة للعددين 324 و 245 نجد : $324=245\times 1+79$ و $245=79\times 3+8$

و $79=8\times 9+7$ ومنه $7=79-8\times 9$

اذن $7=79-9\times(245-79(3))=245(-9)+79(28)=245(-9)+28(324-245)$

ومنه $7=324(28)-245(37)$ ومنه الحل الخاص هو : $(28;37)$

-الحل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة :

لدينا $\begin{cases}324x-245y=7\\324(28)-245(37)=7\end{cases}$ بالطرح نجد: $324(x-28)=245(y-37)$

وهذا يعني 245 يقسم $324(x-28)$ وبما ان 324 و 245 اوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة بيزو

245 يقسم $x-28$ أي $x-28=245k$ ومنه $x=28+245k$ حيث k عدد صحيح

وبالتعويض في $324(x-28)=245(y-37)$ نجد : $y=37+324k$

(2) اثبات ان $x\equiv 0[7]$:

$324x-245y=7$ تعني $324x=245y+7$ ومنه $324x=7(35y+1)$

هذه الاخير تعني 7 يقسم $324x$ وبما ان 7 لا يقسم 324 فانه حسب مبرهنة بيزو 7 يقسم x أي $x\equiv 0[7]$

(3) (أ) تعيين القيم الممكنة للعدد d حيث $PGCD(x;y)=d$ حيث $(x;y)$ حل للمعادلة(1) ,

$PGCD(x;y)=d$ تعني (d/x و d/y) ومنه $d/(324x-245y)$ أي ان $d/7$ ومنه $d\in\{1,7\}$

(ب) تعيين $(x;y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق $PGCD(x;y)=7$

$PGCD(x;y)=7$ تعني $y\equiv 0[7]$ ومنه $37+324k\equiv 0[7]$ وينتج $2+2k\equiv 0[7]$ ($324=46\times 7+2$)

اذن $2k\equiv 5[7]$ ومنه $6k\equiv 15[7]$ اي ان $-k\equiv 1[7]$ وبالتالي $k\equiv 6[7]$ اي ان $k=7\alpha+6$ حيث α طبيعي

وبالتالي قيم $(x;y)$ هي : $x=28+245k=28+245(7\alpha+6)$ و $y=37+324k=37+324(7\alpha+6)$

ومنه $(x;y)=(1715\alpha+1498;2268\alpha+1981)$

التمرين(7) :

(1) من اجل كل عدد حقيقي t انشر العبارة $(t-6)(t^2+1)$.

(2) a و b و c اعداد طبيعية تكتب في نظام التعداد ذي الأساس p كما يلي : $a=\overline{102}$ ، $b=\overline{125}$ ، $c=\overline{13154}$.

(أ) جد قيمة العدد الحقيقي p علما ان $ab=c$

(ب) اكتب كلا من الاعداد a,b و c في النظام العشري .

(3) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $38x-53y=15.....(1)$

(أ) بين انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فان $x\equiv 52[53]$.

(ب) استنتج حلول المعادلة (1) .

(4) نعتبر الان x و y عددين طبيعيين و نسمي d قاسمهما المشترك الاكبر .

(أ) عين القيم الممكنة للعدد d .

(ب) جد كل الثنائيات $(x;y)$ بحيث يكون $d=15$.

5) (أ) ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7 .

(ب) من اجل كل $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (1) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2013^x\times 1432^{2y}$ على7

حل التمرين(7) :

(1) نشر العبارة $(t-6)(t^2+1)$: من اجل كل عدد حقيقي t لدينا $(t-6)(t^2+1)=t^3-6t^2+t-6$

(2) a ، b و c تكتب في نظام التعداد ذي الأساس p كما يلي : $b=\overline{125}$ $a=\overline{102}$ و $c=\overline{13154}$

(أ) إيجاد قيمة العدد الحقيقي p حيث $ab=c$

لدينا $a=2\times p^0+0\times p^1+p^2=2+p^2$ ، $b=5\times p^0+2\times p^1+p^2=5+2p+p^2$.

$c=4\times p^0+5\times p^1+p^2+3p^3+p^4=4+5p+p^2+3p^3+p^4$.

$ab=c$ معناه $\left(2+p^2\right)\left(5+2p+p^2\right)=4+5p+p^2+3p^3+p^4$.

و يكافئ $10+4p+2p^2+5p^2+2p^3+p^4=4+5p+p^2+3p^3+p^4$.

ومنه $p^3-6p^2+p-6=0$ ومما سبق نكتب : $(p-6)\left(p^2+1\right)=0$ ومنه $p=6$.

(ب) كتابة كلا من الاعداد a ، b و c في النظام العشري .

$a=2+6^2=38$ ، $b=5+2\times6+6^2=53$ و $c=4+5\times6+6^2+3\times6^3+6^4=2014$.

3) نعتبر في Z^2 المعادلة : $38x-53y=15.....(1)$.

(أ) تبيان ان الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) معناه $x\equiv52[53]$

$38x-53y=15$ يكافئ $38x=15+53y$ و هذا يعني ان $38x\equiv15[53]$ ولدينا $38\equiv-15[53]$

ومنه $-15x\equiv15[53]$ أي $x\equiv-1[53]$ وعليه $x\equiv52[53]$

ب) استنتاج حلول المعادلة (1) : $x\equiv52[53]$ تعني $x=53k+52$

و $x=53k+52$ حيث $k\in Z$ و بالتعويض في (1) نجد $38(53k+52)-53y=15$

ومنه $38(53k+52)-15=53y$ أي ان $38\times53k+53\times37=53y$ اذن $y=38k+37$ حيث $k\in Z$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$ من الشكل $(53k+52;38k+37)$ و $k\in Z$.

(4) نعتبر الان x و y عددان طبيعيان و نسمي d قاسمهما المشترك الاكبر .

(أ) تعيين القيم الممكنة للعدد d .

لدينا d يقسم x و d يقسم y اذن d يقسم $38x-53y$ أي d يقسم 15 و بالتالي $d\in\{1;3;5;15\}$.

(ب) إيجاد كل الثنائيات $(x;y)$ بحيث يكون $d=15$.

نضع $x=15x'$ و $y=15y'$ حيث x' و y' اوليان فيما بينهما .

نحصل على $38\times15x'-53\times15y'=15$ و منه $38x'-53y'=1$ لدينا الثنائية $(7;5)$ حلا خاصا للمعادلة .

و منه $\begin{cases}38x'-53y'=1\\38\times7-53\times5=1\end{cases}$ بالطرح نجد $38(x'-7)=53(y'-5)=0$ أي $38(x'-7)=53(y'-5)$

لدينا 53 يقسم $38(x'-7)$ و العددان 53 و 38 اوليان فيما بينهما اذن حسب مبرهنة غوص 53 يقسم $x'-7$

ومنه $x'-7=53\alpha$ أي $x'=53\alpha+7$ حيث $\alpha\in N$ و بالتعويض في $38(x'-7)=53(y'-5)$ نجد

$38\times53\alpha=53(y'-5)$ ومنه $y'-5=38\alpha$ أي $y'=38\alpha+5$ حيث $\alpha\in N$

وبما ان $38x'-53y'=1$ فانه حسب مبرهنة بيزو يكون العددان x' و y' اوليان فيما بينهما و بالتالي

$x=15(53\alpha+7)$ أي $x=795\alpha+105$ و $y=15(38\alpha+5)$ أي $y=570\alpha+75$ حيث $\alpha\in N$.

(5) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7 .

لدينا $4^0\equiv1[7]$ ، $4^1\equiv4[7]$ ، $4^2\equiv2[7]$ و $4^3\equiv1[7]$ الدور هو 3

و ع p $4^{3p}\equiv1[7]$ $4^{3p+1}\equiv4[7]$ $4^{3p+2}\equiv2[7]$

(ب) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2013^x \times 1432^{2y}$ على 7 حيث $(x;y)$ حلول المعادلة

لدينا : $2013^x \times 1432^{2y} = 2013^{53k+52} \times 1432^{2(38k+37)}$.

و $2013 \equiv 4[7]$ و $1432 \equiv 4[7]$ معناه $2013^x \times 1432^{2y} \equiv 4^{53k+52} \times 4^{2(38k+37)}[7]$.

و يكافئ $2013^x \times 1432^{2y} \equiv 4^{129k+126}[7]$ و يكافئ $2013^x \times 1432^{2y} \equiv 4^{3(43k+42)}[7]$ أي

$2013^x \times 1432^{2y} \equiv 4^{3m}[7]$ ومنه $2013^x \times 1432^{2y} \equiv 1[7]$

اذن باقي القسمة الاقليدية للعدد $2013^x \times 1432^{2y}$ على 7 هو 1 .

التمرين(8) :

نعتبر المعادلة $(E) \; : 7x+4y=1 \; ; \; (x;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(1) (أ) اذكر نص المبرهنة التي تؤكد وجود حلول للمعادلة (E)

(ب) عين حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل المعادلة

(2) حل في $\mathbb{Z}$ الجملة التالية $(S): \begin{cases} n \equiv 3[4] \\ n \equiv 2[7] \end{cases}$

(3) (أ) ليكن k عددا طبيعيا . عين باقي القسمة الاقليدية للعدد 3^{2k} على 4 وباقي القسمة للعدد 2^{3k} على 7

(ب) تحقق ان العدد 2263 حل للجملة (S) ثم بين أن العدد $2263^{1008} - 1$ يقبل القسمة على 28

(4) نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $(E'): \; 7x+4y=20$

(أ) برهن أنه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E') فان $x \equiv 0[4]$. حل عندئذ المعادلة (E')

(ب) ليكن $d = PGCD(x;y)$ حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (E') . عين القيم الممكنة لـ d

(ج) عين مجموعة حلول (E') حيث $PGCD(x;y)=4$

(د) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ الجملة $\begin{cases} 7x+4y=20 \\ PGCD(x;y)=4 \\ PPCM(x;y)=308 \end{cases}$

حل التمرين(8) :

(1) (أ) لدينا 7 و 4 اوليان فيما بينهما , فحسب مبرهنة بيزو فان هذا يكافئ يوجد عددان صحيحان x و y حيث $7x+4y=1$

(ب) نلاحظ ان $(x_0;y_0)=(-1;2)$ حل خاص للمعادلة (E) لان $7\times(-1)+4\times 2=1$

لدينا $\begin{cases}7x+4y=1\\7x_0+4y_0=1\end{cases}$ تعني : $7(x-x_0)+4(y-y_0)=0$ اذن $7(x-x_0)=-4(y-y_0)$

العدد 7 يقسم $-4(y-y_0)$ وبما ان 7 و 4 اوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص 7 يقسم $y-y_0$

أي $y-y_0=7k$ أي $y=y_0+7k$ اذن بالتعويض نجد : $7(x-x_0)=-4\times(7k)$

وبالتالي $x-x_0=-4k$

اذن : $\begin{cases}x=-4k+x_0\\y=7k+y_0\end{cases}$ ومنه الحلول $\begin{cases}x=-4k-1\\y=7k+2\end{cases}$

التحقق : $7\times(-4k-1)+4(7k+2)=-7+8=1$ اذن $k\in\mathbb{Z}$ $S_{\mathbb{Z}^2}=\{-4k-1\,;\,7k+2\}$

(2) $(S):\begin{cases}n\equiv 3[4]\\n\equiv 2[7]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}n=3+20[4]\\n=2+21[7]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}n\equiv 23[4]\\n\equiv 23[7]\end{cases}$ أي ان $\begin{cases}n-23\equiv 0[4]\\n-23\equiv 0[7]\\7\wedge 4=1\end{cases}$

اذن $n-23\equiv 0[4]$ وهذا يعني $n-23\equiv 0[4]\Leftrightarrow n\equiv 23[28]$ أي

اذن حلول (S) هي : $(n=23+28k\ ;\ k\in\mathbb{Z})$

(3) (أ) نعلم ان $3^2\equiv 1[4]$ ومنه $(3^2)^k\equiv 1[4]$ اذن $3^{2k}\equiv 1[4]$

ولدينا أيضا : $2^3\equiv 1[7]\Leftrightarrow(2^3)^k\equiv 1[7]$ اذن $2^{3k}\equiv 1[7]$

(ب) لدينا $2263-23=2240=80\times 28$ ومنه $2263-23\equiv 0[28]\Rightarrow 2263\equiv 23[28]$

اذن العدد 2263 حل للجملة (S)

و $1008=2\times 504$ و $2263^{1008}\equiv 1[4]$

$2263\equiv 3[4]$ ومنه $2263^{1008}\equiv 3^{1008}[4]$

$2263\equiv 2[7]$ ومنه $2263^{1008}\equiv 2^{1008}[7]$. العدد 1008 يكتب : $1008=3\times 336=3k$ ومنه

($2263^{1008}\equiv 1[7]$) $2^{3k}\equiv 1[7]$ و $1008=3\times 336=3k$ و $2263\equiv 2[7]$ و $2263^{1008}\equiv 1[4]$

اذن $\begin{cases}2263-1\equiv 0[7]\\2263^{1008}-1\equiv 0[7]\\7\wedge 4=1\end{cases}$ وبالتالي : $2263^{1008}-1\equiv 0[28]$

(4) (أ) برهان أنه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E') فان $x\equiv 0[4]$.

$7x+4y=20$ تعني $7x=20-4y$ ومنه $7x=4(5-y)$

وهذه تعني : $\begin{cases}4\ /\ 7x\\7\wedge 4=1\end{cases}$ وحسب مبرهنة غوص فان : 4 يقسم x أي $x\equiv 0[4]$

ومن $x\equiv 0[4]$ تعني $k'\in\mathbb{Z}$; $x=4k'$ وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد : $7\times 4k'+4y=20$ اذن:

$y=5-7k'$

التحقق: $7(4k')-4(5-7k')=20$ اذن حلول (E') هي $S_{\mathbb{Z}^2}=\{4k'\,;\,5-7k'\}\ k'\in\mathbb{Z}$

(ب) $d=PGCD(x;y)$ و $x=4k'$ و $y=5-7k'$ حيث $k'\in\mathbb{Z}$

d يقسم x ويقسم y وبالتالي يقسم $7x+4y$ ومنه d يقسم 20 اذن $d\in\{1;2;4;5;10;20\}$

(ج) $PGCD(x;y)=4$ و $x=4k'$ و $y=5-7k'$

واضح ان 4 يقسم x وبما انه يقسم y فهذا يعني $5-7k'\equiv 0[4]$ ومنه $1-7k'\equiv 0[4]$ أي $-7k'\equiv 1[4]$

وتعني $7k'\equiv 1[4]$ أي $(8-1)k'\equiv 1[4]$ و تعني $-k'\equiv 1[4]$ اذن $k'\equiv -1[4]$ أي $k'=4p-1$ مع $p\in\mathbb{Z}$

اذن حلول (E') هي : $x=16p-4$ و $y=12-28p$ $S_{\mathbb{Z}^2}=\{\ x=16p-4\ ;\ y=12-28p\ \}$ مع $x\wedge y=4$

(د) تعيين الحلول للمعادلة : $7x+4y=20$ مع $x\wedge y=4$ و $PPCM(x;y)=308$

نعلم ان : $PPCM(x;y)\times PGCD(x;y)=x\times y$

$$\left|(x\wedge y)(x\vee y)\right|=|xy|=\left|(16p-4)(12-28p)\right|=4\times 308$$

حيث : $x=16p-4=4(4p-1)$ و $y=12-28p=4(3-7p)$

$4\left(4\left|(4p-1)(3-7p)\right|\right)=4\times 308$ ومنه $\left|(4p-1)(3-7p)\right|=77$ أي

$(4p-1)(3-7p)=77$ او $(4p-1)(3-7p)=-77$

اذا كان $(4p-1)(3-7p)=77$ فان $-28p^2+19p-80=0$ و مميزها سالب

$\Delta=361-4\times(-28)\times(-80)=-8599<0$

اذا كان $(4p-1)(3-7p)=-77$ فان $-28p^2+19p+74=0$ و مميزها

$\Delta=361+4\times 28\times 74=8649=93^2$

$p_1=\dfrac{-19-39}{-56}=\dfrac{-112}{-56}=2$ و $p_2=\dfrac{-19+39}{-56}=\dfrac{-72}{-56}\notin\mathbb{Z}$

وبالتالي من اجل $p_1=2$ نجد $x=28$ و $y=-44$

التمرين(9)

(1)عين الاعداد الصحيحة x التي تحقق : $x^2-x+6\equiv 0[9]$

(2) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9

(–) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $7^{2n}\equiv 4^n[9]$

(ب) استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9

(ج) عين قيم العدد الطبيعي α حتى يكون : $\begin{cases}4^n+4^{n+1}+4^{n+2}+\alpha-4\equiv 0[9]\\ 2010\le\alpha\le 2020\end{cases}$

(3) ماهو باقي قسمة العدد : $5^{2010}+25^{2011}$ على 9 ؟

(4) عين الاعداد الطبيعية n التي يكون من اجلها العدد : $7^{2n}-7^n+6$ مضاعفا للعدد 9

(5) عين الثنائيات الطبيعية $(x;y)$ بحيث : $7^x+4^y\equiv 2[9]$

حل التمرين(9)

(1)تعيين الاعداد الصحيحة x التي تحقق : $x^2-x+6\equiv 0[9]$:

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$[9]$
$x^2\equiv$	0	1	4	0	7	7	0	5	1	$[9]$
$x^2-x+6\equiv$	6	6	8	3	0	8	0	4	8	$[9]$

من الجدول نجد ان $x^2-x+6\equiv 0[9]$ من اجل $x\equiv 4[9]$ او $x\equiv 6[9]$

أي ان $x=9k+4$ او $x=9k+6$ حيث k عدد صحيح

(2) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9 :

$7^0\equiv 1[9]$ و $7^1\equiv 7[9]$ و $7^2\equiv 4[9]$ و $7^3\equiv 1[9]$

ومنه من اجل كل عدد طبيعي k فان بواقي القسمة هي متتالية دورية ودورها 3.

ومنه $7^{3k}\equiv 1[9]$ و $7^{3k+1}\equiv 7[9]$ و $7^{3k+2}\equiv 4[9]$ البواقي هي : 1 او 7 او 4

(-) تبيان ان من اجل كل n : $7^{2n}\equiv 4^n[9]$:

لدينا $7^2\equiv 4[9]$ ومنه من اجل كل عدد طبيعي n فان $\left(7^2\right)^n\equiv 4^n[9]$ اذن $7^{2n}\equiv 4^n[9]$

(ب) استنتاج بواقي قسمة 4^n على 9 :

لدينا من السؤال السابق $7^{2n}\equiv 4^n[9]$ ومنه بواقي قسمة 4^n على 9 هي نفسها بواقي قسمة 7^{2n}

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة 7^n على 9	1	7	4
باقي قسمة 7^{2n} على 9	1	4	7
باقي قسمة 4^n على 9	1	4	7

(ج) تعيين قيم α بحيث : $\begin{cases}4^n+4^{n+1}+4^{n+2}+\alpha-4\equiv 0[9]\\ 2010\le\alpha\le 2020\end{cases}$

$4^n+4^{n+1}+4^{n+2}+\alpha-4\equiv 0[9]$ معناه $4^n\left(1+4^1+4^2\right)+\alpha-4\equiv 0[9]$ أي $4^n\times 21+\alpha-4\equiv 0[9]$

و $21\equiv 3[9]$ ومنه نجد : $3\times 4^n+\alpha-4\equiv 0[9]$

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة 4^n على 9	1	4	7
باقي قسمة 3×4^n على 9	3	3	3

اذن من اجل كل عدد طبيعي n $3\times 4^n\equiv 3[9]$ وبالتالي : $3\times 4^n+\alpha-4\equiv 0[9]$

تكافئ $3+\alpha-4\equiv 0[9]$ أي $\alpha-1\equiv 0[9]$ ومنه $\alpha\equiv 1[9]$ اذن $\boxed{\alpha=9p+1}$ حيث p عدد طبيعي

و لدينا $2010\le\alpha\le 2020$ معناه $2010\le 9p+1\le 2020$ أي $223.22\le p\le 224.33$ و عليه $p=224$

و بالتالي $\alpha=2017$.

3) تعي

$2010+\quad 2011$

نعلم ان $2011=3\times670+1=3m+1$ و $2010=3\times670=3m$

لدينا $25\equiv7[9]$ و منه $25^{2011}\equiv7^{2011}[9]$ اذن $25^{2011}\equiv7^{3m+1}[9]$ أي $25^{2011}\equiv7[9]$

و لدينا $5+4\equiv0[9]$ و منه $5\equiv-4[9]$ اذن $5^{2010}\equiv(-4)^{2010}[9]$ و عليه $5^{2010}\equiv4^{3\times m}[9]$ أي $5^{2010}\equiv1[9]$

إذن $5^{2010}+25^{2011}\equiv1+7[9]$ أي $5^{2010}+25^{2011}\equiv8[9]$ وبالتالي باقي قسمة العدد $5^{2010}+25^{2011}$ على 9 هو 8

(4) تعيين الاعداد n بحيث: $7^{2n}-7^n+6$ مضاعفا للعدد 9 : من السؤال (2)(ب) نجد :

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة 7^n على 9	1	7	4
باقي قسمة 7^{2n} على 9	1	4	7
باقي قسمة $7^{2n}-7^n+6$ على 9	6	3	0

اذا كان $n=3k+2$ حيث $k\in\mathbb{N}$ فان العدد $7^{2n}-7^n+6$ مضاعف للعدد 9.

– يمكن استعمال نتيجة السؤال الاول للاجابة على هذا السؤال

$x^2-x+6\equiv0[9]$ معناه $x\equiv4[9]$ او $x\equiv6[9]$.

و منه $7^{2n}-7^n+6$ مضاعفا للعدد 9 معناه $7^n\equiv4[9]$ أي $n=3k+2$ او $7^n\equiv6[9]$ و هذا غير ممكن لان بواقي 7^n على 9 هي 1 ، 7 او 4 .

(5) تعيين الثنائيات $(x;y)$ بحيث : $7^x+4^y\equiv2[9]$:

x	$3p$	$3p+1$	$3p+2$
باقي قسمة 7^x على 9	1	7	4

y	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة 4^y على 9	1	4	7

$7^x+4^y\equiv2[9]$ معناه $(x;y)=(3p;3k)$ او $(x;y)=(3p+1;3k+1)$ او $(x;y)=(3p+2;3k+2)$

و عليه $(x;y)\in\{(3p;3k),(3p+1;3k+1),(3p+2;3k+2)\}$.

التمرين(10) :

لتكن المعادلة : $(E):138x-55y=5$ حيث $(x;y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

(1) بين انه اذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فان x مضاعف للعدد 5

(2) (أ) عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) (ب) حل المعادلة (E)

(3) من اجل كل عدد طبيعي n نعتبر العددين $a=55n+10$ و $b=138n+25$

(أ) بين انه من اجل كل طبيعي n الثنائية $(a;b)$ هي حل للمعادلة (E)

(ب) استنتج القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

(ج) عين مجموعة قيم العدد الصحيح n بحيث $PGCD(a;b)=5$

حل التمرين(10) :

$(E):138x-55y=5$

(1) اذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فان : $138x=5+55y$ ومنه $138x=5(1+11y)$

وبما ان $138\wedge 5=1$ فان 5 يقسم x أي ان x مضاعف للعدد 5 حسب مبرهنة غوص

(2) (أ) باستعمال خوارزمية اقليدس للعددين 138 و 55 ولتكن المعادلة $(E'):138x-55y=1$ نجد :

$138=2\times 55+28\Leftrightarrow 28=138-2\times 55$ و منه $55=1\times 28+27\Leftrightarrow 27=55-1\times 27$

و $28=1\times 27+1\Leftrightarrow 1=28-1\times 27$ وبالتالي :

$1=28-27=28-55+28=2\times 28-55=2(138-2\times 55)-55=2\times 138-5\times 55$

ومنه $(u;v)=(2;5)$ حلا خاصا للمعادلة (E') وبالتالي $(x_0;y_0)=(5u;5v)=(10;25)$ حلا خاصا للمعادلة (E)

(ب) لدينا $\begin{cases}138x-55y=5 & (1)\\ 138\times 10-55\times 25=5 & (2)\end{cases}$ بطرح (2) من (1) نجد :

$138(x-10)=55(y-25)$

وبما ان $138\wedge 55=1$ فان 55 يقسم $x-10$ و 138 يقسم $y-25$

اذن $\begin{cases}x-10=55k\ ;\ k\in\mathbb{Z}\\ y-25=138k\ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases}x=10+55k\\ y=25+138k\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$

التحقق: $138(10+55k)-55(25+138k)=1380+138\times 55k-1375-138\times 55=5$

اذن مجموعة الحلول هي : $S_{\mathbb{Z}}=\{(10+55k\ ;\ 25+138k)\ \ k\in\mathbb{Z}\}$

(أ) $a=55n+10$ و $b=138n+25$ حسب السؤال الثاني (ب) فان $(a;b)$ حل للمعادلة (E) لان حلولها من الشكل :

$x=55k+10$ و $y=138k+25$

(ب) نضع $PGCD(a;b)=d$ والمعادلة تكتب : $138a-55b=5$ ومنه d يقسم العددين a و b وبالتالي

يقسم $138a-55b$ اذن d يقسم 5 ومنه قيم d هي 1 او 5

(ج) $PGCD(a;b)=5$ ومنه b يقسم 5 وهذا يعني $138n+25$ يقسم 5

ومنه n يقسم 5 أي ان قيم n هي : $n=5k\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

التمرين(11) :

(1) n عدد طبيعي نعتبر العددين الطبيعيين : $a=7n+9$ و $b=12n+15$

(أ) نضع $d=PGCD(a;b)$. بين ان $d\in\{1;3\}$

(ب) عين n بحيث $d=3$

(2) لتكن في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E):12x-7y=3$

(أ) بين انه اذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فان $y\equiv 0[3]$

(ب) عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) ثم حل المعادلة (E)

(3) في عام 2000 لاحظ مركز طبي لرصد الامراض النادرة في مدينة مرضا نادرا A الذي يظهر دوريا كل 24 سنة بعد 6 سنوات يلاحظ المركز ظهور مرض نادر B الذي يظهر دوريا كل 14 سنة .

نسمي z السنة التي سيظهر فيها مجددا المرضان معا في نفس الوقت

(أ) ليكن x و y عدد الدورات التي يقوم بها المرضان A و B بين سنة 2000 و العام z

بين ان $(x;y)$ حل للمعادلة (E)

(ب) عين السنة z

حل التمرين(11) :

(1) (أ) $d=p\gcd(a;b)$, d يقسم العددين a و b ومنه d يقسم $12a-7b$ أي يقسم 3 اذن $d\in\{1;3\}$

(ب) لدينا $b=3(4n+5)$ وهذا يعني $b\equiv 0[3]$ و $d=3$ إذن $7n+9\equiv 0[3]$

ومنه $7n\equiv 0[3]$ وهذا يعني $7n$ يقبل القسمة على 3 وبما أن 7 و 3 أوليان فيما بينهما فإن n يقسم 3

وبالتالي $n=3k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

(2) (أ) $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) ومنه $12x-7y=3\Leftrightarrow 3(4x-1)=7y$

3 يقسم $7y$ و $3\wedge 7=1$ ومنه 3 يقسم y أي ان $y\equiv 0[3]$

(ب) $y\equiv 0[3]$. نأخذ $y=3$ ومنه بالتعويض في المعادلة نجد : $12x-21=3$ اذن $x=2$ ومنه $(x_0;y_0)=(2;3)$ حل خاص للمعادلة (E)

وباتباع نفس الخطوات المتبعة نجد $\begin{cases}12x-7y=3\\12x_0-7y_0=3\end{cases}\Leftrightarrow 12(x-x_0)=7(y-y_0)$

وحسب غوص نجد الحلول : $(x;y)=(2+7k\ ;\ 3+12k)\ ;k\in\mathbb{Z}$

التحقق: $12(2+7k)-7(3+12k)=3$

(3) x عدد دورات A الذي يظهر كل 24 سنة و y عدد دورات B الذي يظهر كل 14 سنة

بعد 6 سنوات يظهر B ومنه نجد : $24x=14y+6$

(أ) $24x=14y+6$ ومنه $12x-7y=3$ اذن $(x;y)$ حل للمعادلة (E)

(ب) نبحث عن اصغر حل $x>0$ و $y>0$ ومنه $2+7k>0$ و $3+12k>0$ $(k\in\mathbb{Z})$

أي $k>\frac{-2}{7}$ و $k>\frac{-1}{4}$ ومنه اصغر قيمة هي $k=0$

اذن $k=0$ ومنه $x=2$ و $y=3$ و بالتعويض نجد : $14\times3+6=48$; $2\times24=48$ ومنه

$z=2048$ وهي السنة التي يظهر فيها المرضان معا

التمرين(12)

الفرع الاول : عين الجواب الصحيح من بين الاجوبة المقترحة

(1) $(x;y)$ ثنائية من الاعداد الصحيحة بحيث $5x+8y=11$. اذن

(أ) $p\gcd(x,y)=11$	(ب) $p\gcd(x,y)$ يقسم 11	(ج) $pgcg(x,y)$ مضاعف 11

(2) $(x;y)$ ثنائية من الاعداد الصحيحة . المعادلة : $24x-16y=25$

(أ) لا تقبل حلولا (ب) تقبل عددا غير منته من الحلول (ج) تقبل حلا وحيدا

(3) $p\gcd(5x^2+7\ ;\ x^2+2)$ يقسم :

(أ) العدد 3 (ب) العدد 7 (ج) العدد 5

(4) نضع : $a=7n+5$ و $b=8n-1$ مع $n\in IN^*$. اذا كان a و b غير اوليين فيما بينهما فان :

(أ) $a\wedge b=56$	(ب) $a\wedge b=7$	(ج) $a\wedge b=47$

(5) ليكن n عددا طبيعيا اكبر تماما من 3 . نضع : $\alpha=2n^2-3n+2$ و $\beta=n-1$

(أ) $\alpha\wedge\beta=2$	(ب) $\alpha\wedge\beta=n-1$	(ج) $\alpha\wedge\beta=1$

الفرع الثاني : عين الجواب او الأجوبة الصحيحة

(1) ليكن العددين الصحيحين a و b غير المعدومين , اذا كان العددان 6 و 15 قاسمان مشتركان لـ a و b فإن :

(أ) $a\vee b=30$	(ب) $a\wedge b$ يقسم 30	(ج) $a\vee b$ يقسم 30	(د) $ax+by=21$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

(2) a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث : $ab\wedge(a+b)=5$ لدينا اذن :

(أ) 5 يقسم a^2+b^2	(ب) 5 يقسم a^2 و b^2	(ج) $a\wedge b=5$	(د) $a^2\wedge b^2=5$

(3) x و y عددان من $\mathbb{Z}^2$ حيث $x\wedge y=1$ (اوليان فيما بينهما) لدينا اذن :

(أ) $-3x\wedge 3y=3$	(ب) $(x+y)\wedge(x-y)=1$	(ج) $(x+y)\wedge(x-y)=2$	(د) $(x+y)\wedge(x-y)=1$ او 2

حل التمرين(12) :

الفرع الاول :

(1) $5x+8y=11$: اذا كان d هو القاسم . م. أ لـ x و y فان d يقسم مجموع مضاعفاتهما ومنه يقسم 11

اذن الجواب الصحيح هو (ب)

(2) المعادلة $24x-16y=25$ لا تقبل حلولا لان القاسم ق. م. أ لـ 24 و 16 لا يقسم 25

اذن الجواب الصحيح هو (أ)

(3) نضع $\alpha=5x^2+7$ و $\beta=x^2+2$ ومنه $\alpha-5\beta=5x^2+7-5x^2-10=-3$

اذن $(5x^2+3)\wedge(x^2+2)=3$ اذن الجواب الصحيح هو (أ)

(4) $a=7n+5$ و $b=8n-1$ ومنه نجد :

$$8a-7b=8(7n+5)-7(8n-1)=56n+40-56n+7=47$$

ومنه $a\wedge b=47$ اذن الجواب الصحيح هو (ج)

(5) $\alpha=2n^2-3n+2$ و $\beta=n-1$ مع $n>3$

$$\alpha-(2n-1)\beta=2n^2-3n+2-(2n-1)(n-1)=2n^2-3n+2-2n^2+3n-1=1$$

اذن الجواب الصحيح هو (ج)

الفرع الثاني:

(1) اذا كان العددان 6 و 15 قاسمان مشتركان لـ a و b فإن : 6 يقسم a ويقسم b و 15 يقسم a ويقسم b

نعتبر المثال المضاد التالي : $a=60$ و $b=120$ و منه $a\wedge b=60\neq 30$ و 60 لا يقسم 30

و $a\vee b=120$

اذن الجوابان (أ) و(ب) خاطئان

ولدينا أيضا 15 يقسم a ويقسم b ومنه ينتج أيضا 5 يقسم a و 5 يقسم b ومن المعطيات أيضا 6 يقسم a ويقسم b

اذن يكون لدينا : $\begin{cases} a\equiv 0[5] \\ a\equiv 0[6] \\ (5,6)=1 \end{cases}$ ومنه $a\equiv 0[30]$ ونفس الشيء نجد : $b\equiv 0[30]$

وهذا يعني 30 يقسم $ppcm(a,b)$

ولدينا $30 \not/ p\gcd(a,b)$. مثلا : $ax+by=21$ تقبل حلا اذا وفقط اذا كان $p\gcd(a,b)/21$ لكن المقترح هو $30 \not/ p\gcd(a,b)$ أي ان $30/21$ وهذا مستحيل اذن الجواب (د) خاطئ

وبالتالي الجواب الصحيح هو (ج)

(2) * $p\gcd(ab,a+b)=5$ تعني : $5/ab$ و منه $5/2ab$ و $5/(a+b)$ ومنه: $5/(a+b)^2$

ومن كل هذا ينتج أن : $5/(a+b)^2-2ab$ اذن $5/a^2+b^2$ ومنه الجواب (أ) صحيح

* - و من المعطيات أيضا نجد : $5/a(a+b)-ab$ ومنه $5/a^2$

ولدينا ايضا : $5/b(a+b)-ab$ ومنه $5/b^2$ أي ان : 5 يقسم a^2 و b^2 ومنه الجواب (ب) صحيح

* لدينا $5/a^2$ و العدد 5 اولي ومنه $5/a$ و أيضا 5 يقسم b ومنه $5/p\gcd(a,b)$ (1)

نضع $d=p\gcd(a,b)$ ومنه d يقسم a و يقسم b اذن d/ab و $d/(a+b)$

وبالتالي d يقسم $p\gcd(ab,a+b)$ اذن $d/5$ (2)

ومن (1) و (2) $5/p\gcd(a,b)$ و $d/5$ نجد ان $d=5$ اذن الجواب (ج) صحيح

* من اجل $b=10$; $a=5$ مثلا فان $a+b=15$ و $ab=50$ اذن $p\gcd(ab,a+b)=5$ ومنه $p\gcd(a^2,b^2)=5^2$ اذن الجواب (د) خاطئ

ومنه الاجوبة الصحيحة هي : (أ) و (ب) و (ج)

(3) $(x,y)=1$ و منه

$$p\gcd(-3x,3y)=p\gcd(|-3x|,|3y|)=p\gcd(3|-x|,3|y|)=$$
$$=p\gcd(3x,3y)=3p\gcd(x,y)=3$$

اذن الجواب (أ) صحيح

- ليكن $d=p\gcd((x+y),(x-y))$ ومنه $d/x+y$ و $d/x-y$ اذن $d/(x+y)+(x-y)$

أي ان $d/2x$

و بنفس العمل نجد $d/(x+y)-(x-y)$ أي ان $d/2y$

ومنه $d/p\gcd(2x,2y)$ أي $d/2p\gcd(x,y)$ وبما ان $(x,y)=1$ فان $d/2$ أي ان قيم d هي 1 او 2

اذن $p\gcd((x+y)\wedge(x-y))$ هو 1 او 2 وبالتالي الجوابان (ب) و (ج) خاطئان والجواب (د) صحيح

التمرين(13)

(1) حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة التالية: $3x-8y=5$.....(1)

(2) n و x و y اعداد صحيحة حيث : $n=3x+2$ و $n=8y+7$

-(أ) بين ان الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (1)

- نعتبر الجملة : $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ (2) بين ان $n \equiv 23[24]$

(3) m عدد طبيعي ,

(أ) عين باقي قسمة 2^{2m} على 3 وباقي قسمة 7^{2m} على 8

(ب) تحقق ان العدد 1439 حل للجملة (2)

(ج) ماهو باقي قسمة 1439^{2018} على 24

حل التمرين(13) :

(1) حل المعادلة $3x-8y=5$.....(1) نلاحظ ان الثنائية $(-1;-1)$ هو حل خاص لها

أي ان $3(-1)-8(-1)=5$ وبالطرح من المعادلة (1) نجد $3(x+1)-8(y+1)=0$ ومنه $3(x+1)=8(y+1)$. العدد 3 يقسم $8(y+1)$ وبما ان 3 اولي مع 8 فان العدد 3 يقسم $y+1$

أي ان $y+1=3k$ ومنه $y=3k-1$ و بالتعويض في المعادلة $3(x+1)=8(y+1)$ نجد $x+1=8k$

ومنه $x=8k-1$ اذن مجموعة الحلول هي : $(x;y)=(8k-1;3k-1)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(2) (أ) لدينا $n=3x+2$ و $n=8y+7$

وهذا يعني $3x+2=8y+7$ ومنه نجد : $3x-8y=5$ وهذا يعني الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (1)

(ب) الجملة : $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ تكافئ ($n=3\alpha+2$ و $n=8\beta+7$) ومنه نجد $3\alpha+2=8\beta+7$ وبالتالي :

$3\alpha-8\beta=5$ وهي نفسها المعادلة (1) اذن حلولها هي : $(\alpha;\beta)=(8k-1;3k-1)$

ومن العلاقة $n=3\alpha+2$ نجد $n=3(8k-1)+2=24k-1$ اذن $n=24k-1$

وهذا يعني $n \equiv -1[24]$ أي ان $n \equiv 23[24]$

(3)(أ)- تعيين باقي قسمة 2^{2m} على 3

نعلم ان $2^{2m}=\left(2^2\right)^m=4^m$ ونعلم ان $4 \equiv 1[3]$ اذن $4^m \equiv 1[3]$ ومنه $2^{2m} \equiv 1[3]$

تعيين باقي قسمة 7^{2m} على 8

نعلم ان $7 \equiv 7[8]$ ومنه $7 \equiv -1[8]$ اذن $7^2 \equiv 1[8]$ وبالتالي $\left(7^2\right)^m \equiv 1[8]$ أي ان $7^{2m} \equiv 1[8]$

(ب) التحقق ان العدد 1439 حل للجملة (2) : وذلك بقسمة العدد 1439 على 3 يكون الباقي 2

وبقسمته على 8 يكون الباقي 7 وهذا محقق وهذا يعني $\begin{cases} 1439 \equiv 2[3] \\ 1439 \equiv 7[8] \end{cases}$

(ج) تعيين باقي قسمة 1439^{2018} على 24

من السؤال السابق لدينا $\begin{cases} 1439 \equiv 2[3] \\ 1439 \equiv 7[8] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 1439^{2018} \equiv 2^{2018}[3] \\ 1439^{2018} \equiv 7^{2018}[8] \end{cases}$ ومن السؤال (أ) لدينا :

$2^{2m} \equiv 1[3]$ أي ان $2^{2(1009)} \equiv 1[3]$ وبالتالي $2^{2018} \equiv 1[3]$

و $7^{2m} \equiv 1[8]$ أي ان $7^{2(1009)} \equiv 1[8]$ وبالتالي : $7^{2018} \equiv 1[8]$

اذن $\begin{cases}1439^{2018}\equiv 1[3]\\ 1439^{2018}\equiv 1[8]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}1439^{2018}-1\equiv 0[3]\\ 1439^{2018}-1\equiv 0[8]\end{cases}$ وبما ان العددين 3 و 8 اوليين فيما بينهما

فان $1439^{2018}-1\equiv 0[24]$ وبالتالي : $1439^{2018}\equiv 1[24]$ ومنه باقي قسمة 1439^{2018} على 24 هو 1

التمرين(14) :

(1) a عدد طبيعي حيث $a>5$ و y عدد طبيعي يكتب $\overline{4452}$ في نظام التعداد ذي الأساس a و يكتب $\overline{2020}$ في نظام التعداد ذي الأساس $(a+2)$.

أ – بين أن a يحقق: $a\left(2a^2-8a-21\right)=18$

ب – استنتج قيمة a. ثم اكتب العدد y في النظام العشري.

(2) أ– أدرس ،حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 9 .

ب– استنتج باقي قسمة العدد : $y^{1434}+y^{2012}+4^{2013}$ على 9 .

حل التمرين(14)

(1)(أ)– بيان أن a يحقق: $a\left(2a^2-8a-21\right)=18$

لدينا $y=\overline{4452}^{a}=2+5a+4a^2+4a^3$ و $y=\overline{2020}^{(a+2)}=0+2(a+2)+0(a+2)^2+2(a+2)^3$

ومنه نجد $2+5a+4a^2+4a^3=0+2(a+2)+0(a+2)^2+2(a+2)^3$

ومنه $2+5a+4a^2+4a^3=4a+4+2a^3+12a^2+24a+16$

وبالتالي : $a\left(2a^2-8a-21\right)=18$

(ب) استنتاج قيمة a : الكتابة السابقة تعني ان العدد a قاسم للعدد 18 ونعلم ان $a>5$ أي ان $a\in\{6;9;18\}$

–اذا كان $a=6$ فان المعادلة السابقة تكافئ : $a^2-4a-12=0$ أي $(a-6)(a+2)=0$

ومنه نجد $a=-2$ (مرفوض) او $a=6$ اذن $a=6$.

– اذا كان $a=9$ فان المعادلة تكافئ : $2a^2-8a-23=0$ مميزها $\sqrt{\Delta}=\sqrt{248}=15,74$

ومنه المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{N}$

– اذا كان $a=18$ فان المعادلة تكافئ : $2a^2-8a-21=0$ وهذه مميزها $\sqrt{232}=15,23$ لا تقبل حلا في $\mathbb{N}$

– كتابة العدد y في النظام العشري: $y=2+5(6)+4(6)^2+4(6)^3$ ومنه $y=1040$.

(2)(أ)–دراسة حسب قيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 9

$5^0\equiv 1[9]$ و $5^1\equiv 5[9]$ و $5^2\equiv 7[9]$ و $5^3\equiv 8[9]$ و $5^4\equiv 4[9]$ و $5^5\equiv 2[9]$ و $5^6\equiv 1[9]$

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$5^n\equiv\ldots$	1	5	7	8	4	2	$[9]$

(ب)– استنتاج باقي قسمة العدد : $y^{1434}+y^{2012}+4^{2013}$ على 9 .

لدينا $y=1040\equiv 5[9]$ و ولدينا $1434=6(239)=6k$ ومنه $y^{1434}\equiv 5^{6k}\equiv 1[9]$

ولدينا أيضا $2012=6(335)+2=6k+2$ ومنه $y^{2012}\equiv 5^{6k+2}\equiv 7[9]$

و $2013=3(670)+3$ ونعلم ان $4^3=64\equiv 1[9]$ ومنه $4^{2013}=\left(4^3\right)^{670}\times 4^3\equiv 1[9]$

ومنه نستنتج : $y^{1434}+y^{2012}+4^{2013}\equiv 1+7+1\equiv 0[9]$ الباقي هو 0 .

التمرين(15)

من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $a=3n+4$ و $b=2n+1$.

(1) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $2a-3b=5$ ، $a-b=n+3$ ، $3(n+3)-5=a$ ، $2(n+3)-5=b$

استنتج ان : $PGCD(a;b)=PGCD(n+3,5)$

(2) استنتج تبعا لقيم n ، قيم $PGCD(a;b)$

(3) x ، y ، z اعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حدودا متابعة لمتتالية هندسية أساسها q عدد طبيعي غير معدوم .

عين الاعداد q ، y ، x ، z علما ان : $PGCD(3z+4y;2z+y)=10$

(4) عين العددين الطبيعيين m ، n علما ان n اولي و $m^2=a$

حل التمرين(15) :

$a=3n+4$ و $b=2n+1$

(1) التحقق من المساوات :

$2a-3b=2(3n+4)-3(2n+1)=5$ و $a-b=3n+4-2n-1=n+3$

$3(n+3)-5=3(a-b)-(2a-3b)=a$ و $2(n+3)-5=2(a-b)-(2a-3b)=b$

استنتاج ان : $PGCD(a;b)=PGCD(n+3,5)$

نضع $PGCD(a;b)=d$ و $PGCD(n+3,5)=d'$

$$\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} d/a-b \\ d/2a-3b \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} d/n+3 \\ d/5 \end{cases}\Rightarrow d/PGCD(n+3,5)\Rightarrow d/d'$$

$$\begin{cases} d'/n+3 \\ d'/5 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} d'/3(n+3)-5 \\ d'/2(n+3)-5 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases}\Rightarrow d'/PGCD(a;b)\Rightarrow d'/d$$

ومنه $d=d'$ (d/d' و d'/d) اي ان $PGCD(a;b)=PGCD(n+3,5)$

(2) استنتاج قيم $PGCD(a;b)$.

لدينا $PGCD(a;b)=PGCD(n+3,5)=d$ ومنه $d/5$ اذن القيم الممكنة هي $d=1$ او $d=5$

اذا كان $d=5$ فهذا يعني $n+3\equiv 0[5]$ اي $n\equiv 2[5]$ وبالتالي $n=5k+2;k\in\mathbb{N}$

خلاصة : اذا كان $n=5k+2$ فان $PGCD(a;b)=5$

اذا كان $n\neq 5k+2$ فان $PGCD(a;b)=1$

(3) تعيين الاعداد q ، y ، x ، z علما ان : $PGCD(3z+4y;2z+y)=10$

لدينا : $z=qy$ و $y=qx$

$$PGCD(3z+4y;2z+y)=PGCD(3qy+4y;2qy+y)$$

$$=PGCD\big(y(3q+4);y(2q+1)\big)=y.PGCD(3q+4;2q+1)$$

ومنه نجد $PGCD(3z+4y;2z+y)=y.PGCD(3q+4;2q+1)$

وحسب السؤال السابق : $PGCD(a;b)=5$ او $PGCD(a;b)=1$

اي ان $PGCD(3q+4;2q+1)=5$ او $PGCD(3q+4;2q+1)=1$

في حالة : $q=5k+2$ فان $PGCD(3q+4;2q+1)=5$ ومنه $y\times 5=10$ اذن $y=2$

أي ان $y=qx$ وهذا يعني q يقسم y ومنه $q/2$ اذن $q=2$ لان المتتالية ليست ثابتة

نستنتج منه $q=2$ و $x=1;y=2;z=4$ $PGCD(3z+4y;2z+y)=PGCD(20;10)=10$

في حالة $q\neq 5k+2$ فان $PGCD(3q+4;2q+1)=1$ ومنه $y=10$

$$y=qx\Rightarrow x=\frac{y}{q}\Rightarrow q/y\Rightarrow q/10\Rightarrow q\in\{1;5;10\}$$

–اذا كان $q=1$ فان : $x=10;y=10;z=10;$ وعندئذ $PGCD(3z+4y;2z+y)=PGCD(70;30)=10$

– اذا كان $q=5$ فان $z=50;$, $y=10$, $x=2$ وعندئذ

$$PGCD(3z+4y;2z+y)=PGCD(170;110)=10$$

–اذا كان $q=10$ فان $z=100;$, $x=1,y=10$

$$PGCD(3z+4y;2z+y)=PGCD(340;110)=10$$

(4) تعيين العددين الطبيعيين m ، n علما ان n اولي و $m^2=a$:

$$m^2=a\Rightarrow m^2=3n+4\Rightarrow m^2-4=3n\Rightarrow (m-2)(m+2)=3n$$

وهذا يعني $3/(m-2)$ او $3/(m+2)$ اي $\begin{cases}m=3k+2\\ او\\ m=3k'-2\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}3n=(3k+2)^2-4\\ او\\ 3n=(3k'-2)^2-4\end{cases}$

اذن $\begin{cases}n=k(3k+4)\\ n=k'(3k'-4)\end{cases}$

بما ان n اولي ، فان القيمة الوحيدة الممكنة للعددين k و k' هي 1 ، منه $n=7$ او $n=-1$

(مستحيل لان n عدد طبيعي) ،

نستنتج اذن أن من اجل $k=1$ نجد : $m=3(1)+2$ أي $m=5$

و $m^2=3n+4$ تعني $25=3n+4$ ومنه $n=7$

التمرين(16)

نعتبر المتتالية (u_n) التي حدها الأول $u_0=8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=2u_n+5n-5$

(1) احسب u_1 ، u_2 ، u_3.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n+5n$

*بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 .

* عبر عن الحد العام v_n ثم u_n بدلالة n . ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

* عين العدد الطبيعي n حيث $2^n=2048$. استنتج أن 2008 حدا من حدود المتتالية (u_n).

(3) * اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $2^{4k+1}\equiv 2[10]$.

* بين أن u_n عدد طبيعي.

*عين حسب قيم n رقم آحاد العدد u_n.

حل التمرين(16): $u_0=8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=2u_n+5n-5$

(1) حساب u_1 ، u_2 ، u_3.

$u_1=2u_0+5\times 0-5=2\times 8-5=11$ ، $u_2=2u_1+5\times 1-5=2\times 11=22$

$u_3=2u_2+5\times 2-5=2\times 22+5=49$

(2) $v_n=u_n+5n$ و $u_{n+1}=2u_n+5n-5$

اثبات ان (v_n) هندسية

* $v_{n+1}=u_{n+1}+5(n+1)=2u_n+5n-5+5n+5=2u_n+10n=2(u_n+5n)=2v_n$

ومنه $v_{n+1}=2v_n$ متتالية (v_n) هندسية أساسها 2 .

* عبارة v_n و u_n بدلالة n

$v_n=v_0\times(2)^n=u_0\times(2)^n=8\times 2^n=2^{n+3}$ ومنه $v_n=2^{n+3}$

و $v_n=u_n+5n$ ومنه $u_n=v_n-5n=2^{n+3}-5n$ اذن $u_n=2^{n+3}-5n$

من اجل كل عدد طبيعي n نكتب : $u_n=2^n\times\left(8-5\dfrac{n}{2^n}\right)$ و $0\prec\dfrac{n}{2^n}\prec\dfrac{n}{e^n}$

ونعلم ان $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{e^n}=0$ ومنه نستنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

*- تعيين العدد الطبيعي n بحيث $2^n=2048$.

$2^n=2048$ تكافئ $2^n=2^{11}$ ومنه $n=11$

* إيجاد العدد الطبيعي n بحيث : $u_n=2008$

$u_n=2008$ تكافئ $v_n-5n=2008$ أي $2^{n+3}-5n=2008$ ومن السؤال السابق $2^n=2048$ نجد

$2^{n+3}-5n=2048-40$ أي $2^{n+3}-5n=2^{11}-5\times 8$ ومنه $2^{n+3}-5n=2^{8+3}-5\times 8$ اذن $n=8$

(3) * نستعمل الاستدلال بالتراجع , نسمي $P(k)$ هذه الخاصية $2^{4k+1}\equiv 2[10]$

* $P(0)$ صحيحة لأن $2^1\equiv 2[10]$.

* نفرض $P(k)$ صحيحة أي $2^{4k+1}\equiv 2[10]$ ونبرهن $P(k+1)$ أي $2^{4(k+1)+1}\equiv 2[10]$

لدينا $2^{4(k+1)+1}=2^{4k+4+1}=2^{4k+1}\times 2^4$ نستنتج أن $2^{4(k+1)+1}\equiv 2^{4k+1}\times 2^4[10]$

أي $2^{4(k+1)+1}\equiv 2\times 16[10]$ ومنه $2^{4(k+1)+1}\equiv 2[10]$

نستنتج أن مهما يكن العدد الطبيعي k : $2^{4k+1}\equiv 2[10]$.

- تبيان أن u_n عدد طبيعي: حيث $u_n=2^{n+3}-5n$

* بما أن 2^{n+3} عدد طبيعي و $5n$ عدد طبيعي و $2^{n+3}\succ 5n$ فإن u_n عددا طبيعيا .

* تعيين رقم آحاد u_n هو تعيين باقي قسمة u_n على 10 .

لما $n=4k+1$ فإن $u_n\equiv 8\times 2^{4k+1}-5(4k+1)[10]$ أي $u_n\equiv 8\times 2-20k-5[10]$ أي $u_n\equiv 1[10]$

نستنتج أن رقم آحاد u_n هو 1 لما $n=4k+1$

لما $n=4k+2$ فإن $u_n\equiv 8\times 2^{4k+2}-5(4k+2)[10]$ أي $u_n\equiv 8\times 2\times 2-0[10]$ أي $u_n\equiv 2[10]$

نستنتج أن رقم آحاد u_n هو 2 لما $n=4k+2$

لما $n=4k+3$ فإن $u_n\equiv 8\times 2^{4k+3}-5(4k+3)[10]$ أي $u_n\equiv 8\times 2\times 4-20k-15[10]$

أي $u_n\equiv 9[10]$

نستنتج أن رقم آحاد u_n هو 9 لما $n=4k+3$

لما $n=4k$ فإن $u_n\equiv 8\times 2^{4k}-5(4k)[10]$ أي $u_n\equiv 4\times 2^{4k+1}-20k[10]$

أي $u_n\equiv 4\times 2-0[10]$ أي $u_n\equiv 8[10]$ نستنتج أن رقم آحاد u_n هو 8 لما $n=4k$

التمرين(17)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_1) ذات المجهول $(x;y)$: $11x+8y=79$.

أ) بين انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E_1) فإن $y\equiv 3[11]$.

ب) حل المعادلة (E_1) .

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_2) ذات المجهول $(y;z)$: $3y+11z=372$.

أ) بين انه اذا كانت الثنائية $(y;z)$ حل للمعادلة (E_2) فإن $z\equiv 0[3]$.

ب) حل المعادلة (E_3) .

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_3) ذات المجهول $(x;z)$: $3x-8z=-249$.

4) السعر الكلي ل 41 قلم ، موزعة في ثلاث علب هو $480DA$

- سعر كل قلم من العلبة الأولى هو $48DA$.
- سعر كل قلم من العلبة الثانية هو $36DA$.
- سعر كل قلم من العلبة الثالثة هو $4DA$.

عين عدد الاقلام في كل علبة .

حل التمرين(17) :

(1) (أ) لدينا $11x+8y=79$ ومنه $8y-79=-11x$ إذن $8y-79$ يقسم 11 أي $8y-79\equiv 0[11]$.

$8y-79\equiv 0[11]$ تكافئ $8y\equiv 79[11]$ أي $8y\equiv 2[11]$ تكافئ $56y\equiv 14[11]$ أي $y\equiv 3[11]$.

(ب) $y\equiv 3[11]$ تكافئ $y=3+11k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ و بعد التعويض بـ $y=3+11k$ في المعادلة $11x+8y=79$ نجد $x=5-8k$ و أخيرا مجموعة حلول المعادلة $11x+8y=79$ هي $S=\{(5-8k;3+11k),k\in\mathbb{Z}\}$.

(2)(أ) $3y+11z=372$ تكافئ $3y=3(124-y)$ $11z=372-3y$

$11z=3(124-y)$ تعن 3 تقسم $11\times z$.و بما ان 3 اولي مع 11 فانه حسب مبرهنة غوص

3 يقسم z أي $z\equiv 0[3]$.ومنه $z=3k$

(ب) $z\equiv 0[3]$ تكافئ $z=3k'$ حيث $k'\in\mathbb{Z}$ نعوض في المعادلة $11z=3(124-y)$

فنجد $y=124-11k'$.

اذن مجموعة حلول المعادلة $3y+11z=372$ هي $S'=\{(-83+8k',3k'),k'\in\mathbb{Z}\}$.

(3) $3x-8z=-249$تكافئ $3x+249=8z$ تكافئ $3(x+83)=8z$

3 يقسم $8z$ و بما ان 3 و 8 اوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص 3 يقسم z اي $z=3k''$ حيث $k''\in\mathbb{Z}$

نعوض في المعادلة $3(x+83)=8z$ فنجد $x=-83+8k''$.

اذن مجموعة حلول المعادلة $3x+249=8z$ هي $(x;z)=\{(-83+8k'';3k''),k''\in\mathbb{Z}\}$.

(4) ليكن x عدد اقلام العلبة الأولى و y عدد اقلام العلبة الثانية و z عدد اقلام العلبة الثالثة .

مجموع الاقلام هو 41 اذن $x+y+z=41.....(1)$

وأسعار الاقلام على التوالي هي: من العلبة الأولى $48DA$ و من العلبة الثانية هو $36DA$ ومن الثالثة هو $4DA$

والسعر الكلي للاقلام هو $480DA$ ومنه نجد :

$48x+36y+4z=480$ أي $12x+9y+z=120.....(2)$.

لدينا اذن الجملة $\begin{cases}x+y+z=41.....(1)\\12x+9y+z=120.....(2)\end{cases}$ ومن (1) نجد : $z=41-x-y$

وبالتعويض في (2) نجد : $12x+9y+41-x-y=120$ أي $11x+8y=79$ و هي المعادلة (E_1)

فحلولها اذن هي : $x=5-8k$ و $y=3+11k$. حيث k عدد صحيح

بما ان xيمثل عدد الأقلام فان $x\succ 0$ اي $5-8k\succ 0$ ومنه $k\prec\frac{5}{8}$ اذن $k=0$

فنجد عندئذ $x=5$ و $y=3$ و $z=41-5-3=33$

اذن عدد الاقلام في العلبة الأولى هو 5 وعدد الاقلام في العلبة الثانية هو 3 وعدد الاقلام في العلبة الثالثة هو 33

التمرين(18)

(1) عين القاسم ألمشترك الأكبر للاعداد : 504, 1260 , 2772

(2) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : (1) ... $2772x-1260y=504$

(أ) عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) و الذي يحقق $2x_0^2-3y_0=-4$.

ب) باستعمال الحل الخاص المتحصل عليه في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حل المعادلة (1)

3) نفرض ان $x;y$ عددان طبيعيان حيث $(x;y)$ هو حل للمعادلة (1) :

أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الاكبر للعددين x و y

ب) عين الثنائيات $(x;y)$ بحيث يكون العددان x . و y اوليان فيما بينهما .

4) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 2^n على 10 ثم استنتج رقم احاد 2018^{1439} .

5) عين الثنائيات $(x;y)$من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ التي هي حلول للمعادلة (1) و تحقق $2^{y-2x}\equiv 8[10]$.

حل التمرين (18) :

(1) ايجاد القاسم المشترك الاكبر للأعداد 504 و 1260 و 2772 بالتحليل الى جداء عوامل اولية نجد :

$2772=2^2\times 3^2\times 7\times 11$ و $1260=2^2\times 3^2\times 5\times 7$ و $504=2^3\times 3^2\times 7$

ومنه $PGCD(2772;1260;504)=252$.

(2) $2772x-1260y=504.....(1)$

(أ) تعيين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) و الذي يحقق $2x_0^2-3y_0=-4$ لدينا (1) تكافئ $11x-5y=2$.

الحل الخاص يحقق $\begin{cases}2x_0^2-3y_0=-4\\11x_0-5y_0=2\end{cases}$ وهذا يكافئ ان $\begin{cases}10x_0^2-15y_0=-20\\33x_0-15y_0=6\end{cases}$

بالطرح نجد $10x_0^2-33x_0+26=0$ مميزها $\Delta=49$ و منه للمعادلة حلين هما $x_0=\frac{13}{10}$ مرفوض

و الحل الثاني مقبول وهو $x_0=2$ بالتعويض في المعادلة من الجملة نحصل $y_0=4$ و منه الحل الخاص هو $(2;4)$

(ب) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (1) لدينا $\begin{cases}11x-5y=2\\11(2)-5(4)=2\end{cases}$ بالطرح نجد $11(x-2)=5(y-4)$

11 يقسم $5(y-4)$و العددان 11 و 5 اوليان فيما بينهما حسب مبرهنة غوص فان 11 قاسم للعدد $(y-4)$

ومنه $y-4=11k$ أي ان $y=4+11k$ وبالتعويض في المعادلة نجد $x=2+5k$

ومنه مجموعة الحلول هي $S=\{(2+5k;4+11k);k\in\mathbb{Z}\}$.

(3) (أ) تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الاكبر للعددين x و y الطبيعين حيث $(x;y)$ هو حل للمعادلة (1) :

نضع $PGCD(x;y)=d$ ومنه d قاسم للعددين x و y وبالتالي يقسم $11x-5y$ أي يقسم 2

و منه القاسم المشترك الاكبر قاسم للعدد 2 و منه قيمه الممكنة هي 1 او 2

(ب) تعيين الثنائيات $(x;y)$ بحيث يكون العددان x و y اوليان فيما بينهما أي ان $PGCD(x;y)=1$ و

$\begin{cases}x=2+5k\\y=4+11k\end{cases};k\in\mathbb{N}$ و هذا يعني ان k عدد طبيعي فردي أي ان $\begin{cases}x=2+5(2k'+1)\\y=4+11(2k'+1)\end{cases};k'\in\mathbb{N}$

و منه $\begin{cases}x=7+10k'\\y=15+22k'\end{cases};k'\in\mathbb{N}$ ومنه $(x;y)=(7+10k';15+22k')$ و $k'\in\mathbb{N}$.

(4) تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 2^n على 10 لدينا :

$n=$	0	1	2	3	4	5	
$2^n\equiv\ldots$	1	2	4	8	6	2	$[10]$

و منه بواقي قسمة 2^n على 10 تشكل متتالية دورية و دورها 4

لما $n=4k+1$ الباقي هو 2 و لما $n=4k+2$ الباقي هو 4

و لما $n=4k+3$ الباقي هو 8 و لما $n=4k+4$ الباقي هو 6

لدينا $2018\equiv 2^3[10]$ و منه $2018^{1439}\equiv 2^{4317}[10]$ و $4317=1079\times 4+1$ وهو من الشكل $n=4k+1$

باقي قسمة 2018^{1439} على 10 هو 2 أي ان $2018^{1439}\equiv 2[10]$

رقم احاد العدد 2018^{1439} هو 2

(5) تعيين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ التي هي حلول المعادلة (1) و تحقق $2^{y-2x}\equiv 8[10]$

لدينا $\begin{cases}x=2+5k\\y=4+11k\end{cases};k\in\mathbb{N}$ ومنه $y-2x=4+11k-2(2+5k)=k$

بالتعويض نجد $2^{y-2x}\equiv 8[10]$ تعني $2^k\equiv 8[10]$ من دراسة البواقي نجد ان $k=4\alpha+3$

و منه $\begin{cases}x=2+5(4\alpha+3)\\y=4+11(4\alpha+3)\end{cases}$ اذن $\begin{cases}x=17+20\alpha\\y=37+44\alpha\end{cases};\ \alpha\in\mathbb{N}$

و منه الثنائيات هي $(x;y)=(17+20\alpha;37+44\alpha)$.

التمرين(19)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مع التبرير:

(1) من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{2n}-1$ يقسم 3

(2) إذا كان n عددا صحيحا حلا للمعادلة : $n^2+n\equiv 0[6]$ فإن : $n\equiv 0[3]$

(3) إذا كان : $x^2\equiv y^2[17]$ فإن : $x\equiv y[17]$

(4)مجموعة حلول المعادلة : $12x-5y=3$ المعرفة في $\mathbb{Z}^2$ هي مجموعة الثنائيات $(x;y)$

من الشكل : $(4+10k;9+24k)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

(5)إذا كان 2 هو باقي قسمة عدد طبيعي n على 5 فإن 4 يكون باقي قسمة n^2 على 5

(6) $PGCD(18a;24a)=a$ حيث : $a\in\mathbb{N}^*$.

(7) $PGCD(a;b)=PGCD(a;a+b)$, a,b عددان طبيعيان .

(8) توجد ثنائية وحيدة (a,b) من الاعداد الطبيعية حيث : $a\prec b$ و $PPCM(a,b)-PGCD(a,b)=1$

(9) M و N عددان طبيعيان يكتبان كما يلي : $M=\overline{abc}^{10}$ و $N=\overline{bca}^{10}$

اذا كان M يقبل القسمة على 27 فان $M-N$ ايضا يقبل القسمة على 27

(10) من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : اذا كان $n\equiv 1[7]$ فان $PGCD(3n+4;4n+3)=7$

(11) من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n العدد : $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ يقبل القسمة على 5

(12) $x^2+x+3\equiv 0[5]$ اذا وفقط اذا كان $x\equiv 1[5]$

حل التمرين(19) :

(1) 3 يقسم $2^{2n}-1$ تعني $2^{2n}-1\equiv 0[3]$ أي $4^n-1\equiv 0[3]$ أي $4^n\equiv 1[3]$

وهذه الأخيرة صحيحة لان $4\equiv 1[3]$ وبالتالي $4^n\equiv 1[3]$ اذن الجملة صحيحة

اذن $2^{2n}-1\equiv 0[3]$

n	1	2	3	4	5	6	7
$2^{2n}-1$	3	15	63	255	1023	4095	16383
reste	0	0	0	0	0	0	0

(2) $n^2+n\equiv 0[6]$ فإنّ $n\equiv 0[3]$ هذه الجملة خاطئة , لانه من أجل $n=1$ مثلا نجد :

$1^2-1\equiv 0[6]$ محققة لكن $1\neq 0[3]$

(3) خطأ لانه إذا كان : $x^2\equiv y^2[17]$ فان $x^2-y^2\equiv 0[17]$ وهذه تعني $(x-y)(x+y)\equiv 0[17]$

ومنه نجد ($x-y\equiv 0[17]$ او $x+y\equiv 0[17]$) أي ($x\equiv y[17]$ او $x\equiv -y[17]$)

(4) المعادلة $12x-5y=3$ تقبل حلا خاصا هو $(-1;-3)$ ومنه $12(-1)-5(-3)=3$

وبالتالي نجد : $12(x+1)=5(y+3)$ وهذه تعني $12(x+1)$ يقسم 5 وبما ان 5 اولي مع 12

فانه حسب مبرهنة غوص $(x+1)$ يقسم 5 أي $x+1=5k$ ومنه $x=5k-1$

ونعوض نجد : $y+3=12k$ أي $y=12k-3$

اذن الحلول هي : $(x;y)=(5k-1;12k-3)$

والحلول المطروحة هي : $x=4+10k$ و هذا الحل $x=4+10k$ يعني $x=5(2k)+4$ أي $x\equiv 4[5]$

وهذه تعني $x\equiv -1[5]$ ومنه $x=5k-1$

و $y=9+24k$ تعني $y=9+12(2k)$ أي $y\equiv 9[12]$ أي $y\equiv -3[12]$ ومنه $y=12k-3$

اذن الجملة صحيحة والحلول هي نفسها

ملاحظة (1): يمكن الحل بطريقة أخرى وذلك بتعويض الحلول في المعادلة نجد انها محققة

(2) اذا اخذنا الحل الخاص $(4;9)$ يكون : $\begin{cases}12x-5y=3\\12\times 4-5\times 9=3\end{cases}$ ومنه $12(x-4)-5(y-9)=0$

اذن $12(x-4)=5(y-9)$ ومنه $\begin{cases}x-4=5k\\y-9=12k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4+5k\\y=9+12k\end{cases}$

(5) $n\equiv 2[5]$ فإن $n^2\equiv 4[5]$ صحيح لانه من خواص الموافقات $n\equiv 2[5]$ تستلزم $n^2\equiv 2^2[5]$

أي $n^2\equiv 4[5]$

(6) خطأ لأن : $PGCD(18a;24a)=PGCD(3(6a);4(6a))=6a\times PGCD(3;4)=6a\times 1=6a$.

(7) صحيح . نضع $d=PGCD(a;b)$ و $d'=PGCD(a;a+b)$

يمكن ان نبرهن ان $d=d'$

$d=PGCD(a;b)$ تعني d يقسم a ويقسم b وبالتالي d يقسم $a+b$ أي ان d يقسم d'

ومن جهة أخرى وبنفس العمل نجد ان d'يقسم d وبالتالي $d=d'$

(8) نضع $\begin{cases}a=a_1k\\b=b_1k\end{cases}$ حيث $PGCD(a,b)=k$ لدينا اذن : $PPCM(a,b)-PGCD(a,b)=1$ (1)

العلاقة(1) تعني : $\frac{a\times b}{k}-k=1$ ومنه $\frac{a_1k\times b_1k}{k}-k=1$ اذن $a_1b_1k-k=1$ أي $k(a_1b_1-1)=1$

وهذا يعني ان k يقسم 1 ومنه $k=1$ وبالتالي نجد من العلاقة (1) :

$ab-1=1$ اذن $ab=2\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$ حيث $a\prec b$

اذن توجد ثنائية وحيدة تحقق المطلوب

(9) $M=\overline{abc}^{10}$ و $N=\overline{bca}^{10}$ M يقبل القسمة على 27 فان $M-N$ ايضا يقبل القسمة على 27

ومنه $M=\overline{abc}=100a+10b+c$ و $N=\overline{bca}=100b+10c+a$

اذن $M-N=100a+10b+c-100b-10c-a=9(11a-10b-c)$

يكون $M-N$ يقبل القسمة على 27 اذا كان $(11a-10b-c)$ يقبل القسمة على 3

ونعلم ان $M=100a+10b+c=27k$ تعني $10b+c=27k-100a$

و $M-N=9\left(11a-(10b+c)\right)$ نعوض اذن $10b+c$ نجد :

$M-N=9\times3(37a-9k)$ و منه $11a-10b-c=11a-27k+100a=111a-27k=3(37a-9k)$

اذن $M-N$ يقبل القسمة على 27 وبالتالي الجملة صحيحة

(10) $n\equiv1[7]$ تعني $n=1+7k$ نعوض في العلاقة $3n+4=3+21k+4=7+21k=7(1+3k)$

ونعوض ايضا $4n+3=4(1+7k)+3=7+28k=7(1+4k)$

اذا كان القاسم المشترك الاكبر هو 7 فان العددين $1+3k$ و $1+4k$ يجب ان يكونا اوليين فيما بينهما

أي يوجد عددان صحيحان u و v يحققان : $u(1+4k)+v(1+3k)=1$ ومنه $\begin{cases}u+v=1\\4u+3v=0\end{cases}$ اذن $\begin{cases}u=-3\\v=4\end{cases}$

اذن بالفعل $1+3k$ و $1+4k$ اوليان فيما بينهما وبالتالي $PGCD(3n+4;4n+3)=7$

الجملة اذن صحيحة

(11) الجملة خاطئة لان من الواضح ان العدد 5^{6n+1} يقبل القسمة على 5 لكن العدد 2^{3n+1} لا يقبل القسمة على 5

لانه قوى للعدد 2 . اذن مجموع العددين 5^{6n+1} و 2^{3n+1} لا يقبل القسمة على 5

(12) الاقتراح خاطئ

سنجرب جميع بواقي القسمة بتردد 5 نجد

$x\equiv\dots$	0	1	2	3	4	$[5]$
$x^2+x+3\equiv\dots$	3	0	4	0	3	$[5]$

اذن خاطئة لانه توجد حالة اخرى تعتبر حلا وهي : $x\equiv3[5]$

التمرين (20):

(1) عين مجموعة الاعداد الصحيحة x بحيث : $4x\equiv33[5]$

(2) (أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $4x-5y=33$ ... (E)

(ب) استنتج حلول الجملة $\begin{cases}\lambda\equiv55[5]\\\lambda\equiv22[4]\end{cases}$ حيث λ عدد صحيح

(ج) عين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $|x+y+3|\prec27$

(3) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 11

(ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv0[11]$

(ج) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة : $\begin{cases} n-5^n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$

(4) N عدد طبيعي يكتب $\overline{abbaba}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 حيث $a \neq 0$, عين a و b بحيث يكون N قابلا القسمة على 33 ثم اكتب N في النظام العشري (لاحظ ان $11 \times 3 = 33$)

حل التمرين(20) :

(1) تعيين x بحيث : $4x \equiv 33[5]$ نعلم ان : $33 \equiv 3[5]$ و $4 \equiv -1[5]$ منه $4x \equiv 33[5]$ تكافئ $-x \equiv 3[5]$ أي $x \equiv -3[5]$ ومنه $x \equiv 2[5]$ أي ان $x = 5k+2$ حيث k عدد صحيح

(2) (أ) حل المعادلة : $4x-5y=33 \ldots (E)$

(E) تكافئ $4x = 5y+33$ وهذا يعني $4x \equiv 33[5]$ ومن السؤال السابق فان : $x = 5k+2$

وبالتعويض في (E) نجد : $y = 4k-5$ حيث k عدد صحيح

اذن حلول المعادلة هي الثنائيات : $(x;y) = (5k+2;4k-5)$

(ب) استنتاج حلول الجملة $\begin{cases} \lambda \equiv 55[5] \\ \lambda \equiv 22[4] \end{cases}$: وهذه الجملة تعني $\begin{cases} \lambda = 5u+55 \\ \lambda = 4v+22 \end{cases}$

أي ان $5u+55 = 4v+22$ ومنه $4v-5u=33$ وحلولها هي نفس حلول المعادلة (E)

أي ان : $(u;v) = (4k-5;5k+2)$ ومنه $\lambda = 5u+55 = 5(4k-5)+55$

أي ان $\lambda = 20k+30$ حيث k عدد صحيح

(ج) تعيين حلول المعادلة (E) والتي تحقق $|x+y+3| \prec 27$:

الحلول هي : $(x;y) = (5k+2;4k-5)$ و $|x+y+3| \prec 27$ تعني $|5k+2+4k-5+3| \prec 27$

ومنه $|9k| \prec 27$ أي $-27 \prec 9k \prec 27$ اذن $-3 \prec k \prec 3$ ومنه قيم k هي :

$k \in \{-2;-1;0;1;2\}$ ومنه الحلول $(x;y) \in \{(-8;-13);(-3;-9);(2;-5);(7;-1);(12;3)\}$

(3) (أ) ادراسة بواقي قسمة العدد 5^n على 11 :

$5^0 \equiv 1[11]$, $5^1 \equiv 5[11]$, $5^2 \equiv 3[11]$, $5^3 \equiv 4[11]$ و $5^4 \equiv 9[11]$ و $5^5 \equiv 1[11]$ الدور هو 5

اذن من اجل كل عدد طبيعي p فان بواقي القسمة الاقليدية هي كما يلي : $5^{5p} \equiv 1[11]$ و $5^{5p+1} \equiv 5[11]$ و

$5^{5p+2} \equiv 3[11]$ و $5^{5p+3} \equiv 4[11]$ و $5^{5p+4} \equiv 9[11]$

(ب) برهان ان من اجل $n \neq 0$: $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 0[11]$

لدينا $10 \equiv -1[11]$ ومنه $10^{10n} \equiv 1[11]$

و $16 \equiv 5[11]$ ومنه $16^{5n-4} \equiv 5^{5n-4}[11]$ وتعني $16^{5n-4} \equiv 5^{5(n-1)+1}[11] \equiv 5^{5m+1}[11] \equiv 5[11]$

ومنه $16^{5n-4} \equiv 5[11]$

و $27\equiv 5[11]$ ومنه $27^{5n+2}\equiv 5^{5n+2}[11]\equiv 3[11]$ ومنه $27^{5n+2}\equiv 3[11]$

و $38\equiv 5[11]$ ومنه $38^{5n+3}\equiv 5^{5n+3}[11]\equiv 4[11]$ ومنه $38^{5n+3}\equiv 4[11]$

و $49\equiv 5[11]$ ومنه $49^{5n-1}\equiv 5^{5n-1}[11]$ وتعني $49^{5n-1}\equiv 5^{5m+4}[11]\equiv 9[11]$ ومنه $49^{5n-1}\equiv 5^{5(n-1)+4}[11]\equiv 5^{5n+4}[11]\equiv 9[11]$

اذن $49^{5n-1}\equiv 9[11]$

ومنه : $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv 1+5+3+4+9[11]\equiv 22[11]$ اذن

$10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv 0[11]$

(ج) تعيين قيم n بحيث : $\begin{cases} n-5^n\equiv 0[11] \\ n\equiv 2[5] \end{cases}$:

$n\equiv 2[5]$ تعني $n=5p+2$ و $n-5^n\equiv 0[11]$ تعني : $5^n\equiv n[11]$ حيث $n=5p+2$

$5^{5p+2}\equiv 3[11]$ وبالتالي الجملة تصبح : $\begin{cases} n\equiv 3[11] \\ n\equiv 2[5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} n=11\alpha+3 \\ n\equiv 2[5] \end{cases}$ وهذا يعني $\begin{cases} n=11\alpha+3 \\ 11\alpha+3\equiv 2[5] \end{cases}$

ولدينا $10\alpha+\alpha+5\equiv 4[5]$ وبالتالي $\alpha\equiv 4[5]$ ومنه $\alpha=5p+4$

ومنه نستنتج ان $n=11(5p+4)+3$ اذن : $n=55p+47$ حيث p طبيعي

(4) لدينا $N=\overline{abbaba}^4$ و $a\neq 0$,

تعيين a و b بحيث يكون N قابلا القسمة على 33 أي $N\equiv 0[33]$

لدينا $N=\overline{abbaba}^4=a\times 4^0+b\times 4+a\times 4^2+b\times 4^3+b\times 4^4+a\times 4^5$

ومنه $N=1041a+324b$ و $N\equiv 0[33]$ تعني $N\equiv 0[3\times 11]$ أي ($N\equiv 0[3]$و $N\equiv 0[11]$ لان 3 و 11 اوليان فيما بينهما

و $1041a+324b=3(347a+108b)$ ومنه N مضاعف للعدد 3 .

اذن يكفي ان نعين العددين a و b بحيث يكون N قابلا القسمة على 11

$1041a+324b\equiv 0[11]$ ونعلم $1041\equiv 7[11]$ و $324\equiv 5[11]$ ومنه نجد $7a+5b\equiv 0[11]$

وبما ان $1\leq a\leq 3$ و $0\leq b\leq 3$ فان قيم $7a+5b$ هي كما في الجدول التالي :

a	1	2	3	
b	0	1	2	3
$7a$	7	14	21	
$5b$	0	5	10	15

نلاحظ ان الحالة الوحيدة التي يكون فيها $7a+5b$ مضاعف للعدد 11 هي الحالة $(7a;5b)=(7;15)$

ومنه $a=1$ و $b=3$

كتابة N في النظام العشري: $N=1041a+324b=1041(1)+324(3)=2013$

التمرين (21)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية : $16x+59y=2006$ ... (1) .

1) حلل إلى جداء عوامل أوّلية العدد 2006 ، ثم استنتج أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (1) فإن x يكون مضاعفا للعدد 59 .

2) حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ، المعادلة (1) .

3) عين الحلول (x,y) للمعادلة (1) التي تنتمي إلى $\mathbb{N}^{*2}$.

4) عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة a و b التي تحقق $16m+59d=2006$ حيث

$m=PPCM(a,b)$ و $d=PGCD(a,b)$

حل التمرين(21)

(1) تحليل العدد : $2006=2\times17\times59$

- إذا كانت (x,y) حلا للمعادلة (1) فإن : $16x+59y=2006$ تكافئ $16x=2006-59y$

ومنه $16x=2\times17\times59-59y=59(34-y)$ اذن $16x=59(34-y)$

هذه المعادلة تعني ان 59 يقسم $16x$ وبما ان 59 و 16 اوليين فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص 59 يقسم x

اي ان x مضاعف للعدد 59 . ومنه $x=59k$ حيث k عدد صحيح

(2) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ، المعادلة (1) :

لدينا $x=59k$ ونعوض في المعادلة $16x=59(34-y)$ نجد : $16k=(34-y)$ ومنه $y=34-16k$

اذن الحلول هي الثنائيات : $(x,y)=(59k;34-16k)$ حيث k عدد صحيح

(3) تعيين الحلول (x,y) للمعادلة (1) التي تنتمي إلى $\mathbb{N}^{*2}$.

أي $x\succ0$ و $y\succ0$ ومنه $59k\succ0$ و $34-16k\succ0$) وهذا يعني : $(k\succ0$ و $16k\prec34)$

اذن $(k\succ0$ و $k\prec2{,}12)$ أي ان قيم k هي 1 و 2

من اجل $k=1$ نجد $(x,y)=(59;18)$ و من اجل $k=2$ نجد $(x,y)=(118;2)$

(4) تعيين a و b التي تحقق $16m+59d=2006$ حيث $m=PPCM(a,b)$ و $d=PGCD(a,b)$

من المعادلة (1) $16x+59y=2006$ وبما ان a و b موجبين فان : $m=59$ و $d=18$

لكن 18 لا يقسم 59 وبالتالي هذا الحل مرفوض

والحل الاخر هو $(m,d)=(118;2)$ ومن العلاقة $m\times d=a\times b$ نجد : $a\times b=118\times2=236$

حيث $a=da'=2a'$ و $b=db'=2b'$ و a' ، b' اوليان فيما بينهما

وبالتعويض في $a\times b=236$ نجد : $4a'\times b'=236$ اي $a'\times b'=59$ وبما ان 59 اولي فان

$(a';b')\in\{(1;59),(59;1)\}$ وبالتالي قيم a و b هي $(a;b)\in\{(2;118),(118;2)\}$

التمرين(22)

(1) (أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^{3n} على 31 .

(ب) استنتج باقي قسمة كل من العددين 5^{3n+1} و 5^{3n+2} على 31

(2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $(5^{3n+2}+6^{6n+2}+36^{3n+1})$ على 31

(3) عين قيم العدد الصحيح x التي يكون من اجلها $(5^{3n+2}+x+36^{3n+1})$ يقبل القسمة على 31

(4) عين قيم العدد الصحيح m التي يكون من اجلها $(5^{3m}+36^{3m+1}+m^2)\equiv 3[31]$

(5) n عدد طبيعي لا يقبل القسمة على 3

(أ) ماهي القيم الممكنة للعدد n

(ب) اثبت ان : $(5^{2n}+5^n+1)\equiv 0[31]$

حل التمرين(22)

(1) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^{3n} على 31 :

لدينا $5^{3n}=(5^3)^n=125^n$ و $125=4\times 31+1$ ومنه $125\equiv 1[31]$ ومنه $125^n\equiv 1[31]$

اذن من اجل كل عدد طبيعي n : $5^{3n}\equiv 1[31]$

(ب) استنتاج باقي قسمة كل من العددين 5^{3n+1} و 5^{3n+2} على 31 :

$5^{3n+1}=5^{3n}\times 5$ ومنه $5^{3n+1}=5^{3n}\times 5\equiv 1\times 5[31]$ وبالتالي $5^{3n+1}\equiv 5[31]$ اذن باقي القسمة هو 5

و $5^{3n+2}=5^{3n}\times 5^2$ ومنه $5^{3n+2}\equiv 25[31]$ اذن باقي القسمة هو 25

(2) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $(5^{3n+2}+6^{6n+2}+36^{3n+1})$ على 31

لدينا $5^{3n+2}\equiv 25[31]$ و $6^{6n+2}=6^{2(3n+1)}=36^{3n+1}$ و $36\equiv 5[31]$ ومنه $6^{6n+2}\equiv 5^{3n+1}[31]$

ومن السؤال السابق فان $6^{6n+2}\equiv 5[31]$

و $36^{3n+1}\equiv 5^{3n+1}[31]$ ومنه $36^{3n+1}\equiv 5[31]$

اذن $(5^{3n+2}+6^{6n+2}+36^{3n+1})\equiv 25+5+5[31]$ ومنه باقي قسمة $(5^{3n+2}+6^{6n+2}+36^{3n+1})$ على31 هو4

(3) تعيين قيم العدد الصحيح x التي يكون من اجلها $(5^{3n+2}+x+36^{3n+1})$ يقبل القسمة على 31

لدينا سابقا : $5^{3n+2}\equiv 25[31]$ و $36^{3n+1}\equiv 5[31]$ ومنه $(5^{3n+2}+x+36^{3n+1})\equiv 25+5+x[31]$

اذن يكون $(5^{3n+2}+x+36^{3n+1})$ يقبل القسمة على 31 اذا كان $(5^{3n+2}+x+36^{3n+1})\equiv 0[31]$

اي $30+x\equiv 0[31]$ اي $x\equiv 1[31]$ ومنه قيم x هي : $x=31k+1$ حيث k عدد صحيح

(4) تعيين قيم m التي يكون من اجلها $(5^{3m}+36^{3m+1}+m^2)\equiv 3[31]$

نعلم ان $5^{3m}\equiv 1[31]$ و $36^{3m+1}\equiv 5[31]$

وبالتالي : $(5^{3m}+36^{3m+1}+m^2)\equiv 3[31]$ تعني : $(1+5+m^2)\equiv 3[31]$ اي $m^2+3\equiv 0[31]$

ومنه $m^2-4\times31+3\equiv0[31]$ اي ان $m^2-121\equiv0[31]$ اي $(m-11)(m+11)\equiv0[31]$

اذن $(m+11)\equiv0[31]$ او $(m-11)\equiv0[31]$ وبالتالي : $m\equiv11[31]$ او $m\equiv-11[31]$

وبالتالي قيم m هي : $m=31k+11$ او $m=31k+20$ حيث k عدد صحيح

(5) n عدد طبيعي لا يقبل القسمة على 3

(أ) بما ان n لا يقبل القسمة على 3 فان القيم الممكنة للعدد n هي: $n=3\alpha+1$ او $n=3\alpha+2$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

(ب) اثبات ان $(5^{2n}+5^n+1)\equiv0[31]$:

من اجل $n=3\alpha+1$ فان $5^{2(n)}+5^n+1=5^{2(3\alpha+1)}+5^{(3\alpha+1)}+1=5^{6\alpha+2}+5^{3\alpha+1}+1$

و $\left(5^{3\alpha+1}\right)^2\equiv5^2[31]$ ومنه $5^{3\alpha+1}\equiv5[31]$ اذن $5^{2n}+5^n+1\equiv25+5+1[31]$ $(5^{2n}+5^n+1)\equiv0[31]$

من اجل $n=3\alpha+2$ فان : $5^{2n}+5^n+1=5^{2(3\alpha+2)}+5^{(3\alpha+2)}+1=\left(5^{(3\alpha+2)}\right)^2+5^{(3\alpha+2)}+1$

ومنه $5^{2n}+5^n+1\equiv0[31]$ اذن $5^{2n}+5^n+1\equiv25^2+25+1[31]\equiv651[31]\equiv0[31]$

التمرين(23) :

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بحدهما الاول : $u_0=3$ و $v_0=1$ ومن اجل كل n :

$u_{n+1}=2u_n-1$ و $v_{n+1}=2v_n+3$

(1)(أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل طبيعي فان : $u_n=2^{n+1}+1$

(ب)هل العددان u_n و u_{n+1} اوليان فيما بينهما ؟

(2) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 5

(ب) استنتج باقي قسمة العدد 2017^{1438} على 5

(3) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $2u_n-v_n=5$ ثم استنتج عبارة v_n بدلالة n

(4) (أ)عين القيم الممكنة للعدد : $PGCD(u_n;v_n)$

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها $PGCD(u_n;v_n)=5$

حل التمرين(23):

(1) $u_{n+1}=2u_n-1$ و $v_{n+1}=2v_n+3$ و $u_0=3$ و $v_0=1$

(أ) البرهان بالتراجع ان : $u_n=2^{n+1}+1$:

لدينا $u_0=2^1+1=3$ ومنه الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض الخاصية صحيحة من اجل كل n ونبرهن انها صحيحة من اجل $n+1$ أي نفرض ان $u_n=2^{n+1}+1$

ونبرهن ان $u_{n+1}=2^{n+2}+1$

لدينا $u_{n+1}=2u_n-1$ و $u_n=2^{n+1}+1$ ومنه $u_{n+1}=2\left(2^{n+1}+1\right)-1=2^{n+2}+2-1=2^{n+2}+1$

اذن $u_{n+1}=2^{n+2}+1$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

(ب)تبيان ان كان العددان u_n و u_{n+1} اوليان فيما بينهما :

لدينا $u_{n+1}=2u_n-1$ أي $2u_n-u_{n+1}=1$ وحسب مبرهنة بيزو فانه يوجد عددان صحيحان $(\alpha;\beta)=(2;-1)$

يحققان $\alpha u_n+\beta u_{n+1}=1$ ومنه u_n و u_{n+1} اوليان فيما بينهما

(2) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 5 :

$2^0\equiv 1[5]$, $2^1\equiv 2[5]$, $2^2\equiv 4[5]$, $2^3\equiv 3[5]$ و $2^4\equiv 1[5]$

لدينا : $2^4\equiv 1[5]$ و منه : $2^{4k}\equiv 1[5]$ و $2^{4k+1}\equiv 2[5]$ و $2^{4k+2}\equiv 4[5]$ و $2^{4k+3}\equiv 3[5]$ حيث k عدد صحيح

(ب) استنتج باقي قسمة العدد 2017^{1438} على 5 :

$2017\equiv 2[5]$ و $1438=4\times 359+2=4k+2$ ومنه $2017^{1438}\equiv 2^{1438}[5]$

وبالتالي : $2017^{1438}\equiv 2^{4k+2}[5]$ و $2^{4k+2}\equiv 4[5]$ ومنه باقي القسمة هو 4

(3) البرهن بالتراجع ان : $2u_n-v_n=5$ مع $u_{n+1}=2u_n-1$ و $v_{n+1}=2v_n+3$

من اجل $n=0$ نجد $2u_0-v_0=2(3)-1=5$ محققة اذن الخاصية صحيحة من اجل $n=0$

نفرض صحة الخاصية من اجل n ونبرهن انها صحيحة من اجل $n+1$ أي نفرض ان $2u_n-v_n=5$ ونبرهن ان $2u_{n+1}-v_{n+1}=5$

$2u_{n+1}-v_{n+1}=2(2u_n-1)-(2v_n+3)=4u_n-2v_n-5=2(2u_n-v_n)-5=2(5)-5=5$

اذن الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n أي $2u_n-v_n=5$

-استنتاج عبارة v_n بدلالة n : لدينا $2u_n-v_n=5$ ومنه $v_n=2u_n-5$ و $u_n=2^{n+1}+1$

اذن : $v_n=2\left(2^{n+1}+1\right)-5$ ومنه عبارة v_n بدلالة n : $v_n=2^{n+2}-3$

(4) (أ)تعيين القيم الممكنة للعدد : $PGCD\left(u_n;v_n\right)$ نضع : $PGCD\left(u_n;v_n\right)=d$

لدينا $2u_n-v_n=5$ و d يقسم u_n و v_n و منه d يقسم $2u_n-v_n$ وبالتالي d هو قاسم للعدد 5

أي ان القيم الممكنة للعدد $PGCD\left(u_n;v_n\right)=d$ هي 1 او 5 .

(ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها $PGCD\left(u_n;v_n\right)=5$:

هذا يعني $u_n\equiv 0[5]$ و $v_n\equiv 0[5]$ أي ان $2^{n+1}+1\equiv 0[5]$ و $2^{n+2}-3\equiv 0[5]$

وهذا يعني ان($2^{n+1}\equiv 4[5]$ و $2^{n+2}\equiv 3[5]$)

و لدينا من دراسة بواقي القسمة $2^{4k+2}\equiv 4[5]$ ومنه $2^{n+1}\equiv 4[5]$ يعني ان $k\in\mathbb{N}$ اي $n+1=4k+2$

$n=4k+1$ و بالتعويض في $2^{n+2}\equiv 3[5]$ نجد $2^{4k+3}\equiv 3[5]$ و هذه محققة في دراسة البواقي

و منه من اجل كل عدد طبيعي n يكتب على الشكل $n=4k+1$ و k عدد طبيعي يكون $PGCD\left(u_n;v_n\right)=5$

التمرين(24)

(1) (أ) عين حسب قيم العد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 7؛

(ب) استنتج باقي قسمة 2^{1962} على 7

(ج) استنتج باقي قسمة العدد $2016^{2017}+2018^{2016}$ على 7

(2) اثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $12\times 2^{3n+1}+10\times 2^{12n}+8\equiv 0[7]$

(3)نعتبر (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدودها موجبة والحد الأول $u_0=1$ بحيث : $\begin{cases} u_2+u_3=12 \\ u_2\times u_3=32 \end{cases}$

(أ)احسب كلا من u_2 ; u_3 ثم اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n ؛

(ب) اوجد باقي قسمة العدد $u_{n+1}-u_n$ على 7 من اجل $n=2017$ ؛

(ج) اثبت ان : $PGCD(u_{n+1};u_n)=2^n$ من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , ثم استنتج بطريقة أخرى قيمتي كلا من u_2 ; u_3 .

حلالتمرين(24)

(1) (أ) بواقي قسمة 2^n على 7 :

$2^0\equiv 1[7]$; $2^1\equiv 2[7]$; $2^2\equiv 4[7]$, $2^3\equiv 1[7]$

و منه من العلاقة $2^3\equiv 1[7]$ و حسب خواص الموافقات لدينا :

$\left(2^3\right)^P=2^{3p}\equiv 1[7]$ من أجل كل عدد طبيعي p .

لكن: $2\equiv 2[7]$ و عليه: $2^{3p}\times 2\equiv 1\times 2[7]$ إذن: $2^{3p+1}=2[7]$

و كذلك : $2^2\equiv 4[7]$ و عليه : $2^{3p}\times 2^2\equiv 1\times 4[7]$ إذن : $2^{3p+2}\equiv 4[7]$

و بالتالي لما $n=3p$: $2^n\equiv 1[7]$ و لما $n=3p+1$: $2^n\equiv 2[7]$ و لما $n=3p+2$: $2^n\equiv 4[7]$

(ب) استنتاج باقي قسمة 2^{1962} على 7 :

لدينا : $1962=3\times 654$ و منه : $1962=3p$ و منه : $2^{1962}\equiv 1[7]$

(ج)- لدينا : $2016=3\times 672=3k$ و $2017=3\times 672+1=3k+1$

ولدينا أيضا $2018\equiv 2[7]$ و $2016\equiv 0[7]$ ومنه باستخدام خواص الموافقة نجد:

$2016^{2017}+2018^{2016}\equiv 0+2^{3k}[7]$ اذن $2016^{2017}+2018^{2016}\equiv 1[7]$

ومنه باقي قسمة العدد $2018^{2016}+2016^{2017}$ على 7 هو 1

(2)- إثبات أن : $12\times 2^{3n+1}+10\times 2^{12n}+8\equiv 0[7]$

لدينا: $12\equiv 5[7]$ و $2^{3n+1}\equiv 2[7]$ و عليه: $12\times 2^{3n+1}\equiv 2\times 5[7]$

ونعلم ان $10\equiv 3[7]$ إذن : $12\times 2^{3n+1}\equiv 3[7]$ ...(1)

و لدينا : $2^{12n}=\left(2^{3n}\right)^4$ وبما أن : $2^{3n}\equiv 1[7]$ فإن: $\left(2^{3n}\right)^4\equiv (1)^4[7]$ أي: $2^{12n}\equiv 1[7]$ ...(2)

و بالتالي من (1) و (2) نجد: $12\times 2^{3n+1}+10\times 2^{12n}+8\equiv 3+3\times 1+8[7]$

إذن : $12\times 2^{3n+1}+10\times 2^{12n}+8\equiv 0[7]$.

(3)-(أ)حساب الحدين u_2 ; u_3 : من الجملة $\begin{cases} u_2+u_3=12 \\ u_2\times u_3=32 \end{cases}$ نجد بتعويض $u_3=12-u_2$ المعادلة التالية :

$u_2^{\,2}-12u_2+32=0$ مميزها 16 ومنه الحلان: $u_2=4$ او $u_2'=8$

ومنه $u_3=12-4=8$ او $u_3'=12-8=4$ وبما ان المتتالية متزايدة فان $u_2=4$ و $u_3=8$

عبارة الحد العام u_n بدلالة n : تعيين الأساس : $q=\dfrac{8}{4}=2$ ومنه $u_3=u_2\times q$

اذن عبارة الحد العام هي : $u_n=2^n$

(ب)إيجاد باقي قسمة $u_{n+1}-u_n$ على 7 من أجل $n=2017$:

بالحساب نجد $u_{n+1}-u_n=2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=2^n$

من أجل $n=2017$ يكون $2^n=2^{2017}=2^{3(672)+1}=2^{3k+1}$ و $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ وبالتالي باقي قسمة $u_{n+1}-u_n$ على 7 هو 2

(ج) اثبات ان : $PGCD(u_{n+1};u_n)=2^n$: لدينا (u_n) متتالية هندسية واساسها 2 ومنه $u_{n+1}=2\times u_n$

وباستخدام خاصية $pgcd$.نجد. $pgcd(u_{n+1},u_n)=pgcd(2u_n,u_n)=u_n\times pgcd(2,1)=u_n=2^n$

- إستنتاج بطريقة أخري قيمتي كلا من u_2 ; u_3 :.

من اجل $n=2$ نكتب $pgcd(u_3,u_2)=2^2=4$ و لدينا $u_2+u_3=12$ ومنه يوجد عددان α و β اوليان فيما بينهما حيث $4\alpha+4\beta=12$ أي $\alpha+\beta=3$ وبالتالي $\alpha=1$ و $\beta=2$ لان المتتالية متزايدة

اذن $u_2=4\alpha=4$ و $u_3=4\beta=8$

التمرين(25) :

1) نعتبر في مجموعة الاعداد الصحيحة المعادلة : $3x-7y=14....(1)$

(أ) بين ان الثنائية $(7,1)$ حلا للمعادلة (1) .

(ب) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) .

(ج) ما هي القيم الممكنة لـ $(x;y)$ حتى يكون y قاسما لـ x ؟

(2) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7 .

(ب) ما هو باقي قسمة العدد $3\times 4^{2010}-2\times 4^{1945}$ على 7 ؟ .

(3) ليكن العدد الطبيعي A_n حيث : $A_n=4^n-n+1$.

(أ) عين قيم n حتى يقبل A_n القسمة على 7 .

(ب) استنتج باقي قسمة $A_{2010}-A_{2009}$ على 7 .

حل التمرين(25) :

(1) (أ) تباين ان الثنائية $(7,1)$ حل للمعادلة $3x-7y=14....(1)$:.

$3(7)-7(1)=21-7=14$ واضح

(ب) تعيين $(x;y)$ حلول المعادلة : ادينا $\begin{cases}3x-7y=14\\3(7)-7(1)=14\end{cases}$ بالطرح نجد : $3(x-7)=7(y-1)$

7 يقسم $3(x-7)$ وبما ان 7 اولي مع 3 فانه حسب مبرهنة غوص7 يقسم $(x-7)$ أي ان $x-7=7k$ ومنه $x=7+7k$ حيث k عدد صحيح

وبالتعويض في $3(x-7)=7(y-1)$ نجد $y-1=3k$ أي $y=1+3k$

اذن حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)=(7k+7;3k+1)$

(ج) القيم الممكنة لـ $(x;y)$ حتى يكون y قاسما لـ x : هذا يعني x يقبل القسمة على y اي $x\equiv 0[y]$

وهذا يكافئ $7k+7\equiv 0[3k+1]$ وبما ان $y\equiv 0[y]$ نجد الجملة التالية : $\begin{cases}7k+7\equiv 0[3k+1]\\3k+1\equiv 0[3k+1]\end{cases}$

ومنه نجد $\begin{cases}3(7k+7)\equiv 0[3k+1]\\7(3k+1)\equiv 0[3k+1]\end{cases}$ وبالطرح نحصل على : $14\equiv 0[3k+1]$ اي 14 يقبل القسمة على $3k+1$ اي ان $3k+1\in D_{14}=\{-1;-2;-7;-14;1;2;7;14\}$ ومنه نحصل على النتائج التالية في هذا الجدول

$3k+1$	1	-1	2	-2	7	-7	14	-14
k	0			-1	2			-5
$(x;y)$	$(7;1)$			$(0;-2)$	$(21;7)$			$(-28;-14)$

(2) (أ) بواقي قسمة العدد 4^n على 7 :

$4^0\equiv 1[7]$, $4^1\equiv 4[7]$, $4^2\equiv 2[7]$, $4^3\equiv 1[7]$

ومنه من اجل كل عدد طبيعي k : $4^{3k}\equiv 1[7]$ و $4^{3k+1}\equiv 4[7]$ و $4^{3k+2}\equiv 2[7]$

(ب) تعيين باقي قسمة العدد $3\times 4^{2010}-2\times 4^{1945}$ على 7 :

لدينا $2010=3\times 670=3k$ و $1945=3\times 648+1=3m+1$

ومما سبق ينتج : $3\times 4^{2010}-2\times 4^{1945}\equiv 3\times 4^{3k}-2\times 4^{3m+1}[7]$ اي

$3\times 4^{2010}-2\times 4^{1945}\equiv 3\times 1-2\times 4[7]$ اذن $3\times 4^{2010}-2\times 4^{1945}\equiv 2[7]$

ومنه باقي قسمة العدد $3\times 4^{2010}-2\times 4^{1945}$ على 7 هو 2

(3) (أ) تعيين قيم n حتى يقبل A_n القسمة على 7 : اي $A_n=4^n-n+1\equiv 0[7]$.

$4^n-n+1\equiv 0[7]$

- اذا كان $n=3k$ فان $4^{3k}-(3k)+1\equiv 0[7]$ تعني $3k\equiv 2[7]$ ومنه $15k\equiv 10[7]$ وباتالي $k\equiv 3[7]$

اذن $k=7\alpha+3$ وبالتالي : $n=3(7\alpha+3)=21\alpha+9$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$

- اذا كان $n=3k+1$ فان $4^{3k+1}-(3k+1)+1\equiv 0[7]$ تعني $3k\equiv 4[7]$ ومنه $15k\equiv 20[7]$ اذن $k\equiv 6[7]$ ومنه $k=7\alpha+6$ وبالتالي : $n=3(7\alpha+6)+1=21\alpha+19$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$

- اذا كان $n=3k+2$ فان $4^{3k+2}-(3k+2)+1\equiv 0[7]$ تعني $3k\equiv 1[7]$ ومنه $15k\equiv 5[7]$ اذن $k\equiv 5[7]$ ومنه $k=7\alpha+5$ وبالتالي : $n=3(7\alpha+5)+2=21\alpha+17$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$

(ب) استنتاج باقي قسمة $A_{2010}-A_{2009}$ على 7 :

لدينا $2009=21\times 95+4=21p+4$ و $2010=21\times 95+5=21p+5$

ومنه $A_{2009}\equiv 4[7]$ و $A_{2010}\equiv 5[7]$ اذن $A_{2010}-A_{2009}\equiv 5-4[7]$ اي $A_{2010}-A_{2009}\equiv 1[7]$

اذن باقي قسمة $A_{2010}-A_{2009}$ على 7 هو 1

التمرين(26)

(1)حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $3x-2y=1$ ... (1)

(2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم

(أ) بين ان الثنائية $(14n+3;21n+4)$ حل للمعادلة (1)

(ب) استنتج ان العددين $21n+4$ و $14n+3$ اوليان فيما بينهما

(3) ليكن d هو القاسم المشترك الاكبر للعددين $21n+4$ و $2n+1$

(أ) عين القيم الممكنة للعدد d

(ب) بين انه اذا كان $d=13$ فان $n\equiv 6[13]$

(4) من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 2$ نضع : $A=21n^2-17n-4$ و $B=28n^3-8n^2-17n-3$

(أ) بين ان العددين A و B يقبلان في $\mathbb{Z}$ القسمة على $n-1$

(ب) عين حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين A و B

حل التمرين(26):

(1) حل المعادلة $3x-2y=1$: واضح ان الثنائية $(1,1)$ حل لها ومنه ينتج :

$\begin{cases}3x-2y=1\\3(1)-2(1)=1\end{cases}$ وبالطرح نجد : $3(x-1)=2(y-1)$ وهذه تعني 2 يقسم $3(x-1)$

وبما ان 2 لا يقسم العدد 3 فانه حسب غوص 2 يقسم $(x-1)$ ومنه $(x-1)=2k$ وبالتالي : $x=2k+1$

ونعوض في $3(x-1)=2(y-1)$ نجد $y=3k+1$

(2) (أ) تبيان ان $(14n+3;21n+4)$ حل للمعادلة (1) :

نعوض نجد $3x-2y=3(14n+3)-2(21n+4)=1$

(ب) استنتاج ان العددين $21n+4$ و $14n+3$ اوليان فيما بينهما :

بما ان $(14n+3;21n+4)$ حل للمعادلة فان $3(14n+3)-2(21n+4)=1$ اي انه يوجد عددان $u=3$ و $v=-2$ صحيحان يحققان $u(14n+3)+v(21n+4)=1$ ومنه حسب مبرهنة بيزو العددان $21n+4$

و $14n+3$ اوليان فيما بينهما

(3) (أ) تعيين القيم الممكنة للعدد d حيث $d=PGCD(21n+4;2n+1)$

هذا يعني($d/21n+4$ و $d/2n+1$) ومنه $d/\left(21(2n+1)-2(21n+4)\right)$ اي ان $d/13$

وبالتالي القيم الممكنة للعدد d هي 1 او 13

(ب) تبيان انه اذا كان $d=13$ فان $n\equiv 6[13]$:

$d=13$ تعني $\begin{cases}21n+4\equiv 0[13]\\2n+1\equiv 0[13]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}8n+4\equiv 0[13]\\2n\equiv 12[13]\end{cases}$ ومنه نجد أيضا $\begin{cases}8n\equiv 9[13]\\2n\equiv 12[13]\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}8n\equiv 9+3(13)[13]\\2n\equiv 12[13]\end{cases}$ اي $\begin{cases}8n\equiv 48[13]\\2n\equiv 12[13]\end{cases}$ اذن نستنتج $n\equiv 6[13]$

(4) $A=21n^2-17n-4$ و $B=28n^3-8n^2-17n-3$ حيث $n\geq 2$

(أ) تبيان ان A و B يقبلان القسمة على $n-1$:

بقسمة A على $n-1$ نجد : $A=21n^2-17n-4=(n-1)(21n+4)$

و بقسمة B على $n-1$ نجد : $B=28n^3-8n^2-17n-3=(n-1)\left(28n^2+20n+3\right)$

وهذا يعني A و B يقبلان القسمة على $n-1$

(ب) تعيين حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين A و B :

$PGCD(A;B)=PGCD\left((n-1)(21n+4);(n-1)\left(28n^2+20n+3\right)\right)$ ومنه من خواص القاسم

المشترك الاكبر نجد : $PGCD(A;B)=(n-1)\times PGCD\left((21n+4);\left(28n^2+20n+3\right)\right)$ ومنه

$PGCD(A;B)=(n-1)\times PGCD\left((21n+4);(14n+3)(2n+1)\right)$

وبما ان العددين $21n+4$ و $14n+3$ اوليان فيما بينهما حسب السؤال (2)(ب) فاننا نستنتج ان :

$PGCD(A;B)=(n-1)\times PGCD\left((21n+4);(2n+1)\right)$

ومن السؤال(3) (أ) وجدنا ان القيم الممكنة لـ $PGCD(21n+4;2n+1)$ هي 1 او 13 ومنه نستنتج ان:

$PGCD(A;B)=(n-1)\times 13$ اذا كان $n\equiv 6[13]$ أي $n=13k+6$

و $PGCD(A;B)=(n-1)$ اذا كان $n\neq 13k+6$

التمرين(27)

نعتبر المتتالية (u_n) التي حدها الأول $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n+4n-4$

(1) هل المتتالية حسابية ؟ هل هي هندسية ؟ برر اجابتك

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n+\alpha n+\beta$

(أ)عين العددين الحقيقيين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

(ب) أكتب v_n ثم u_n بدلالة n

(ج) احسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$

(3) (أ)ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 13

(ب) استنتج باقي قسمة العدد S_{2016} على 13

(ج) عين باقي قسمة العدد $2014^{1435}+2015^{1436}+2016^{1437}+2018^{1438}$ على 13

حل التمرين(27)

$u_{n+1}=3u_n+4n-4$

(1) تكون المتتالية (u_n) حسابية اذا تحقق : $u_{n+1}-u_n=r$

لكن $u_{n+1}-u_n=3u_n+4n-4-u_n=2u_n+4n-4$ ليس ثابت وبالتالي ليست حسابية

و $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3u_n+4n-4}{u_n}=3+\frac{4n-4}{u_n}$ وهو متعلق بالعدد n وبالتالي ليست هندسية

(2) $v_n=u_n+\alpha n+\beta$ و $3u_n+4n-4$

(أ)تعيين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية :

$v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=3u_n+4n-4+\alpha n+\alpha+\beta$ ومنه $v_{n+1}=3u_n+4n-4+\alpha n+\alpha+\beta$

ولدينا $u_n=v_n-\alpha n-\beta$ ومنه

$v_{n+1}=3(v_n-\alpha n-\beta)+4n-4+\alpha n+\alpha+\beta=3v_n+(4-2\alpha)n+(\alpha-2\beta-4)$

وبالتالي تكون (v_n) هندسية اذا كان $(4-2\alpha)n+(\alpha-2\beta-4)=0$ من اجل كل n

أي اذا كان $(4-2\alpha)=0$ و $(\alpha-2\beta-4)=0$ ومنه نجد $\boxed{\alpha=2}$ و $\boxed{\beta=-1}$

اذن من اجل القيم $\alpha=2$ و $\beta=-1$ تكون (v_n)هندسية اساسها 3 وحدها الاول : $v_0=u_0+2(0)+(-1)=1$

(ب) كتابة v_n و u_n بدلالة n :

$v_n=v_0\times q^n=3^n$ و $u_n=v_n-\alpha n-\beta$ ومنه $u_n=3^n-2n+1$

(ج) حساب المجموع : $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$

ومنه $S_n=u_0+u_1+.....+u_n=(3^0-2(0)+1)+(3^1-2(1)+1)+...+(3^n-2n+1)$

ومنه $S_n=(3^0+3^1+...+3^n)-2(0+1+...+n)+...+\underbrace{(1+1+...+1)}_{n+1}$

أي $S_n=1\frac{3^{n+1}-1}{3-1}-2\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$ $S_n=\frac{3^{n+1}-1}{2}-n^2+1$

(3) (أ)دراسة بواقي قسمة العدد 3^n على 13 :

$3^0\equiv 1[13]$ و $3^1\equiv 3[13]$ و $3^2\equiv 9[13]$ و $3^3\equiv 1[13]$ بواقي القسمة هي متتالية دورية ودورها 3

من اجل كل عدد طبيعي k : $3^{3k}\equiv 1[13]$ و $3^{3k+1}\equiv 3[13]$ و $3^{3k+2}\equiv 9[13]$

(ب) استنتاج باقي قسمة العدد S_{2016} على 13 :

لدينا $S_{2016}=\frac{3^{2017}-1}{2}-(2016)^2+1$ ولدينا $2016\equiv 1[13]$ ومنه $2016^2\equiv 1[13]$

و $2017=3(672)+1=3m+1$ وبالتالي $3^{2017}\equiv 3^{3m+1}[13]\equiv 3[13]$ ومنه $3^{2017}-1\equiv 2[13]$

اذن $\frac{3^{2017}-1}{2}\equiv 1[13]$ وبالتالي : $S_{2016}\equiv 1-1+1[13]$ اذن $S_{2016}\equiv 1[13]$ اذن الباقي هو 1

(ج) تعيين باقي قسمة العدد $2014^{1435}+2015^{1436}+2016^{1437}+2018^{1438}$ على 13

لدينا $2014\equiv -1[13]$ و $2015\equiv 0[13]$ و منه $2014^{1435}\equiv -1[13]$ و $2015^{1436}\equiv 0[13]$

و $2016\equiv 1[13]$ و منه $2016^{1437}\equiv 1[13]$

و $2018\equiv 3[13]$ و $1438=3(479)+1$ ومنه $2018^{1438}\equiv 3^{3m+1}[13]\equiv 3[13]$

ومنه بالجمع نجد : $2014^{1435}+2015^{1436}+2016^{1437}+2018^{1438}\equiv -1+0+1+3[13]$ اذن الباقي هو 3

التمرين(28)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E).....(x+1)^2=9+5y$.

(1) بين انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فان $x\equiv 1[5]$ او $x\equiv 2[5]$.

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

3) بين انه ، اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $PGCD(x;y)$ يقسم 8 .

4) حل في $\mathbb{Z}^2$ الجملة : $\begin{cases}\overline{121}^x=\overline{59}^y\\ PGCD(x;y)=8\\ x\equiv 1[5]\end{cases}$.

حل التمرين(28)

(1) تبيان ان $x\equiv 1[5]$ او $x\equiv 2[5]$ حيث $(x+1)^2=9+5y$

$(x+1)^2=9+5y$ معناه $(x+1)^2\equiv 9[5]$ أي $(x+1)^2\equiv 4[5]$

نعلم ان كل عدد صحيح يكتب على الشكل : $5k$ او $5k+1$ او $5k+2$ او $5k+3$ او $5k+4$

$x\equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$x+1\equiv$	1	2	3	4	0	$[5]$
$(x+1)^2\equiv$	1	4	4	1	0	$[5]$

$(x+1)^2\equiv 4[5]$ معناه $x\equiv 1[5]$ او $x\equiv 2[5]$

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E):

اذا كان $x\equiv 1[5]$ أي $x=5k+1$ لدينا $(5k+1+1)^2=9+5y$ و منه $25k^2+20k+4=9+5y$

يكافئ $5y=25k^2+20k-5$ أي $y=5k^2+4k-1$ و عليه $(x;y)\in(5k+1,5k^2+4k-1)$

اذا كان $x\equiv 2[5]$ أي $x=5k+2$ لدينا $(5k+2+1)^2=9+5y$ ومنه $25k^2+30k+9=9+5y$

يكافئ $5y=25k^2+30k$ أي $y=5k^2+6k$ و عليه $(x;y)\in(5k+2,5k^2+6k)$.

(3) تبيان انه اذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $PGCD(x;y)$ يقسم 8 .

لدينا $(x+1)^2=9+5y$ تكافئ $x^2+2x+1=9+5y$ ومنه $x^2+2x-5y=8$ أي $x(x+2)-5y=8$

نسمي $PGCD(x;y)=d$, ومنه d يقسم x ويقسم y وبالتالي يقسم $x(x+2)$ و يقسم $5y$

ومنه نستنتج ان d يقسم $x(x+2)-5y$ اذن d يقسم 8

4) حل في $\mathbb{N}^2$ الجملة : $(1)\begin{cases}\overline{121}^x=\overline{59}^y\\PGCD(x;y)=8\\x\equiv 1[5]\end{cases}$.

(1) تكافئ $\begin{cases}1\times x^0+2x+1\times x^2=9\times y^0+5y\\PGCD(x;y)=8\\x=5k+1\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}1+2x+x^2=9+5y\\PGCD(x;y)=8\\x=5k+1\end{cases}$ أي

$\begin{cases}(x+1)^2=9+5y....(E)\\PGCD(x;y)=8\\x=5k+1\end{cases}$ و عليه $\begin{cases}x=5k+1\\y=5k^2+4k-1\\PGCD(x;y)=8\end{cases}$.

$PGCD(x;y)=8$ يعني ($x\equiv 0[8]$ و $y\equiv 0[8]$) ومنه $5k+1\equiv 0[8]$ اي $5k\equiv -1[8]$ و معناه

$25k\equiv -5[8]$ اذن $24k+k\equiv 3[8]$ أي $k\equiv 3[8]$ ومنه $k=8\alpha+3$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$

و بالتالي $\begin{cases}x=5(8\alpha+3)+1\\y=5(8\alpha+3)^2+4(8\alpha+\alpha)-1\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=40\alpha+16\\y=320\alpha^2+272\alpha+56\end{cases}$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$.

التمرين(29)

(I) (1) – ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .

(2)– استنتج باقي قسمة العدد 3^{2015} على 10 .

(3)– بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^{4n+1}+2011^n+2009^{2n}+1$ مضاعف للعدد 10.

(4) – جد مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث : $13^{4n+1}+3n\equiv 0[10]$.

(Π)(1)– حل المعادلة التفاضلية التالية : $y'=(\ln 3)y$

(2)– نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة والذي يحقق $f(0)=1$ بيّن أنّ $f(x)=3^x$

(3) ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(4) ماهو رقم احاد العدد $f(1432)+f(2011)$

(5) نعتبر المجموع S_n ، حيث $S_n = f(0)+f(1)+...+f(n)$

– احسب S_n ، ثمّ جد مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $2Sn$ يقبل القسمة على10

<u>حل التمرين(29) :</u>

(I) (1) – دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .

لدينا $3^0 \equiv 1[10]$ ، $3^1 \equiv 3[10]$ ، $3^2 \equiv 9[10]$ أي $3^2 \equiv -1[10]$ ومنه $3^4 \equiv 1[10]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي k: $3^{4k} \equiv 1[10]$ ، $3^{4k+1} \equiv 3[10]$ ، $3^{4k+2} \equiv 9[10]$ ، $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة 3^n على10	1	3	9	7

(2)– استنتاج باقي قسمة العدد 3^{2015} على 10 :

لدينا $2015 = 4\times 503+3$ إذن $3^{2015} \equiv 7[10]$.

(3)– تبيّان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^{4n+1}+2011^n+2009^{2n}+1$ مضاعف للعدد 10.

لدينا $7 \equiv -3[10]$ ومنه $7^{4n+1} \equiv (-3)^{4n+1}[10]$ أي $7^{4n+1} \equiv -3^{4n+1}[10]$ وعليه $7^{4n+1} \equiv -3[10]$

ولدينا $2011 \equiv 1[10]$ ومنه $2011^n \equiv 1^n[10]$ أي $2011^n \equiv 1[10]$

ولدينا $2009 \equiv -1[10]$ ومنه $2009^{2n} \equiv (-1)^{2n}[10]$ أي $2009^{2n} \equiv 1[10]$

إذن $7^{4n+1}+2011^n+2009^{2n}+1 \equiv -3+1+1+1[10]$ أي $7^{4n+1}+2011^n+2009^{2n}+1 \equiv 0[10]$

وبالتالي من اجل كل عدد طبيعي n العدد $7^{4n+1}+2011^n+2009^{2n}+1$ مضاعف للعدد 10 .

(4) – ايجاد مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث : $13^{4n+1}+3n \equiv 0[10]$.

$13^{4n+1}+3n \equiv 0[10]$ معناه $3^{4n+1}+3n \equiv 0[10]$ ومنه $3+3n \equiv 0[10]$ أي $3(1+n) \equiv 0[10]$

لدينا العددان 3 و10 اوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص $1+n \equiv 0[10]$ يكافئ $n \equiv -1[10]$

أي $n \equiv 9[10]$ وعليه $n = 10k+9$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

(Π)(1)– حل المعادلة التفاضلية التالية : $y' = (\ln 3)y$.....(1)

المعادلة (1) من الشكل $y' = ay$ حلولها هي دوال من الشكل $x \mapsto ce^{ax}$

ومنه $y = ce^{x\ln 3}$ أي $y = c\times 3^x$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

(2)– نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة والذي يحقق $f(0)=1$

تبيان انّ: $f(x)=3^x$: $f(x) = c\times 3^x$ مع $f(0)=1$

$f(0)=1$ معناه $c\times 3^0 = 1$ ومنه $c=1$ وعليه $f(x)=3^x$.

(3) دراسة تغيرات الدالة f

لدينا $f(x)=3^x=e^{x\ln 3}$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln 3} = \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln 3} = \lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$$

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x) = (\ln 3)e^{x\ln 3}$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) \succ 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

(4) رقم احاد العدد $f(1432)+f(2011)$:

لدينا $f(1432)+f(2011)=3^{1432}+3^{2011}$ و $1432=3\times 358$ إذن $3^{1432}\equiv 1[10]$

و $2011=3\times 502+3$ إذن $3^{2011}\equiv 7[10]$

وعليه $3^{1432}+3^{2011}\equiv 1+7[10]$ أي $f(1432)+f(2011)\equiv 8[10]$

وبالتالي رقم احاد العدد $f(1432)+f(2011)$ هو 8 .

(5) نعتبر المجموع S_n ، حيث $S_n=f(0)+f(1)+...+f(n)$

-حساب S_n : $S_n=f(0)+f(1)+...+f(n)=3^0+3^1+...+3^n$

S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدَها الأول 1 .

اذن $S_n=\dfrac{3^{n+1}-1}{3-1}=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

- إيجاد مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $2S_n$ يقبل القسمة على10

$2S_n\equiv 0[10]$ تعني $3^{n+1}-1\equiv 0[10]$ وتكافئ $3^{n+1}\equiv 1[10]$ ومنه $n+1=4k$ أي $n=4k-1$ حيث $k\in\mathbb{N}^*$.

التمرين(30):

من أجل كل عدد صحيح n نضع: $A(n)=n^2-n+2007$

(1)(أ) حلل إلى جداء عوامل أولية العددين 4014 و $A(1)$

(ب)عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 4014و $A(1)$

(2) بين أنه إذا كان3 يقسم n فإن 3 يقسم $A(n)$. هل العكس صحيح؟ برر إجابتك .

(3)(أ) تحقق أنه من أجل كل عدد صحيح n : $(n+1)^2-(n+1)+2007=(n^2-n+2007)+2n$

(ب) بين أنه إذا كان $A(n)$ عددا فرديا فإن $A(n+1)$ عدد فردي .

(4) عين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $A(n)$ يقسم $A(1)$

حل التمرين(30):

لدينا $A(n)=n^2-n+2007$

(1)(أ) التحليل إلى جداء عوامل أولية :

$A(1)=2007=3^2\times223$ $4014=2A(1)=2\times3^2\times223$

(ب) تعيين: $PGCD(4014;A(1))$:

$PGCD(A(1);4014)=PGCD(A(1);2\times A(1))=A(1)$

(2) إذا كان3 يقسم n فإن 3 يقسم n^2 وكذلك 3 يقسم $-n$ ونعلم أيضا ان $2007=3\times669$

وبالتالي 3 يقسم $A(n)$. وبالتالي إذا كان3 يقسم n فإن 3 يقسم $A(n)$

هل العكس صحيح؟

- العكس غير صحيح و التبرير: $A(4)=4^2-4+2007=2019$.

3 يقسم $A(n)$ من أجل $n=4$ ($A(4)=4^2-4+2007=2019=3\times673$) لكن 3 لا يقسم 4.

(3)(أ) التحقق من صحة العلاقة : بالحساب نجد :

$(n+1)^2-(n+1)+2007=n^2+2n+1-n-1+2007=(n^2-n+2007)+2n$

(ب). نبين أنه إذا كان $A(n)$ عددا فرديا فإن $A(n+1)$ عدد فردي :

إذا كان $A(n)$ فرديا فإنه يوجد عدد صحيح k حيث: $A(n)=2k+1$

ومنه: $A(n+1)=(n+1)^2-(n+1)+2007$ أي أن

$A(n+1)=A(n)+2n=2k+1+2n=2(k+n)+1$

نضع: $k'=k+n$ ومنه: $A(n+1)=2k'+1$ ، k' عدد صحيح وهذا يعني $A(n+1)$ فردي

إذن: إذا كان $A(n)$ عددا فرديا فإن $A(n+1)$ عدد فردي.

(4).تعيين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $A(n)$ يقسم $A(1)$:

$A(n)$ يقسم $A(1)$ معناه $(n^2-n+2007)$ يقسم 2007 ،

مجموعة قواسم 2007 هي: $\{-2007;-669;-223;-9;-3-1;1;3;9;223;669;2007\}$

$(n^2-n+2007)$ يقسم 2007 معناه $n^2-n+2007=-1$ أو $n^2-n+2007=1$

أو $n^2-n+2007=2007$ أو $n^2-n+2007=-2007$ أو $n^2-n+2007=669$

أو $n^2-n+2007=-669$ أو $n^2-n+2007=9$ أو $n^2-n+2007=-9$

أو $n^2-n+2007=223$ أو $n^2-n+2007=-223$

كل هذه المعادلات لا تقبل حلا الا المعادلة $n^2-n+2007=2007$ ومنه $n^2-n=0$ اذن $n=0$ او $n=1$

التمرين(31)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة الآتية : (E) .....$11x-5y=2$

(1) (أ) برهن أن إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv4[11]$.

(ب) * استنتج حلول المعادلة (E)

(2) ليكن n عددا طبيعي غير معدوم ، نضع $a=5n+2$ و $b=11n+4$

(أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

(ب) عين قيم n بحيث يكون $PGCD(a,b)=2$.

(ج) استنتج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما

(3)(أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10.

(ب) استنتج رقم آحاد العدد 7^{2014}.

(ج) عين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ التي هي حلول للمعادلة (E) و تحقق $7^{y-2x}\equiv 9[10]$.

حل التمرين(31)

(1)/ (أ) إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4[11]$.

لدينا (E) تكافئ $-5y\equiv 2[11]$ ومنه $6y\equiv 2[11]$

إذن $2\times 6y\equiv 2\times 2[11]$ ومنه $y\equiv 4[11]$

(ب) استنتاج حلول المعادلة (E)

مما سبق لدينا $y\equiv 4[11]$ ومنه $y=11k+4$ ،بالتعويض في المعادلة (E) نجد $x=5k+2$

إذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث $\begin{cases}x=5k+2\\y=11k+4\end{cases}/(k\in\mathbb{Z})$

(2)(أ) تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

نفرض أن $PGCD(a,b)=d$ إذن d يقسم a و d يقسم b ومنه d يقسم $11a-5b$

ومنه نستنتج أن d يقسم 2 إذن $d\in\{1;2\}$

(ب) تعيين قيم n بحيث يكون $PGCD(a,b)=2$

لدينا $PGCD(a,b)=2$ ومنه 2 يقسم a و 2 يقسم b ومنه 2 يقسم $b-2a$ إذن 2 يقسم $(11n+4)-2(5n+2)$

أي 2 يقسم n ومنه قيم n المطلوبة هي $n=2\alpha\ /\alpha\in\mathbb{N}^*$ (أي n عدد طبيعي زوجي)

(ج) استنتاج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما

a و b أوليان فيما بينهما معناه $PGCD(a,b)=1$

وهذا يكافئ $PGCD(a,b)\neq 2$ ومنه قيم n المطلوبة هي $n=2\alpha+1\ /\alpha\in\mathbb{N}^*$ (أي عدد طبيعي فردي)

(3)(أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10.

n	$4k'$	$4k'+1$	$4k'+2$	$4k'+3$
البواقي	1	7	9	3

(ب) استنتاج رقم آحاد العدد 7^{2014}.

رقم آحاد العدد 7^{2014} هو باقي قسمته على 10

لدينا $2014=4\times503+2$ ومنه 2014 يكتب على الشكل $4k'+2$

إذن حسب الجواب السابق رقم آحاد العدد 7^{2014} هو 9

(ج) تعيين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق : $7^{y-2x}\equiv 9[10]$

لدينا $7^{y-2x}=7^{11k'+4-10k'-4}=7^{k'}$ و منه $7^{y-2x}\equiv 9[10]$ تكافئ $7^{k'}\equiv 9[10]$

ومنه $k'=4\lambda+2$

ومنه الحلول هي : $/(k\in\mathbb{Z})$ $\begin{cases}x=5(4\lambda+2)+2=20\lambda+12\\ y=11(4\lambda+2)+4=44\lambda+26\end{cases}$

التمرين(32) :

(1) (أ) عين عددين صحيحين u و v بحيث : $8u-81v=1$

(ب) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $8x-81y=65$

(ج) عين اصغر عدد طبيعي n بحيث : $\begin{cases}n\equiv 5[8]\\ n\equiv 70[81]\end{cases}$

(2) عين عددين طبيعيين a و b يحققان : $\begin{cases}8a-81b=65\\ PPCM(a;b)=480\end{cases}$

حل التمرين(32) :

(1) (أ) تعيين u و v بحيث : $8u-81v=1$

واضح ان الثنائية $(u;v)=(-10;-1)$ حل لها لان : $8(-10)-81(-1)=1$

(ب) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $8x-81y=65$

من السؤال (أ) نجد أن الثنائية : $(x_0;y_0)=(65(-10);65(-1))=(-650;-65)$ حل لها

لدينا اذن : $\begin{cases}8x-81y=65\\ 8x_0-81y_0=65\end{cases}$ ومنه $8(x-x_0)=81(y-y_0)$

8 يقسم $81(y-y_0)$ وبما ان $8\wedge 81=1$ (8اولي مع 81) فان 8 يقسم $(y-y_0)$ ومنه $y-y_0=8k$

اذن $y=8k+y_0$

وبالتعويض في المعادلة نجد : $8(x-x_0)=81(8k)$ ومنه $x-x_0=81k\Rightarrow x=81k+x_0$

اذن حلول المعادلة هي : $\begin{cases} x = 81k + x_0 = 81k - 650 \\ y = 8k + y_0 = 8k - 65 \end{cases}$

التحقق : $8(81k-650)-81(8k-65)=65$

(ج) تعيين اصغر عدد طبيعي n :

$\begin{cases} n \equiv 5[8] \\ n \equiv 70[81] \end{cases}$ تعني $\begin{cases} n = 5+8p \\ n = 70+81p' \end{cases}$ ومنه $5+8p = 81p'+70$ أي ان $8p-81p'=65$ حلولها هي حلول المعادلة السابقة : $(p;p') = (81k-650;8k-65)$

$n = 5+8\left(\underbrace{81k-650}_{m}\right)$ وبالتالي : $n \equiv 5[8]$

$n = 70+81p'$ أي $n = 70+81\left(\underbrace{8k-65}_{k}\right)$ اذن $n = 70+81(8k-65) \Leftrightarrow n = 648k-5195$

ومنه $n = 648k-8(648)-11 = 648k+637$ اذن $n \equiv -11[648]$ أي $n \equiv 637[648]$ اذن

$n = 648k + 637$

وبما ان $n \in \mathbb{N}$ فان $648k+637 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \dfrac{-637}{648}$ اذن $k = 0$

ومنه الحل هو : $S_{\mathbb{N}} = \{637\}$

(2) تعيين عددين طبيعيين a و b يحققان : $\begin{cases} 8a-81b = 65 \\ PPCM(a;b) = 480 \end{cases}$

ليكن $d = PGCD(a;b)$ ومنه d يقسم $8a$ ويقسم $81b$ وبالتالي يقسم $8a-81b=65$

اذن d يقسم 65 ومنه $d \in \{1\ ;\ 5\ ;\ 13\ ;\ 65\}$ (العددان a و b غير اوليين فيما بينهما اذن $d \neq 1$)

ولدينا ايضا d يقسم $PPCM(a;b) = 480$ والعدد 5 يقسم 480 بينما 13 و 65 لا يقسمان 480

اذن $d = 5$ و بالتالي 5 يقسم a و b ومنه $a \equiv 0[5]$, $b \equiv 0[5]$ حيث:

$(a = 81k-650 \quad ; b = 8k-65)$

$81k-650 \equiv 0[5]$ أي $81k \equiv 650[5]$ أي $k(16\times 5+1) \equiv 0[5]$ اذن $1k \equiv 16\times 5[5] \equiv 0[5]$ و منه

$k = 5\alpha \ , \ \alpha \in \mathbb{Z}$

و $b \equiv 0[5]$ اذن $8k-65 \equiv 0[5]$ ومنه $8k \equiv 0[5]$ وبالتالي $k \equiv 0[5]$ وتعني $k = 5\alpha \ , \ \alpha \in \mathbb{Z}$

اذن الحلول هي $(a;b) = (\ 81(5\alpha)-650\ ;\ 8(5\alpha)-65\ )$; $\alpha \in \mathbb{Z}$

وبما ان $(a;b) = (\ 81k-650\ ;\ 8k-65\ )$ فان $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ مع $480 \geq 81(5\alpha)-650 > 0$ و $480 \geq 8(5\alpha)-65 > 0$

$480+650 > 81(5\alpha) > 560$ و $480+65 \geq 8(5\alpha) > 65$

$\dfrac{545}{40} \geq \alpha > \dfrac{65}{40}$ و $\dfrac{1130}{405} \geq \alpha > \dfrac{650}{405}$ مع $\alpha \in \mathbb{Z}$ ومنه $2.7 > \alpha > 1.6$ و $13.62 > \alpha > 1.62$

اذن $\alpha = 2$

اذن قيم a و b هي $a = 81\times 5\times 2-650 = 160$, $b = 8\times 5\times 2-65 = 15$

التحقق : $\begin{cases} 8\times(160)-81\times 15 = 65 \\ PPCM(160;15) = 480 \end{cases}$

التمرين(33) :

(1) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E): 2x+3y=5$

(2) في ما يأتي الأعمار تقدر بالسنوات

في 2009 كان سن الاب هو n ومحصور بين 50 و 55 . وله ولدان A و B سنهما على الترتيب a و b

– نفرض أن : – في 2001 سن الاب كان ضعف سن الابن A

– في 2006 كان سن الاب يفوق ثلاثة اضعاف سن الابن B بـ 3 سنوات

(أ) بين ان الاعداد n و a و b تحقق العلاقة : $\begin{cases} n=2a-8 \\ n=3b-3 \end{cases}$

(ب) بين أن $(a;-b)$ هو حل للمعادلة (E)

(ج) استنتج الاعمار n و a و b للاب وولديه

حل التمرين(33) :

(1) واضح ان الثنائية $(1;1)$ حل للمعادلة $(E): 2x+3y=5$ اذن : $2(1)+3(1)=5$

$2x+3y=2(1)+3(1)$ وبالتالي : $2(x-1)=3(1-y)$

ومنه حسب مبرهنة غوص : 2 يقسم $3(1-y)$ وبما انه اولي مع 3 فانه يقسم $1-y$ أي $1-y=3k$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(1+3k\ ,\ 1-2k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

(2) (أ) n هو سن الاب في 2009 ومنه كان سنه في 2001 : $n-8$

وسن الابن A في 2001 كان $a-8$

وسن الابن B في 2006 هو $b-3$ وسن الاب $n-3$

اذن من المعطيات نجد : $n-8=2(a-8)$ و $n-3=3(b-3)+3$ اذن :

$\begin{cases} n=2a-8 \\ n=3b-3 \end{cases}$ وهو المطلوب

(ب) الثنائية $(a;-b)$ حل للمعادلة (E) حيث $n=2a-8$ و $n=3b-3$ أي $2a-8=3b-3$

ومنه $2a-3b=5$ أي $2a+3(-b)=5$ أي ان $(a;-b)$ حل للمعادلة (E)

(ج) من السؤال الأول وجدنا مجموعة الحلول اذن $a=x$ ومنه $a=1+3k$

و $y=-b$ أي $b=-1+2k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ وبالتالي

$n=2a-8=2(1+3k)-8=6(k-1)$ اذن $n=6(k-1)$ وهو عدد مضاعف لـ 6

وبما ان سن الاب محصور بين 50 و 55 فان $50\prec 6(k-1)\prec 55$ أي ان $50+6\prec 6k\prec 55+6$

ومنه $9,33\prec k\prec 10,16$ وبالتالي $k=10$ سن الاب هو $n=54$ وسن الابن A هو $a=31$

وسن الابن B هو $b=19$

التمرين(34)

(1) (أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7 .

(ب) عين باقي قسمة كل من العددين 5^{2017} و 5^{1438} على 7

(ج) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد 6^{2n} على 7

(د) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها العدد $(5^n+6^{2n}+3)$ يقبل القسمة على 7

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $\left(26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\right)$ يقبل القسمة على 7 .

(3) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+5n\right)$ يقبل القسمة على 7 .

(4) n عدد طبيعي . نضع $\alpha_n=n^2+n$ و $\beta_n=n+2$

(أ) تحقق ان : $n\beta_n-\alpha_n=n$

(ب) اثبت ان $PGCD(\beta_n;\alpha_n)=PGCD(\beta_n;n)$

(ج) استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(\beta_n;\alpha_n)$

حل التمرين(34) :

(1) (أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7 :

$5^0\equiv 1[7]$ و $5^1\equiv 5[7]$ و $5^2\equiv 4[7]$ و $5^3\equiv 6[7]$ و $5^4\equiv 2[7]$ و $5^5\equiv 3[7]$ و $5^6\equiv 1[7]$.

نلاحظ ان بواقي قسمة 5^n على 7 تشكل متتالية دورية و دورها 6 ومنه باقي قسمة 5^n على 7 :

لما $n=6k$ الباقي هو 1 و لما $n=6k+1$ الباقي هو 5 و لما $n=6k+2$ هو 4

و لما $n=6k+3$ هو 6 و لما $n=6k+4$ هو 2 و لما $n=6k+5$ هو 3 . حيث k عدد طبيعي .

ب) لدينا $1438=6(239)+4$ هو من الشكل $n=6k+4$ اذن باقي قسمة 5^{1438} على 7 هو 2 .

و لدينا $2017=6(336)+1$ هو من الشكل $n=6k+1$ اذن باقي قسمة 5^{2017} على 7 هو 5 .

(ج) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد 6^{2n} على 7:

لدينا $6\equiv -1[7]$ ومنه من اجل كل عدد طبيعي n : $6^{2n}\equiv(-1)^{2n}[7]$ اذن $6^{2n}\equiv 1[7]$ ومنه باقي القسمة هو 1

(د) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها العدد $(5^n+6^{2n}+3)$ يقبل القسمة على 7 :

لدينا $6^{2n}\equiv 1[7]$ و $(5^n+6^{2n}+3)$ يقبل القسمة على 7 تعني $5^n+6^{2n}+3\equiv 0[7]$

اذن نجد $5^n+1+3\equiv 0[7]$ اي $5^n+4\equiv 0[7]$ ومنه $5^n\equiv 3[7]$

ومن السؤال (1) نجد $5^n\equiv 3[7]$ محققة من اجل $n=6k+5$ حيث k عدد طبيعي

2) اثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n العدد $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3$ يقبل القسمة على 7 :

لدينا $26\equiv 5[7]$ بالرفع الى قوى $6n+5$ نجد $26^{6n+5}\equiv 5^{6n+5}[7]$

و مما سبق نستنتج ان $26^{6n+5} \equiv 3[7]$ ومنه نجد $5^{6n+5} \equiv 3[7]$.....(1) .

و لدينا $47 \equiv 5[7]$ بالرفع الى قوى نجد $47^{12n+2} \equiv 5^{12n+2}[7]$ و مما سبق نستنتج ان $5^{6(2n)+2} \equiv 4[7]$ و منه $47^{12n+2} \equiv 4[7]$ بالضرب في 2 نجد $2 \times 47^{12n+2} \equiv 8[7]$ و $8 \equiv 1[7]$ اذن $2 \times 47^{12n+2} \equiv 1[7]$....(2) بجمع (1) و (2) نجد $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} \equiv 4[7]$ بإضافة 3 نجد $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 7[7]$ و $7 \equiv 0[7]$ ومنه $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 0[7]$ اذن $26^{6n+5} + 2 \times 27^{12n+2} + 3$ يقبل القسمة على 7 .

3) لدينا مما سبق $26^{6n+5} + 2 \times 27^{12n+2} \equiv 4[7]$ بإضافة $5n$ نجد $26^{6n+5} + 2 \times 27^{12n+2} + 5n \equiv 4 + 5n[7]$

العدد $26^{6n+5} + 2 \times 27^{12n+2} + 5n$ قابلا للقسمة على 7 يعني ان $4 + 5n \equiv 0[7]$ أي ان $5n \equiv -3[7]$.

يكافئ $5n \equiv 4[7]$ بالضرب في 3 نجد $15n \equiv 12[7]$ أي ان $n \equiv 5[7]$ (لان $15 \equiv 1[7]$ و $12 \equiv 5[7]$)

ومنه قيم n المطلوبة هي $k \in \mathbb{Z}$: $n = 7k + 5$.

4) أ) التحقق ان : $n\beta_n - \alpha = n$ لدينا $\begin{cases} n\beta_n = n^2 + 2n \\ \alpha_n = n^2 + n \end{cases}$ بالطرح نجد $n\beta_n - \alpha_n = n$.

ب) اثبات ان : $PGCD(\beta_n ; \alpha_n) = PGCD(\beta_n ; n)$ نضع

$PGCD(\beta_n ; n) = d'$ ، $PGCD(\beta_n ; \alpha_n) = d$ لدينا d قاسم α_n ، β_n فهو قاسم للعدد

$n\beta_n - \alpha_n$ و منه فهو قاسم للعدد n اذن d قاسم للعددين n و β_n ومنه d قاسم لـ d'....(3) .

$PGCD(\beta_n ; n) = d'$ يعني ان d' قاسم للعددين n و β_n فهو قاسم للعدد $n(n+1)$ و منه d' قاسم للعدد

α_n و منه d' قاسم للعددين n و β_n اذن d' قاسم للعدد d.....(4) .

من (3) و (4) نجد ان $d = d'$ أي ان $PGCD(\beta_n ; \alpha_n) = PGCD(\beta_n ; n)$.

ج) نضع $PGCD(\beta_n ; \alpha_n) = d$ ومنه $PGCD(\beta_n ; n) = d$ أي ان d قاسم للعددين n و β_n فهو قاسم

للعدد $\beta_n - n = n + 2 - n = 2$ ومنه القيم الممكنة للعدد $PGCD(\beta_n ; \alpha_n)$ هي قواسم 2 أي 1 و 2 .

التمرين (35)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5x - 6y = 3$.....(E) .

(1) أ) اثبت انه اذا كانت الثنائية $(x ; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن: x مضاعف للعدد 3 .

(ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E)، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

(ج) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$.

(د) حل الجملة (S) باستعمال خواص الموافقات

(2) عين كل الثنائيات $(x ; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2 - y^2 \leq 56$.

(3) a و b عددان طبيعيان حيث : $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5

- عين α و β حتى تكون الثنائية $(a ; b)$ حلا للمعادلة (E) .

حل التمرين(35) :

1) أ) اثبات انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف لـ 3 :

اذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $5x-6y=3$ تعني $5x=6y+3=3(y+2)$ و منه حسب مبرهنة غوص $5x/3$ و 3 و 5 اوليان فيما بينهما اذن $x/3$ اي $x=3k$ مضاعف لـ 3

(ب) استنتاج حل خاص $(x_0;y_0)$للمعادلة (E) :

لدينا : $x_0=3k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ اذن (E) تكافئ : $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (E) معناه : $5x_0-6y_0=3$ اي $5(3k)-6y_0=3$ أي : $5(k)-2y_0=1$. ومنه $5(k)-1=2y_0$ من اجل $k=1$ مثلا نجد $y_0=2$

اذن $(x_0;y_0)=(3;2)$ حل خاص للمعادلة

- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E):

لدينا : $\begin{cases}5x-6y=3\\5(3)-6(2)=3\end{cases}$ و منه $5x-6y=5(3)-6(2)$ اي : $5(x-3)=6(y-2)$

وهذه المعادلة تعني $6/5(x-3)$ و منه حسب غوص لدينا 6 و 5 اوليان فيما بينهما اي $6/(x-3)$

و منه $x=6k+3$ بتعويض $x=6k+3$ في المعادلة نجد $y=5k+2$ و منه الحلول هي الثنائيات :

$(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}$.

ج) استنتاج حلول الجملة (S) :

(S) تكافئ : $\begin{cases}x=6\alpha-1\\x=5\beta-4\end{cases}$ و منه $6\alpha-1=5\beta-4$ اي : $5\beta-6\alpha=3$ و حسب السؤال (1) .ب . نجد ان حلولها هي حلول (E) اذن $(\alpha;\beta)=(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}$ بتعويض قيمة α او β في $x=6\alpha-1$ نجد :

$x=30k+11;k\in\mathbb{Z}$.

د) حل الجملة (S) باستعمال خواص الموافقات:

(S) تكافئ $\begin{cases}5x\equiv-5[30]\\6x\equiv-24[30]\end{cases}$ اذن بالطرح نجد : $6x-5x\equiv-19[30]$ اي : $x\equiv-19[30]$ و منه $x\equiv11[30]$

اذن : $x=30k+11;k\in\mathbb{Z}$.

(2) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E)حيث : $x^2-y^2\le56$ و $(x;y)=(6k+3;5k+2)$

$(x;y)$حلول المعادلة (E) حيث و $x^2-y^2\le56$ ومنه : $(6k+3)^2-(5k+2)^2\le56$ تكافئ

$11k^2+16k-51\le0$

دراسة إشارة $11k^2+16k-51$ نجد : $11k^2+16k-51\le0$ لما $k\in\left[-3;\frac{17}{11}\right]$ اي : $k\in\{-3;-2;-1;0;1\}$

و منه الثنائيات $(x;y)$هي : $(9;7);(3;2);(-3;-3);(-9;-8);(-15;-13)$

(3) تعيين α و β حتى يكون $(a;b)$حلا للمعادلة (E):

لدينا : $a=\overline{1\alpha0\alpha00}^{3}$ ومنه : $0\le\alpha\prec3$ و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}^{5}$ ومنه : $0\le\beta\prec5$ و لدينا كذلك :

$a=3^2\times\alpha+3^4\times\alpha+3^5=90\alpha+243$ و $b=5^0\times\alpha+5^2\times\beta+\alpha\times5^3=126\alpha+25\beta$.

$(a;b)$حلا للمعادلة (E) يكافئ $5a-6b=3$ و منه : $5(90\alpha+243)-6(126\alpha+25\beta)=3$

اي $-306\alpha-150\beta=-1212$ ومنه نجد $51\alpha+25\beta=202$ وبما ان : $0\leq\alpha\prec 3$ فإن : $\alpha=\{0;1;2\}$

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة $51\alpha+25\beta=202$ ينتج : $\beta=\left\{\frac{202}{25};\frac{151}{25};\frac{100}{25}=4\right\}$

اذن : $\alpha=2$ و $\beta=4$. (α و β طبيعيان)

التمرين(36)

(1)نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E)\ \ldots\ 4x-9y=5$

(أ) اثبت انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فان : $x\equiv 8[9]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E)

(ب) α عدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في النظام ذو ألأساس x ويكتب $\overline{98}$ في النظام ذو ألأساس y حيث $y\leq 15$ و $x\leq 35$

عين القيم الممكنة لـ x و y ثم اكتب α في النظام العشري

(2) (أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9 .

(ب) عين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (E) حيث يكون $2011^x+4^y+7\equiv 0[9]$

(3) نعتبر العددين a و b حيث : $a=9n+8$ و $b=4n+3$ وليكن d قاسمهما المشترك الاكبر

(أ) عين القيم الممكنة لـ d (لاحظ ان الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E))

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d=5$

(4) من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $A=9n^2+17n+8$ و $B=4n^2+7n+3$

(أ) بين ان العدد $(n+1)$ يقسم كلا من العددين A و B

(ب) استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين A و B

حل التمرين(36)

(1) $4x-9y=5$

(أ) اثبات ان $x\equiv 8[9]$:

$(x;y)$ حلا للمعادلة (E)معناه $4x-9y=5$ وتعني $4x=9y+5$ اي $4x\equiv 5[9]$ ومنه بالضرب بالعدد 7

نجد : $28x\equiv 35[9]$ اي $x+27x\equiv 27+8[9]$ وبالتالي $x\equiv 8[9]$

- استنتاج حلول المعادلة (E):

لدينا $x\equiv 8[9]$ ومنه $x=9k+8$ حيث k عدد صحيح وبالتعويض في المعادلة (E) نجد: $y=4k+3$

ومنه حلول المعادلة (E) هي $(x;y)=(9k+8;4k+3)$حيث k عدد صحيح

(ب) تعيين القيم الممكنة لـ x و y :

لدينا $\alpha=\overline{43}^x$ و $\alpha=\overline{98}^y$ ومنه $\alpha=4x+3$ و $\alpha=9y+8$ وبالتالي : $4x+3=9y+8$

اذن : $4x-9y=5$ ومنه $(x;y)$ هي حلول المعادلة (E)

وبما ان α يكتب $\overline{43}$ في النظام ذو ألأساس x فان $x\geq 5$ و $x\leq 35$ اذن $5\leq x\leq 35$

ويكتب $\overline{98}$ في النظام ذو ألأساس y فان $y \geq 10$ و $y \leq 15$ اذن $10 \leq y \leq 15$

اذن ينتج من هذا : $\begin{cases} 5 \leq x \leq 35 \\ 10 \leq y \leq 15 \end{cases}$ وهذا يعني $\begin{cases} 5 \leq 9k+8 \leq 35 \\ 10 \leq 4k+3 \leq 15 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \dfrac{-1}{3} \leq k \leq 3 \\ \dfrac{7}{4} \leq k \leq 3 \end{cases}$ اي $\begin{cases} 0 \leq k \leq 3 \\ 2 \leq k \leq 3 \end{cases}$

اذن قيم k هي : 2 و 3

من اجل $k=2$ فان $x=9\times 2+8=26$ و $y=4\times 2+3=11$ اذن $(x;y)=(26;11)$

من اجل $k=3$ فان $x=9\times 3+8=35$ و $y=4\times 3+3=15$ اذن $(x;y)=(35;15)$

– كتابة α في النظام العشري :

من اجل $(x;y)=(26;11)$ فان $\alpha=4x+3=4(26)+3=107$

و من اجل $(x;y)=(35;15)$ فان $\alpha=4x+3=4(35)+3=143$

(2) (أ) دراسة حسب قيم n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9 :

$4^0\equiv 1[9]$ و $4^1\equiv 4[9]$ و $4^2\equiv 7[9]$ و $4^3\equiv 1[9]$ ومنه ينتج من اجل كل عدد صحيح k :

$4^{3k}\equiv 1[9]$ و $4^{3k+1}\equiv 4[9]$ و $4^{3k+2}\equiv 7[9]$ وبالتالي البواقي هي :

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
بواقي قسمة العدد 4^n على 9	1	4	7

(ب) تعيين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول (E) حيث $2011^x+4^y+7\equiv 0[9]$:

لدينا $2011\equiv 4[9]$ وحلول (E) هي : $(x;y)=(9k+8;4k+3)$ حيث k طبيعي

ومنه $2011^x+4^y+7\equiv 0[9]$ تعني $4^{9k+8}+4^{4k+3}+7\equiv 0[9]$

ومن دراسة بواقي القسمة وجدنا الدور هو 3 ومنه نكتب العددين x و y كما يلي:

$x=9k+8=3(3k+2)+2=3k'+2$ و $y=4k+3=3k+3+k=3(k+1)+k=3k''+k$

وبالتالي : $4^{9k+8}+4^{4k+3}+7\equiv 0[9]$ تكافئ $4^{3k'+2}+4^{3k''}\times 4^k+7\equiv 0[9]$ ومن البولقي نجد :

$7+1\times 4^k+7\equiv 0[9]$ ومنه $4^k\equiv 4[9]$ ومنه من البواقي نجد ان $k=3m+1$

ومنه الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ التي تحقق $2011^x+4^y+7\equiv 0[9]$ هي :

$(x;y)=(9(3m+1)+8;4(3m+1)+3)$ اذن $(x;y)=(27m+17;12m+7)$ حيث m عدد طبيعي

(3) $a=9n+8$ و $b=4n+3$ و $PGCD(a;b)=d$

(أ) تعيين القيم الممكنة لـ d : نلاحظ ان الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E)

أي $4a-9b=5$ لان $4(9n+8)-9(4n+3)=36n-36n+32-27=5$

اذن $4a-9b=5$ فاذا كان $PGCD(a;b)=d$ فان d يقسم $4a-9b$ وبالتالي d يقسم 5

ومنه القيم الممكنة لـ d هي 1 او 5

(ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d=5$:

$d=5$ معناه $a\equiv 0[5]$ أي $9n+8\equiv 0[5]$ ومنه $5n+4n+5+3\equiv 0[5]$ اذن $4n+3\equiv 0[5]$

ومنه $4n\equiv 2[5]$ ومنه $16n\equiv 8[5]$ وبالتالي $n\equiv 3[5]$ أي ان $\boxed{n=5p+3}$ حيث p عدد طبيعي

(4) لدينا $A=9n^2+17n+8$ و $B=4n^2+7n+3$

(أ) تبيان ان العدد $(n+1)$ يقسم كلا من العددين A و B :

بالقسمة الاقليدية للعدد $9n^2+17n+8$ على $(n+1)$ نجد : $A=9n^2+17n+8=(n+1)(9n+8)$

و نجد أيضا $B=4n^2+7n+3=(n+1)(4n+3)$ ومنه $(n+1)$ يقسم كلا من العددين A و B

(ب) استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين A و B :

لدينا $A=(n+1)(9n+8)=(n+1)\times a$ و ايضا $B=(n+1)(4n+3)=(n+1)\times b$

$PGCD(A;B)=PGCD((n+1)\times a;(n+1)\times b)=(n+1)PGCD(a;b)$

ومن السؤال (3) (أ) القيم الممكنة لـ $PGCD(a;b)=d$ هي 1 او 5

ومنه من اجل $d=1$ فان $PGCD(A;B)=(n+1)\times 1=(n+1)$

ومن اجل $d=5$ فان $PGCD(A;B)=5(n+1)$

التمرين(37)

(1) عين قيم العدد الصحيح m بحيث تقبل المعادلة: $2014\alpha=475\beta+m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$

(2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $2014x-475y=-19$ ...(1)

(أ) عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق : $y_0-4x_0=1$

(ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)

(ج) اذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) حيث x و y من $\mathbb{N}$, بين ان العددين x و y اوليين فيما بينهما

(د) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n\equiv 4[25]$ وباقي قسمة n على 106 هو 17

(هـ) عين كل الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول (1) بحيث يكون العدد $x+y$ مضاعف للعدد 10

حل التمرين(37) :

(1) تعيين قيم m بحيث تقبل : $2014\alpha=475\beta+m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

$2014\alpha=475\beta+m$ تكافئ $2014\alpha-475\beta=m$

لدينا : $PGCD(2014;475)=19$ و هكذا $2014\alpha=475\beta+m$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ يكافئ

$19(106\alpha-25\beta)=m$ و منه $19/m$ اي $m=19h$ مع $h\in IR$.

لدينا المعادلة $2014x-475y=-19$.....(1) :

(2)(أ) تعيين الحل $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق $y_0-4x_0=1$:

المعادلة (1) تكافئ $19(106x-25)=-19$ و تكافئ $106x-25y=-1$...(*) ولدينا $y_0-4x_0=1$ بالتعويض في المعادلة (*) نجد : $106x_0-25(4x_0+1)=-1$ بعد الحل نجد : $x_0=4$ اذن $y_0=17$ اي $(x_0;y_0)=(4;17)$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة(1) :

المعادلة (1) و المعادلة (*) متكافئتان لهما نفس مجموعة الحلول اذن نحل المعادلة $106x-25y=-1....(*)$.

بما ان الثنائية $(4;17)$ حل للمعادلة (*) فإن : $106(4)-25(17)=-1...(E)$.

من (*) و (E) نجد : $106x-25y=106(4)-25(17)$ اي: $106(x-4)=25(y-17)$.

لدينا : $25/106(x-4)$ و 25 و 106 اوليان فيما بينهما حسب غوص $25/(x-4)$ اذن : $x=25k+4$.

بتعويض x نجد : $y=106k+17$ اذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات الصحيحة $(25k+4;106k+17)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ج) تبيان ان x و y اوليان فيما بينهما حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (1) :

لدينا d قاسم مشترك لـ x و y اي $\begin{matrix}d/x\\d/y\end{matrix}$ و منه $\begin{matrix}d/106x\\d/25y\end{matrix}$ اذن $d/106x-25y$ اي $d/-1$ و $d\in\mathbb{N}$ ينتج

$d/1$ اي $d=1$ اذن $PGCD(x;y)=1$ و منه x و y اوليان فيما بينهما

د) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n\equiv 4[25]$ و باقي قسمة n على 106 هو 17 :

اي نحل الجملة : $\begin{cases}n\equiv 4[25]\\n\equiv 17[106]\end{cases}$ اذن : $\begin{matrix}n=25\alpha+4\\n=106\beta+17\end{matrix}$ و منه $106\beta-25\alpha=-13$ و منه

$106\beta-25\alpha=-13$

لدينا الثنائية $(4;17)$ حل خاص للمعادلة $106\beta-25\alpha=-1$ و منه الثنائية $(4\times13;17\times13)$ حل خاص للمعادلة $106\beta-25\alpha=-13$ بعد ذلك نحل المعادلة $106\beta-25\alpha=-13$ باتباع نفس الطريقة في السؤال .2.

نجد : $\begin{cases}\beta=25p+52\\\alpha=106p+221\end{cases};p\in\mathbb{N}$ لكن $n=106\beta+17$ بالتعويض نجد $n=106(25p+52)+17$ و منه :

$n=2650p+5529;p\in\mathbb{N}$.

هـ) تعيين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) حيث : $x+y$ مضاعف لـ 10 :

لدينا $x+y=25k+4+106k+17=131k+21$ و لدينا $x+y$ مضاعف لـ 10 معناه $x+y\equiv 0[10]$

اي : $131k+21\equiv 0[10]$ اي : $k+1\equiv 0[10]$ اي $k\equiv -1[10]$ اي $k\equiv 9[10]$ و منه $k=10t+9$

و منه : $(x;y)=\{(250t+229;1060t+971);t\in\mathbb{Z}\}$.

التمرين(38)

(1) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) : $35x-42y=\alpha\cdots(1)$ حيث : $\alpha\in\mathbb{Z}$

ما هو الشرط اللازم والكافي الذي يحققه α حتى يكون للمعادلة (1) حلول في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

(2) (أ) نضع $\alpha=21$

اثبت انه اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فان x مضاعف للعدد 3 ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة

(ب) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (1)

(ج) عين E مجموعة الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) بحيث $x^2-y^2\prec 96$

(3) ليكن c عددا طبيعيا اكبر تماما من 5 وليكن a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب في نظام التعداد الذي

اساسه c كما يلي : $\overline{21}$ و $\overline{15}$

(أ) اذا علمت ان الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (1) عين العدد c ثم عين العددين a و b

(ب) تحقق ان $(a;b)$ تنتمي الى المجموعة E

حل التمرين(38)

(1) $35x-42y=\alpha$ حيث : $\alpha\in\mathbb{Z}$

تعيين الشرط اللازم والكافي الذي يحققه α حتى تقبل المعادلة (1) حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

المعادلة (1) تكافئ $7(5x-6y)=\alpha$ ومنه الشرط اللازم والكافي حتى تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ هو ان يكون α من مضاعفات 7

(2) (أ) $\alpha=21$

اثبات ان x مضاعف للعدد 3

المعادلة (1) تصبح $7(5x-6y)=21$ أي $5x-6y=3$ ومنه $5x=6y+3$ أي $5x=3(2y+1)$

هذه المعادلة تعني ان 3 يقسم $5x$ وبما ان 3 اولي مع 5 فانه حسب مبرهنة غوص 3 يقسم x

أي ان x مضاعف للعدد 3 أي $x=3k$

– استنتاج حل خاص للمعادلة (1) :

من اجل $k=1$ فان $x_0=3$ ومنه $5(3)-6y=3$ وبالتالي $y=2$ اذن الثنائية $(3;2)$ حل خاص للمعادلة

(ب) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (1) : لدينا الجملة : $\begin{cases}5x-6y=3\\5(3)-6(2)=3\end{cases}$ وبالطرح نجد :

$5(x-3)=6(y-2)$

وهذه الأخيرة تعني 6 يقسم الجداء $5(x-3)$ وبما ان 5 و 6 اوليان فيما بينهما فان6 يقسم $x-3$

اذن $x-3$ مضاعف للعدد 6 ومنه $x-3=6k$ أي ان $x=6k+3$ حيث k عدد صحيح

وبالتعويض في المعادلة $5(x-3)=6(y-2)$ نجد : $5\times6k=6(y-2)$ومنه $y=5k+2$

اذن الحلول هي $(x;y)=(6k+3;5k+2)$ حيث : k عدد صحيح

(ج) تعيين (E) مجموعة الثنائيات $(x;y)$ بحيث $x^2-y^2\prec96$:

$x^2-y^2\prec96$ تعني $(6k+3)^2-(5k+2)^2\prec96$ بعد التبسيط نجد : $11k^2+16k-91\prec0$

$\Delta=4260$ ومنه $k_1=\dfrac{-16-\sqrt{4260}}{2(11)}\simeq-3,69$ و $k_2=\dfrac{-16+\sqrt{4260}}{2(11)}\simeq2,23$

ومنه $-3,69\prec k\prec2,23$ اذن القيم الممكنة هي : $\{-3;-2;-1;0;1;2\}$

بالتعويض بهذه القيم في $(x;y)=(6k+3;5k+2)$ نجد :

$E=\{(-15;-13),(-9;-8),(-3;-3),(3;2),(9;7),(15;12)\}$

(3) $c\succ5$ و : $a=\overline{21}^c$ و $b=\overline{15}^c$

(أ) تعيين العدد c حيث $(a;b)$ حل للمعادلة (1)

$a=\overline{21}^{c}=1+2c$ و $a=6k+3$ ومنه $1+2c=6k+3$

و $b=\overline{15}^{c}=5+c$ و $b=5k+2$ ومنه $5+c=5k+2$

وبحل الجملة $\begin{cases}1+2c=6k+3\\5+c=5k+2\end{cases}$ نجد $\begin{cases}1+2c=6k+3\\10+2c=10k+4\end{cases}$ وبالطرح نجد : $4k+1=9$ ومنه $k=2$

وبالتالي $5+c=5k+2$ تعني $c=5(2)+2-5=7$ اذن $\boxed{c=7}$

- تعيين العددين a و b :

$a=1+2c=1+2(7)=15$ و $b=5+c=5+7=12$

(ب) التحقق ان $(a;b)$ تنتمي الى المجموعة E :

واضح ان الثنائية $(15;12)$ تنتمي الى E اذن $(a;b)$تنتمي الى E

التمرين(39) :

1) تحقق ان $5^6\equiv 1[7]$ و استنتج باقي قسمة 5^{2016} على 7

2) من اجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n=1+5+5^2+....+5^n$.

أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $4S_n=5^{n+1}-1$ و استنتج ان S_nو 5^n اوليان فيما بينهما .

ب) ليكن العدد الصحيح a بين ان $4S_n\equiv \alpha[7]$ اذا و فقط اذا كان $S_n\equiv 2a[7]$.

ج) بين ان $4S_{2015}\equiv 0[7]$ و استنتج باقي قسمة S_{2015} على 7 .

د) عين اصغر عدد طبيعي n غير معدوم بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n .

3) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم , نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) : $5^n x+S_n y=1$

تحقق ان الثنائية $(5,-4)$حل للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

حل التمرين(39)

1) $5^6=15625$ ومنه $5^6\equiv 1[7]$

ندرس بواقي قسمة 5^n على 7 .

$5^0\equiv 1[7]$ و $5^1\equiv 5[7]$ و $5^2\equiv 4[7]$, و $5^3\equiv 6[7]$ و $5^4\equiv 2[7]$ و $5^5\equiv 3[7]$,و $5^6\equiv 1[7]$

بواقي القسمة هي متتالية دورية و دورها 6 ومنه من اجل كل عدد طبيعي k : $5^{6k}\equiv 1[7]$

$5^6\equiv 1[7]$ و $2016=6\times 336=6n$ ومنه $5^{2016}\equiv 5^{6(336)}\equiv 1[7]$

2) $S_n=1+5+5^2+5^3+...+5^n$

(أ) بيان من اجل كل عدد طبيعي n و $4S_n=5^{n+1}-1$ لذلك نحسب :

$S_n=5^0+5^1+5\times 5+....+5^n$ هو مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها $q=5$

$S_n = 1\left(\frac{5^{n+1}-1}{5-1}\right)$ ومنه $4S_n = 5^{n+1}-1$

لدينا $4S_n = 5^{n+1}-1$ وهذه تكتب على الشكل $5\times 5^n - 4S_n = 1$

يوجد ثنائية من الاعداد الصحيحة $(5,-4)$ بحيث $5\times 5^n - 4S_n = 1$ ومنه حسب بيزو فان $S_n , 5^n$ اوليان فيما بينهما

ب) تبيان انه اذا كان $4S_n \equiv a[7]$ فإن $S_n \equiv 2a[7]$.

لدينا $4S_n \equiv a[7]$ ومنه بالضرب في 2 نجد $8S_n \equiv 2a[7]$ و $S_n \equiv 2a[7]$ ومنه $7S_n + S_n \equiv 2a[7]$

العكس : تبيان انه اذا كان $S_n \equiv 2a[7]$ فإن $4S_n \equiv a[7]$

لدينا $S_n \equiv 2a[7]$ بالضرب في العدد 4 نجد $4S_n \equiv 8a[7]$ و $8a \equiv a[7]$ ومنه $4S_n \equiv a[7]$

ج) بيان ان : $4S_{2015} \equiv 0[7]$.

باستعمال السؤال (1) نجد $5^{2016} \equiv 1[7]$ ومنه $5^{2016} - 1 \equiv 0[7]$ و لدينا $4S_n = 5^{n+1}-1$ اي

$4S_{2015} = 5^{2016} - 1$

$4S_{2015} \equiv 5^{2016} - 1[7]$ وبما ان $5^{2016} - 1 \equiv 0[7]$ فان $4S_{2015} \equiv 0[7]$

- استنتاج باقي قسمة S_{2015} على 7 :

لدينا حسب ما سبق : $4S_{2015} \equiv 0[7]$ ومنه حسب الخاصية ($4S_n \equiv a[7]$ فإن $S_n \equiv 2a[7]$)

نجد : $S_{2015} \equiv 2\times 0[7]$ ومنه باقي قسمة S_{2015} على 7 هو 0

د) تعيين اصغر عدد طبيعي n حيث يكون 7 قاسم لـ S_n .

7 قاسم لـ S_n معناه : $S_n \equiv 0[7]$ اي $5^{n+1} - 1 \equiv 0[7]$ ومنه $5^{n+1} \equiv 1[7]$ اي $5^{n+1} \equiv 5^0[7]$

ومن السؤال الأول فان : $n+1=0$ او $n+1=6$ (اي $n=-1$ مرفوضة او $n=5$) و بالتالي $n=5$

(3) حل المعادلة $5^n x + S_n y = 1$:

$(5,-4)$ حل خاص للمعادلة معناه $5^n(5) + S_n(-4) = 1$ وهذه تعني $5^{n+1} - 4S_n = 1$ اي $4S_n = 5^{n+1}-1$

وهي محققة حسب السؤال(2) (أ)

نجد اذن : $\begin{cases} 5^n x + S_n y = 1 \\ 5^n(5) + S_n(-4) = 1 \end{cases}$ وبالطرح نجد : $5^n(x-5) + S_n(y+4) = 0$

ومنه $5^n(x-5) = -S_n(y+4)$ وهذه تعني 5^n يقسم $S_n(y+4)$ وبما ان $S_n , 5^n$ اوليان فيما بينهما فانه

حسب غوص 5^n يقسم $-(y+4)$ اي ان $-(y+4) = k.5^n$ وبالتالي $y = -k\times 5^n - 4$

وبالتعويض في $5^n(x-5) = -S_n(y+4)$ نجد $x = kS_n + 5$

اذن حلول المعادلة (E) هي : $k \in \mathbb{Z}$, $(x,y) = (kS_n + 5, -k\times 5^n - 4)$.

التمرين(40)

(1) ادرس حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 5 .

(2) (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r حيث U_0 , r عددان طبيعيان غير معدومين..

(أ)- عين U_0 و r علما أن U_0 و r أوليان فيما بينهما و $U_0^2 = U_{10} - U_1$

(ب)- نفرض $U_0 = 3$, $r = 1$ ونضع $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ و $P_n = U_0 \times U_1 \times ... \times U_n$.

- احسب S_n و P_n بدلالة n .

- عين العدد q بحيث : $2P_q = 2010!$ ثم تحقق أن : $3^q \equiv 2[5]$

- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $2S_n + 2 = 3^q [5]$

حل التمرين(40)

(1) دراسة بواقي قسمة 3^n على 5 :

$3^0 \equiv 1[5]$; $3^1 \equiv 3[5]$; $3^2 \equiv 4[5]$; $3^3 \equiv 2[5]$; $3^4 \equiv 1[5]$

وعليه : $3^{4k} \equiv 1[5]$ و $3^{4k+1} \equiv 3[5]$; $3^{4k+2} \equiv 4[5]$; $3^{4k+3} \equiv 2[5]$

(2) (أ) تعيين U_0 و r : $U_0^2 = U_{10} - U_1$ . . . (1)

لدينا : $U_1 = U_0 + r$ و $U_{10} = U_0 + 10r$

وبالتعويض في (1) نجد : $U_0^2 = (U_0 + 10r) - (U_0 + r)$ ومنه : $U_0^2 = 9r$

لدينا : U_0 يقسم $9r$ و U_0 أولي مع r ومنه حسب مبرهنة غوص : U_0 يقسم 9 .

إذن قيم U_0 الممكنة هي : 1 ، 3 ، 9 .

* لما $U_0 = 1$: $1 = 9r$ أي : $r = \frac{1}{9}$ مرفوض .

* لما $U_0 = 3$: $9 = 9r$ ومنه : $r = 1$.

* لما $U_0 = 9$: $9^2 = 9r$ ومنه : $r = 9$ مرفوض لأن U_0 أولي مع r .

ومنه : $U_0 = 3$ و $r = 1$.

ب) حساب S_n :

لدينا : $S_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$ حيث : $U_0 = 3$ ، $U_n = U_0 + nr$

ومنه : $U_n = 3 + n$ وعليه : $S_n = \frac{n+1}{2}(6 + n)$

- حساب P_n : $P_n = U_0 \times U_1 + \ldots \times U_n = U_0 \times (U_0 + r) \ldots \times (U_0 + nr)$

$P_n = 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times (n+3)$

$$P_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times (n+3)}{1 \times 2} = \frac{(n+3)!}{2!}$$

- تعيين q : $2p_q = (2010)!$ ومنه : $(q+3)! = 2010!$

إذن : $q + 3 = 2010$ وعليه : $q = 2007$.

- التحقق من أجل $3^{2007} \equiv 2[5]$:

لدينا : $2007 = 4 \times 581 + 3$ ومنه : $3^{2007} \equiv 2[5]$.

- تعيين n بحيث : $2S_n + 2 \equiv 3^q [5]$

إذن : $(n+1)(6+n) + 2 \equiv 2[5]$ ومنه $6n + n^2 + 6 + n + 2 \equiv 2[5]$

$n^2+7n+6\equiv 0[5]$ ومنه $n^2+2n+1\equiv 0[5]$ إذن : $(n+1)^2\equiv 0[5]$

إذن : $n+1\equiv 0[5]$ ومنه : $n\equiv -1[5]$ إذن : $n\equiv 4[5]$ وعليه $n=5\alpha+4$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

التمرين(41) :

(1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من العددين 8^n و 9^n على 13

(2) – اثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $\left(3^{6n+2}-2\times 64^{2n+1}+2\right)$ يقبل القسمة على 13.

(3) عيّن الاعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $\left(3^{6n}-2003^{2n+1}+30n^2-1\right)$ مضاعفا للعدد 13 .

(4) – عيّن الاعداد الطبيعية n بحيث يكون $8^n-38^n\equiv 9[13]$

حل التمرين (41)

(1) (أ)– تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13 .

لدينا $8^0\equiv 1[13]$ ، $8^1\equiv 8[13]$ ، $8^2\equiv 12[13]$ ومنه $8^2\equiv -1[13]$ أي $8^4\equiv 1[13]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $8^{4p}\equiv 1[13]$ ، $8^{4p+1}\equiv 8[13]$ ، $8^{4p+2}\equiv 12[13]$ ، $8^{4p+3}\equiv 5[13]$

$n=..$	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$
باقي قسمة 8^n على 13	1	8	12	5

– تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 :

لدينا $9^0\equiv 1[13]$ ، $9^1\equiv 9[13]$ ، $9^2\equiv 3[13]$ ومنه $9^3\equiv 1[13]$ اذن الدور هو 3

اذن $9^{3k}\equiv 1[13]$ و $9^{3k+1}\equiv 9[13]$ و $9^{3k+2}\equiv 3[13]$

(2) اثبات أنَ العدد $\left(3^{6n+2}-2\times 64^{2n+1}+2\right)$ يقبل القسمة على 13:

$$\left(3^{6n+2}-2\times 64^{2n+1}+2\right)=\left(3^2\right)^{3n+1}-2\times\left(8^2\right)^{2n+1}+2\equiv 9^{3n+1}-2\times 8^{4n+2}+2[13]$$
$$\equiv 9-2(12)+2[13]\equiv 0[13]$$

(3) تعيين n بحيث يكون العدد $\left(3^{6n}-2003^{2n+1}+30n^2-1\right)$ مضاعفا للعدد :13

تعني $3^{6n}-2003^{2n+1}+30n^2-1\equiv 0[13]$ ولدينا $2003\equiv 1[13]$ و $30\equiv 4[13]$

ومنه $4n^2-1\equiv 0[13]$ وبالتالي $\left(3^2\right)^{3n}-1+4n^2-1\equiv 0[13]$ اي $9^{3n}+4n^2-2\equiv 0[13]$

ومنه $(2n+1)(2n-1)\equiv 0[13]$ اذن $(2n-1)\equiv 0[13]$ او $(2n+1)\equiv 0[13]$ لان 13 اولي

وعليه($2n\equiv 1[13]$ او $2n\equiv -1[13]$)

ومنه $2n\equiv 1[13]$ اي $7\times 2n\equiv 7[13]$ وبالتالي : $13n+n\equiv 7[13]$ اي $\boxed{n=13k+7}$

و $2n\equiv -1[13]$ ومنه $2n\equiv 12[13]$ اي $n\equiv 6[13]$ وبالتالي : $\boxed{n=13k+6}$ حيث k عدد طبيعي

(4) تعيين الاعداد n بحيث يكون $8^n-38^n\equiv 9[13]$:

لدينا $38\equiv(-1)[13]$ ومنه $8^n-38^n\equiv 9[13]$ تكافئ $8^n-(-1)^n\equiv 9[13]$ اي $8^n-12^n\equiv 9[13]$

$n=..$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$8^n \equiv ..$	1	8	12	5	$[13]$
$8^n-(-1)^n \equiv ..$	0	9	11	6	$[13]$

من هذه النتائج نجد ان $8^n-(-1)^n \equiv 9[13]$ محققة من اجل $n=4k+1$ حيث k عدد طبيعي

التمرين(42):

(1)بينأنالعدد 2017 أولي.

(2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلةذاتالمجهول (x,y) : $14119x-10085y=22187$ ....(E)

(أ)عين القاسمالمشتركالأكبرللأعداد 22187 , 10085 , 14119

(ب)بينأنالثنائية $(3;2)$حلاخاصاللمعادلة (E)ثمعينمجموعةحلولها

(ج) عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E)بحيث يكون $PGCD(x;y)=11$

(3)(أ)أدرسحسبقيمالعددالطبيعي n بواقيالقسمةالإقليديةلكلمنالعددين 5^n و 7^n على 11

(ب)عينقيمالعددالطبيعي nحتى يكون 5^n+7^{2017}قابلاللقسمةعلى11

(4)ليكن aو b عددينطبيعيين غيرمعدومينكلامنهماأصغرمن 8 ,

نعتبرالعدد : $N=\overline{a01b}$ مكتوب في النظام العشري

(أ) تحقق ان $10^3 \equiv -1[11]$

(ب)عينقيمالعددالطبيعي N حيثباقيقسمته على 11 هو4

(ج)أكتبهذاالعددفيالنظامذيالاساس 11

حل التمرين(42):

(1)العدد 2017 أوليلانه لا يقبل القسمة على 2 ولا على 3 ولا على 5 ولا على 7 ولا 11 ولا 13 ولا 17 ولا 19 ولا على 23 ولا 29 ولا 31 ولا 37 ولا 41 و $\sqrt{2017} \approx 44,91$ ومنه 2017 اولي

(2) : $14119x-10085y=22187$ ....(E)

(أ)تعيين القاسمالمشتركالأكبرللأعداد:

لدينا $14119=7\times 2017$و $10085=5\times 2017$ و $22187=11\times 2017$ ومنه

$PGCD(22187,10085,14119)=2017$

(ب) المعادلة (E) تكافئ : $7x-5y=11$

الثنائية $(3;2)$حلاخاصاللمعادلة (E) معناه : $7(3)-5(2)=11$محققة

- تعيينمجموعةالحلول :

لدينا $\begin{cases}7x-5y=11.... \quad (1)\\ 7(3)-5(2)=11... \quad (2)\end{cases}$ وبالطرح نجد: $7(x-3)=5(y-2)$

$7/5(x-3)$وبما ان 5 اولي مع 7 فانه حسب مبرهنة غوص 5 يقسم $x-3$اي

$x-3=5k$ومنه $\boxed{x=5k+3}$

وبالتعويض في المعادلة $7(x-3)=5(y-2)$ نجد $\boxed{y=7k+2}$ حيث kعدد صحيح

(ج) تعيين (x,y) حلول (E) بحيث : $PGCD(x;y)=11$ و $(x,y)=(5k+3;7k+2)$

$PGCD(x;y)=11$ تعني $x\equiv 0[11]$ و $y\equiv 0[11]$

$x\equiv 0[11]$ تكافئ $5k+3\equiv 0[11]$ ومنه $5k\equiv -3[11]$ اي $5k\equiv 8[11]$ ومنه $2\times 5k\equiv 16[11]$

اي $-k\equiv 5[11]$ تكافئ $k\equiv -5[11]$ اي $k\equiv 6[11]$ اذن $k=11k'+6$

وبالتالي $x=5(11k'+6)+3=\boxed{55k'+33}$ و $y=7(11k'+6)+2=\boxed{77k'+44}$

(3)(أ)دراسةبواقيالقسمةالإقليديةلكلمنالعددين 5^n و 7^n على 11 :

- بواقيالقسمةالإقليديةللعدد 5^n على 11

$5^0\equiv 1[11]$ و $5^1\equiv 5[11]$ و $5^2\equiv 3[11]$ و $5^3\equiv 4[11]$ و $5^4\equiv 9[11]$ و $5^5\equiv 1[11]$

لدينا : $5^5\equiv 1[11]$ و عليه : $5^{5k}\equiv 1[11]$ حيث : $k\in\mathbb{N}$

و بالتالي : $5^{5k+1}\equiv 5[11]$ ، $5^{5k+2}\equiv 3[11]$ ، $5^{5k+3}\equiv 4[11]$ ، $5^{5k+4}\equiv 9[11]$.

إذن البواقي هي : 1،5،3،4،9 حسب قيم n و هي :

$5k$ ، $5k+1$ ، $5k+2$ ، $5k+3$ ، $5k+4$ على الترتيب .

- بواقي قسمة 7^n على 11 حيث n عدد طبيعي

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1

عملية القسمة دورية دورها 10 و نكتب $7^{10k}\equiv 1[11]$

إذن بواقي قسمة 7^n على 11 حيث n عدد طبيعي كما يلي:

$n=10k+m$	$m=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8

(ب)تعيينقيم n حتى يكون 5^n+7^{2017} قابلاللقسمةعلى11: أي $5^n+7^{2017}\equiv 0[11]$

لدينا $2017=10(201)+7$ ومنه $7^{2017}=7^{10(201)+7}\equiv 6[11]$

اذن $5^n+7^{2017}\equiv 0[11]$ تعني $5^n+6\equiv 0[11]$ أي $5^n\equiv 5[11]$ ومن البواقي نجد: $\boxed{n=5k+1}$

(4) a و b طبيعيانكلامنهماأصغرمن 8 و : $N=\overline{a01b}^{10}$

(أ) التحقق ان $10^3\equiv -1[11]$ واضح لان $1000=11(90)+10$ أي $1000\equiv 10[11]$ اذن $10^3\equiv -1[11]$

(ب)تعيينقيم N حيثباقيقسمته على 11 هو4 : أي $N\equiv 4[11]$

$N=\overline{a01b}^{10}=a\times 10^3+1\times 10+b$ ومنه $N\equiv 4[11]$ تعني $1000a+b+10\equiv 4[11]$أي

$-a+b+10\equiv 4[11]$ ومنه $b-a\equiv -6[11]$ أي $b-a\equiv 5[11]$

وبما ان a و b طبيعيانكلامنهماأصغرمن 8 فان الموافقة $b-a\equiv 5[11]$ تكون محققة من اجل :

$(a;b)=(2;7)$ او $(a;b)=(1;6)$ او $(a;b)=(7;1)$

ومنه نجد من : $N=1000a+b+10$

$\boxed{1016}=N=1000+6+10$ و $\boxed{2017}=N=1000(2)+7+10$ و $\boxed{7011}=N=1000(7)+1+10$

(ج)كتابة العدد N فيالنظامذيالاساس 11 :

$\boxed{4}+11\times 92=1016$ و $\boxed{4}+11\times 8=92$و $\boxed{8}+11\times 0=8$ ومنه $1016=\overline{844}^{11}$

وهكذا نجد : $2017=\overline{1574}^{11}$ و $7011=\overline{52\alpha 4}^{11}$ حيث $\alpha=10$

التمرين (43)

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k حيث $1\le k\le 10$ العدد C_{11}^{k} مضاعف للعدد 11.

(2) استنتج أنه من أجل كل ثنائية (a,b) من الأعداد الصحيحة : $(a+b)^{11}\equiv\left(a^{11}+b^{11}\right)[11]$

(3) (أ)– بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $n^{11}\equiv n[11]$

ثم بين أنه من أجل كل عدد صحيح سالب n : $n^{11}\equiv n[11]$

(ب)– استنتج أن العدد $a^{11}+b^{11}$ مضاعف للعدد 11 إذا وفقط إذا كان $a+b$ مضاعف للعدد 11.

4) عين الأعداد الصحيحة x بحيث: $\begin{cases}-35\le x\le 35\\ x^{11}+2048\equiv 0[11]\end{cases}$

حل التمرين(43)

1) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي k حيث $1\le k\le 10$ العدد C_{11}^{k} مضاعف للعدد 11.

لدينا $C_{11}^{k}=\dfrac{11!}{k!(11-k)!}=\dfrac{11\times 10\times....\times(k+1)}{k!}$

ومنه: $k!C_{11}^{k}=11\times 10\times...\times(k+1)$

نستنتج أن 11 يقسم $k!C_{11}^{k}$ و $k<11$ و العدد 11 أولي إذن $k!$ أولي مع 11

وبالتالي حسب غوص العدد 11 يقسم C_{11}^{k} أي العدد C_{11}^{k} مضاعف للعدد 11.

2) نستنتج أنه من أجل كل ثنائية (a,b) من الأعداد الصحيحة : $(a+b)^{11}\equiv\left(a^{11}+b^{11}\right)[11]$

حسب دستور ثنائي الحد لنيوتن:

$$(a+b)^{11}=\sum_{k=0}^{k=11}C_{11}^{k}a^{11-k}b^{k}=a^{11}+\sum_{k=11}^{10}C_{11}^{k}a^{11-k}b^{k}+b^{11}$$

لكن مما سبق لدينا إذا كان $1\le k\le 10$ فإن $C_{11}^{k}\equiv 0[11]$

ومنه إذا كان a و b عددين صحيحين فإن: $\sum_{k=11}^{10}C_{11}^{k}a^{11-k}b^{k}+b^{11}\equiv 0[11]$

و بالتالي: $(a+b)^{11}\equiv\left(a^{11}+b^{11}\right)[11]$

3) أ– نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $n^{11}\equiv n[11]$:

نستعمل البرهان بالتراجع:

من أجل $n=0$: $0^{11}\equiv 0[11]$

نفرض أن: $n^{11}\equiv n[11]$

ومنه حسب ماسبق: $(n+1)^{11} \equiv (n^{11}+1^{11})[11]$ أي $(n+1)^{11} \equiv n+1[11]$

إذن الخاصية صحيحة من أجل: $n+1$.

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $n^{11} \equiv n[11]$

* نبين أنه من أجل كل عدد صحيح سالب n: $n^{11} \equiv n[11]$:

من أجل كل عدد طبيعي n: $n^{11} \equiv n[11]$

من أجل كل عدد سالب n لدينا: $-n \geq 0$ ومنه: $n^{11} = (-1)(-n)^{11}$

و لدينا: $n^{11} \equiv -(-n)^{11}[11]$ أي $n^{11} \equiv -(-n)[11]$ أي $n^{11} \equiv n[11]$

ومنه من أجل كل n من Z : $n^{11} \equiv n[11]$

ب – نستنتج أن العدد $a^{11}+b^{11}$ مضاعف للعدد 11 إذا وفقط إذا كان $a+b$ مضاعف للعدد 11.

لدينا من أجل كل عددين a و b صحيحين لدينا : $(a+b)^{11} \equiv (a^{11}+b^{11})[11]$

أي $(a+b)^{11} \equiv a+b[11]$

ومنه $a^{11}+b^{11}$ مضاعف للعدد 11 إذا وفقط إذا كان $a+b$ مضاعف للعدد 11.

4) تعيين الأعداد الصحيحة x بحيث: $\begin{cases} -35 \leq x \leq 35 \\ x^{11}+2048 \equiv 0[11] \end{cases}$

لدينا: $2048 = 2^{11}$ و هو من الشكل: n^{11}

ومنه: $\begin{cases} -35 \leq x \leq 35 \\ x^{11}+2048 \equiv 0[11] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} -35 \leq x \leq 35 \\ x^{11}+2^{11} \equiv 0[11] \end{cases}$ أي $\begin{cases} -35 \leq x \leq 35 \\ x+2 \equiv 0[11] \end{cases}$ (حسب ما سبق)

ومنه $\begin{cases} -35 \leq x \leq 35 \\ x+2 \equiv 11k \end{cases}$ مع $k \in Z$ ومنه $\begin{cases} -35 \leq x \leq 35 \\ x \equiv 11k-2 \end{cases}$

لدينا: $(-35 \leq x \leq 35)$ يكافئ $(-3 \leq k \leq 3)$

ومنه نجد: $S = \{-35;-24;-13;-2;9;20;31\}$