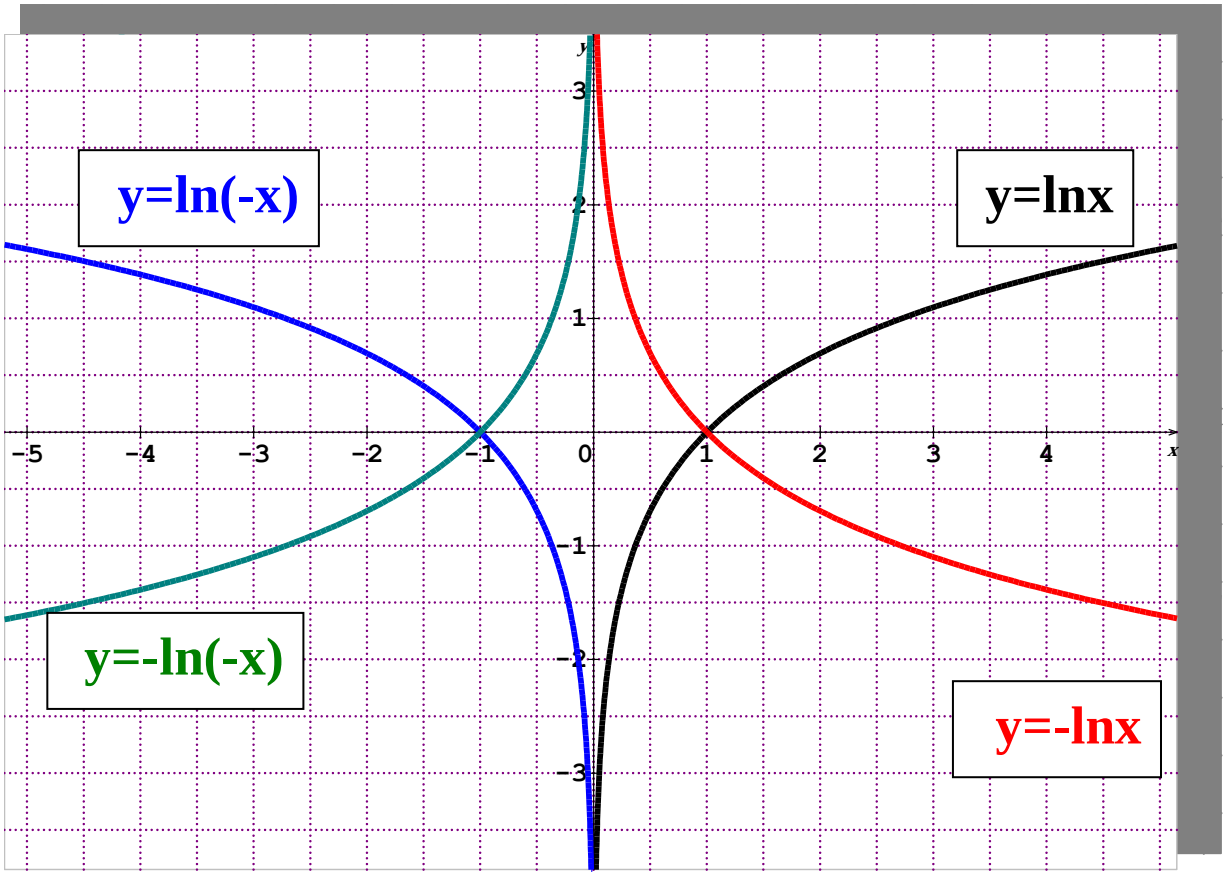
مجلة الرائد في الرياضيات

****

تمارين الدوال اللوغاريتمية في البكالوريا بين يديك

الشعب

علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات



BAC2020

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

مجلة الرائد في الرياضيات

****

تمارين الدوال اللوغاريتمية
في البكالوريا بين يديك

الشعب :علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات

الجزء الاول

تدريبات متنوعة

الجزء الثاني

تمارين البكالوريا الجزائرية

الشعب:العلوم التجريبية+تقني رياضي+رياضيات

1)المواضيع ، 2)الحلول(المجلة المرفقة)

الجزء الثالث

تمارين البكالوريات الاجنبية

1)بكالوريا ت جزائرية نظام قديم 2)بكالوريات أجنبية

BAC2020

إعداد :الأستاذ:بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

Facebook العربي الجزائري

ملخص نظري لدرس الدالة اللوغاريتمية

1)تعريف

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية معرفة على $]0;+\infty[$ هي الدالة التي نرمز لها بـ: $\ln$ كمايلي:

من أجل كل $x \succ 0$ و $y \in \mathbb{R}$: $y = \ln x$ تكافئ $x = e^y$.

2)نتائج وخواص

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما x و y ومن أجل كل عدد صحيح n :

أ) 1) $\ln x = \ln y$ معناه $x = y$ ، 2) $\ln x \prec \ln y$ معناه $x \prec y$

حالة خاصة: $\ln x = 0$ معناه $x = 1$ أي $\ln 1 = 0$ و $\ln x = 1$ معناه $x = e$ أي $\ln e = 1$.

ب) 1) $\ln(x.y) = \ln x + \ln y$ ، 2) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ ، 3) $\ln x^n = n \ln x$

حالة خاصة: 1) $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$ ، 2) $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ ، 3) $\ln x^2 = 2 \ln x$

ج) من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$\ln(x)^n = n \ln|x|$ حيث n عدد زوجي و $\ln(x)^n = n \ln x$ حيث n عدد فردي

3- أ)إشارة العبارة $\alpha \ln(ax+b)+\beta$

$\alpha \ln(ax+b)+\beta$ تنعدم عند القيمة $x_0 = \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha}} - b}{a}$ وإشارة العبارة $\alpha \ln(ax+b)+\beta$ هي:

1) إشارة $\alpha.a$ من أجل كل $x \geq x_0$.

2)عكس إشارة $\alpha.a$ من أجل كل $x \leq x_0$.

حالة خاصة:: من أجل كل $]0;1[$ $x \in$: $\ln x \prec 0$ و من أجل كل $]1;+\infty[$ $x \in$: $\ln x \succ 0$

ب) إشارة العبارة $\ln[u(x)]$

إشارة العبارة $\ln[u(x)]$ هي نفس إشارة العبارة $[u(x)-1]$ حيث $u(x) > 0$

4)حل المعادلة $a(\ln x)^2 + b(\ln x) + c = 0$

المعادلة $a(\ln x)^2 + b(\ln x) + c = 0$ يؤول حلها لحل الجملة : $\begin{cases} X = \ln x \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$

5)النهايات الشهيرة

1) $\lim\limits_{x \succ 0} \ln x = -\infty$ ، 2) $\lim\limits_{x \succ 0} x \ln x = 0$ و 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ 5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ وتكافئ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

تعم $\frac{\ln x}{\quad}$ ^{n}

6)الدالة المشتقة

1) الدالة $x \to \ln x$ قابلة للإشتقاق من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

2) $(\ln(ax+b))' = \frac{a}{ax+b}$ حيث a و b عددان حقيقيان و $ax+b \succ 0$

3) إذا كانت الدالة u موجبة تماما و قابلة للإشتقاق على المجال D فإن الدالة $x \to \ln[u(x)]$ قابلة للإشتقاق على المجال D حيث: $[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ (مشتقة دالة مركبة).

ملاحظة: إذا كانت الدالة u غير معدومة : $[\ln|u(x)|]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

حالة خاصة: $\left[\ln\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)\right]' = \left[\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|\right]' = \frac{a.d-b.c}{(ax+b)(cx+d)}$

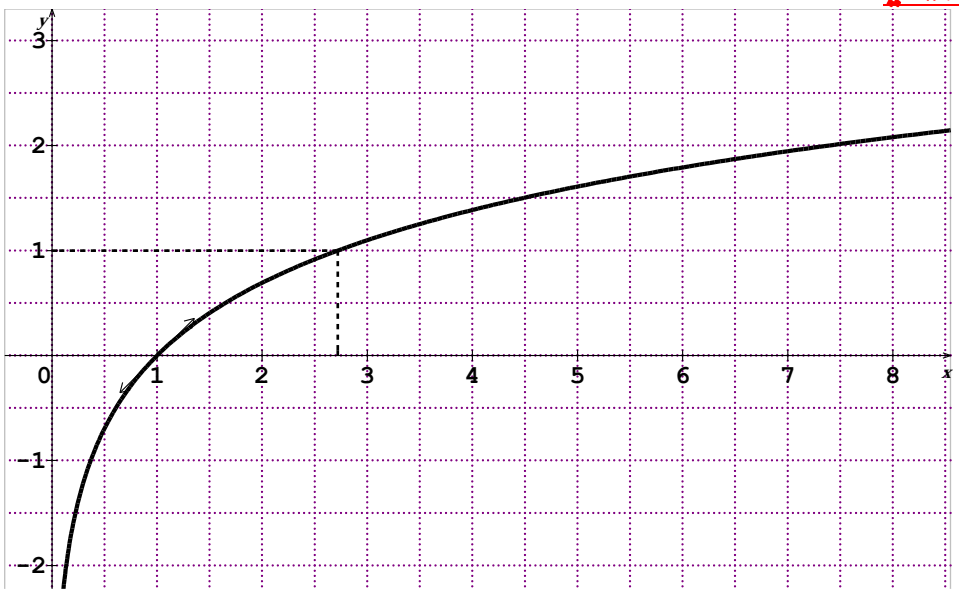
7)دراسة الدالة $x \to \ln x$

أ) دراسة التغيرات

الدالة $x \to \ln x$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وعليه جدول تغيراتها يكون كما يلي

x	0		1		e		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	+		+		+	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$
					e		

ب)التمثيل البياني



الجزء الأول: تدريبات متنوعة

التمريـــــن01

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln x - 1 = 0$ ، 2) $\ln(x-1) = 0$ ، 3) $\ln|x+1| = 0$ ، 4) $\ln(x^2 - 3x + 2) = 2\ln\sqrt{2}$ ، 5) $1 - (\ln x)^2 = 0$

6) $\ln(2x-3) = \ln(x-3) + \ln 5$ ، 7) $\ln(4x+5) - \ln(x-1) = 5\ln 2 + \ln(x)$ ، 8) $(\ln x)^2 - \frac{5}{2}\ln x + 1 = 0$

9) $\ln|2x+1| + \ln|x-1| = \ln 2$ ، 10) $\ln|e^{2x} - 1| = x$ ، 11) $\ln(e^{2x} - e^x + 1) = 0$ ، 12) $\ln^3 x + 3\ln^2 x - 4 = 0$

2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $\ln x \geq 1$ ، 2) $\ln(x+1) \leq 0$ ، 3) $\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \leq 0$ ، 4) $\ln(x^2 - 2x) \leq \ln(4x-5)$ ، 5) $\ln|x^2 - 1| \leq 0$

5) $(\ln x)^2 - \ln x - 2 \geq 0$ ، 7) $(\ln x + 1)(\ln x - 1) > 0$ ، 8) $\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} < 0$ ، 9) $2(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 + 3\ln x > 0$

التمريـــــن02

نعتبر كثير الحدود P للمتغير الحقيقي x حيث: $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6$

1) تحقق من أن: $P(x) = (2x-1)(x+2)(3-x)$ ثم استنتج حلول المعادلة $P(x) = 0$

2) استنتج مجموعة حلول المعادلتين التاليتين :

$2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 11(\ln x) = -6$ ، $2e^{3x} - 3e^{2x} = 11e^x - 6$

التمريـــــن03

ليكن كثير الحدود $P(x)$ حيث: $P(x) = x^3 - 3x - 2$

1) أحسب $P(-1)$ ، ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x) = 0$

2) استنتج حلول كلا من: المعادلة التالية : $(x+1)(\ln^2 x - \ln x - 2) = 0$.

*المتراجحة التالية: $(x+1)e^{2x} \leq (x+1)(e^x + 2)$

التمريـــــن04

عين مجموعة تعريف كلا من الدوال التالية ثم أدرس تغيراتها على مجالات تعريفها

1) $f(x) = \ln(x-1)$ ، 2) $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ ، 3) $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x}$ ، 4) $f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$

5) $f(x) = \ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)$ ، 6) $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$ ، 7) $f(x) = 1 + (\ln x)^2$ ، 8) $f(x) = 1 - \frac{1}{\ln x}$

9) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ ، 10) $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$ ، 11) $f(x) = \frac{x}{\ln|x-1|}$ ، 12) $f(x) = \frac{x+1}{x} - \ln|x-1|$

التمريـــــن05

عين الإجابة(أو الأجوبة) الصحيحة لكل سؤال من الأسئلة التالية :

f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$

1) f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)=x^2+2-2\ln x$

2) على $]0;+\infty[$ إشارة g' هي إشارة $x-1$.

3) g تقبل قيمة حدية عظمى تساوي 3 على $]0;+\infty[$.

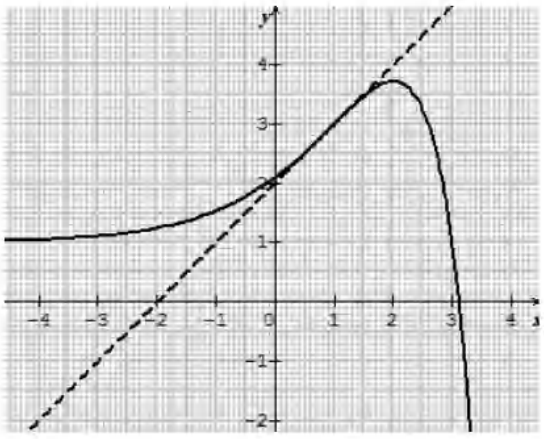
4) f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

5) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث $\alpha\in]1;2[$

6) منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $+\infty$.

التمريـــــن06

التمثيل البياني في الشكل المقابل هو منحنى لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.



المنحنى (C_f) يقبل يشمل النقطة $A(3;1)$ ويقبل مماسا يوازي محور الفواصل عند النقطة $B(2;1+e)$ ويقبل مستقيم مقارب معادلته $y=-1$ عند $-\infty$.

ويقبل مماسا يخترق (C_f) في النقطة $C(1;3)$.

1) عيّن الاعداد التالية : $f''(1)$ ، $f'(1)$ و $f'(2)$

2) اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة $C(1;3)$.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]3;+\infty[$ ، ثم استنتج اشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة الحلول المعادلة $f(x)=|m|$

5) شكل جدول تغيرات الدالة f.

6) لتكن g دالة عددية معرفة على المجال $]-\infty;\alpha[$ بـ: $g(x)=f(x)-\ln[f(x)]$.

أ) عبّر عن $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

ب) أستنتج اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

التمريـــــن07

اذكر دون تبرير إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة.

1) الدالة ln موجبة تماما على $]1;+\infty[$.

2) الدالة $f : x \mapsto \ln\left[-x(x+1)\right]$ معرفة على $]-1;0[$.

3) الدالة $f : x \mapsto \ln(x^2-1)$ متناقصة تماما على $]1;+\infty[$.

4) المعادلة $\ln x^2 = \ln(3x+4)$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

5) إذا كانت $f(x) = x\ln x$ فإن $xf'(x) = 1+x$

6) المتراجحة $1+\ln(2-x) \geq 0$ تقبل كمجموعة حلول المجال $]-\infty;2[$.

التمريـــــن08

اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل.

1) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 2(\ln x)^2 - \ln x - 3$

أ) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ، ب) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ ، جـ) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

2) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x) = x^2-2x-\ln(x-1)^2$ يقبل محور تناظر معادلته

أ) $x=1$ ، ب) $x=-1$ ، جـ) $x=2$

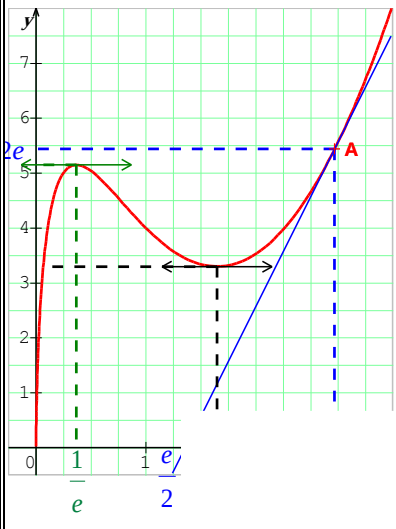
3) حل المعادلة : $\sqrt[3]{5-3x} = 2$ هو : أ) $x=1$ ، ب) $x=-1$ ، جـ) $x=2$

4) الدالة المشتقة للدالة f والمعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ هي:

أ) $f'(x) = \dfrac{-\ln 3}{x^2}e^{\frac{1}{x}\ln 3}$ ، ب) $f'(x) = \dfrac{\ln 3}{x^2}e^{\frac{1}{x}\ln 3}$ ، أ) $f'(x) = \dfrac{\ln 3}{2x^2}e^{\frac{1}{x}\ln 3}$

التمريـــــن09

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$. في الشكل الموالي مرسوم تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ و مماسه عند النقطة $A(e;2e)$ يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلته $\dfrac{e}{2}$.



نقبل أن $f(x) = 2x\left(a(\ln x)^2 + b\ln x + c\right)$ حيث a، b و c أعداد حقيقية

1. احسب $f'(x)$ بدلالة a ، b و c

2. باستعمال المعلومات في الشكل. عين $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$، $f'\left(\sqrt{e}\right)$ و $f'(e)$.

3. استنتج أ .

^{2}

4.عين نهاية α عند 0 (يمكن وضع $t=-\ln x$) ، ثم عين نهاية f عند $+\infty$.

5.بين أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=2(\ln x+1)(2\ln x-1)$

6.ادرس إشارة $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات f .

التمريـــــن10

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-4;+\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x-2\ln(1-2x) & ;-4\le x\le 0 \\ f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right) & ;x>0 \end{cases}$$

والـيكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ)احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ ، ثم بين أن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{1}{2}$.

ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f

ب) اكتب معادلتي نصفي المماسين عند النقطة O مبدأ الاحداثيات.

2-بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$: $f(x)-\ln x+\ln 2=0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}$ ثم فسر النتيجة بيانيا

3-أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]-4;+\infty[$.

4- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]-4;-3[$ ، جد $f(0)$ ثم استنتج اشارة $f(x)$

5- أرسم المنحنى (C).

6-نعتبر الدالة g_m العددية والمعرفة على المجال $[-4;0]$ بـ:

$g_m(x)=f_m(x)+1$ حيث m وسيط حقيقي غير معدوم.

بيّن أن جميع المنحنيات (C_m) الممثل للدالة g_m تشمل النقطتين $A(0;1)$ و $B(\alpha;1)$

الجزء الثاني: تمارين البكالوريات

شعبة العلوم التجريبية

التمرين 11: دورة 2019

f الدالة العددية المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$

واليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانيا. ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)ادرس اتجاه تغير f على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ وشكل جدول تغيراتها

3-نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيبرية "ln" في المعلم السابق.

أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{}+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)$ ثم فسير النتيجة بيانيا.

ب) ادرس وضعية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ)

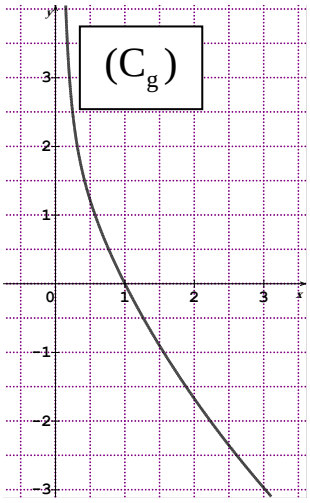
4)ارسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f).

6)g دالة معرفة على المجال $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ: $g(x)=f(-2x)$

دون حساب عبارة $g(x)$ حدّد اتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها

التمرين 12: دورة 2018

I-g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$



و (C_g) المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبين في الشكل

احسب $g(1)$ ثم استنتج حسب x إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ و (C_f)

تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ وبيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ،ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2-أ)بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$

ب)استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3)بيّن أن: $y=\dfrac{e^2}{e-1}x-\dfrac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ(T) مماس لـ (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور الفواصل ، ثم ا رسم المماس (T) والمنحنى (C_f)

4)عين ... الدالة ... حتى تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-em$ حلّين متمايزين.

التمرين13: دورة 2017

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]1;+\infty[\cup]-\infty;-1[$ بـ: $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$:D

و(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-بين أن الدالة f فردية وفسر ذلك بيانيا.

2-احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

استنتج ان (C_f)يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب.

3-أ-بين أنه من أجل كل x من المجال D: $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

ب- أستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8\prec\alpha\prec1,9$.

5- بيّن أن المستقيم(Δ) ذا المعادلة: $y=\frac{2}{3}x$ مقارب لـ (C_f)ثم أدرس وضعية (C_f)بالنسبة لـ (Δ).

6-إنشئ المستقيم(Δ)ثم المنحنى(C_f).

7-m وسيط حقيقي،ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وحلول المعادلة: $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

التمرين14:دورة 2017 الاستدراكية

I-نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\frac{1}{2};+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$

و(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب النهايتن التاليتين : $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-\frac{1}{2}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

2-أ-بين أنه من أجل كل x من $]-\frac{1}{2};+\infty[$: $f'(x)=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$.

ب-أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3- حل في المجال $]-\frac{1}{2};+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج اشارة $f(x)$.

4- بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثياها ، ثم أنشئ(C_f).

التمرين15:دورة 2016

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-\ln x$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g.

2) احـ[illegible] $\sqrt{2}$ [illegible]

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$

و(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)-أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب-شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1.

4)- أ- بيّن أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث: $y=x-1$ معادلة له.

ب-ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و (Δ).

5) ارسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C).

6) m عدد حقيقي . (Δ_m) المستقيم حيث: $y=mx-m$ معادلة له.

أ-تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي m، النقطة $A(1;0)$ تنتمي للمستقيم (Δ_m).

ب- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx-m$

التمرين16:دورة 2016 الاستدراكية

I- لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$

1)ادرس تغيرات الدالة g ،ثم شكل جدول تغيراتها.

2)بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0,34\prec\alpha\prec-0,33$.

3)استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$.

II- لتكن الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1-أ) بيّن أن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$ واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ثم فسر النتيجتين هندسيا.

ب) بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$.

جـ) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$، ثم شكل جدول تغيراتها.

د) ارسم المنحنى (C_f).(نقبل أن $f(\alpha)\simeq 3,16$).

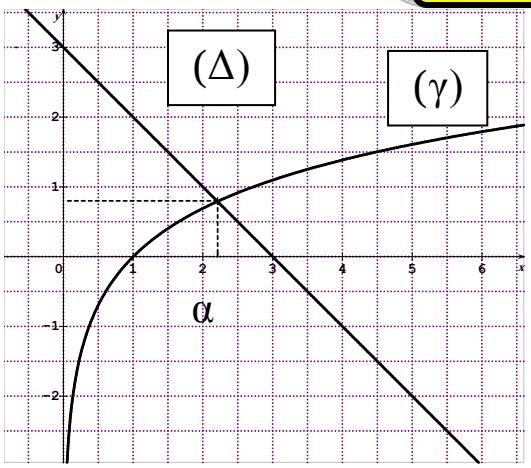
3)نعتبر الدالة العددية k المعرّفة على $]-1;+1[$ بـ: $k(x)=f(-|x|)$ و(C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ) بيّن أن الدالة k زوجية.

ب)بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم ارسمه(دون دراسة الدالة k)

جـ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة: $k(x)=m$.

التمرين17:دورة 2015



المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

I) (γ)التمثيل البياني للدالة $x\to\ln x$ و(Δ)المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ و αهي فاصلة نقطة تقاطع(γ)و(Δ)

1)بقراءة بيانية حدّد وضعية(γ)بالنسبة لـ(Δ)على$]0;+\infty[$

2)g الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$بـ: $g(x)=x-3+\ln x$

استنتج حسب قيم x إشارة$g(x)$ ثم تحقق أن: $2,2\prec\alpha\prec 2,3$

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$بـ:

$f(x)=(1-\frac{1}{x})(\ln x-2)$ و(C_f)تمثيلها البياني.

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} f(x)$ و$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنه من أجل كل$]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3)بيّن أن: $f(\alpha)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ، ثم أنشئ (C_f) على المجال$[0;e^2[$.

التمرين18:دورة 2014

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$بـ: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$و(C_f)تمثيلها البياني

1-أ)احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} f(x)$ و$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$،فسر النتيجتين هندسيا.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال$]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2-أ)ادرس وضعية المنحنى(C_f)بالنسبة إلى المستقيم (Δ)الذي معادلته: $y=1$.

ب)اكتب معادلة المماس(T) للمنحنى(C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ)بيّن أن المعادلة $f(x)=0$تقبل حلا وحيدا في المجال$]0;1[$حلا وحيدا α حيث $e^{-0,4}\prec\alpha\prec e^{-0,3}$

3) انشئ (T)والمنحنى (C_f).

4) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$بـ: $h(x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}$

و(C_h)تمثيلها البياني في في نفس المعلم السابق.

-أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$.ماذا تستنتج؟.

ب)إنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).

جـ)ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$

التمرين19:دورة 2013

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1)أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2)استنتج أنه ، من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)\succ 0$

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني

1)-أ)احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-1} f(x)$ فسر النتيجة هندسيا. ب-احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2)-أ) بيّن أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب)أدرس اتجاه تغير f على $]-1;+\infty[$ ،ثم شكل جدول تغيراتها

جـ)بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ،ثم تحقق أن $0\prec\alpha\prec 0,5$.

3)-أ)بيّن أن المستقيم $(\Delta): y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4)نقبل أن المستقيم (T)ذا المعادلة : $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

أ) أحسب x_0 . ب)أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f)

جـ) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

التمرين20:دورة 2012

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ: $f(x)=x+5+6\ln(\dfrac{x}{x-1})$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1)أ-احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0} f(x)$ فسر النتيجة هندسيا. ب-احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2)بيّن أنه من أجل كل $x\in]-\infty;0[$: $f'(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x(x-1)}$ استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ-بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x+5$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب-ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3,5\prec\alpha\prec-3,4$ و $-1\prec\beta\prec-1,1$

5) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

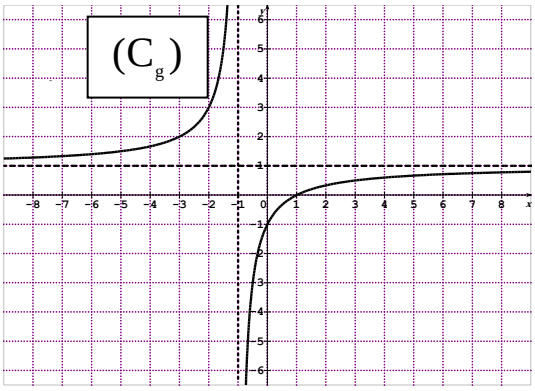
6) أ- نعتبر النقطتين $A(-1;3+6\ln\frac{3}{4})$ و $B(-2;\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{4})$

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)

ب- بيّن أن (AB) يمس (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيينها

التمرين21: دورة 2011

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$.



(C_g) تمثيلها البياني (الشكل المقابل) بقراءة بيانية:

أ- شكل جدول تغيرات الدالة g

ب- حل بيانيا المتراجحة: $g(x)\succ 0$

جـ- عين بيانيا قيم x التي من أجلها $0\prec g(x)\prec 1$

II) لتكن الدالة f والمعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا

2) أ- بين أنه من أجل كل $x\in]1;+\infty[$: $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

ب- احسب $f'(x)$ وادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات f

جـ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_0\in]3,62;3,63[$.

د- أرسم المنحى (C_f).

3- أ- باستعمال الجزء I) السؤال جـ ، عين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

التمرين22: دورة 2010

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=1+\ln(2x-1)$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} f(x)$

2) بيّن أن f متزايدة تماما على I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) عين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

4) أ) أثبت أنه من أجل كل x من I: $f(x) = \ln(x+a) + b$

حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب) أستنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة ln. ثم ارسم (C) و (C_f).

II) g الدالة المعرفة على المجال I بـ: $g(x) = f(x) - x$

1) احسب $\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} g(x)$ ثم بيّن أن $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) احسب g(1)، ثم بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]1,5;+\infty[$ حلا وحيدا α.

تحقق أن $2 \prec \alpha \prec 3$.

ب) ارسم (C_g) منحنى g على $]0,5;5[$ في المعلم السابق

4) استنتج إشارة g(x) على I ثم حدّد ضعية (C_f) و (d)

5) برهن أنه من أجل عدد حقيقي x من المجال $]1;\alpha[$ فإن: f(x) ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

التمرين23: دورة 2009

I- h دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

1. احسب $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x)$

2. بين أنه من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$. استنتج اتجاه تغير h، ثم أنجز جدول تغيراتها

3. احسب h(0) واستنتج إشارة h(x).

II- f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ كمايلي: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ نسمي (C_f) تمثيلها البياني

1. أ) احسب $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

ب) باستخدام النتيجة $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$، برهن أن $\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$.

جـ) استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

د) احسب $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

هـ) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

2. بين أنه من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. بين أن (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

4. أرسم (C)

شعبة :تقني رياضي

التمرين24: دورة 2019

I- g الدالة العددية المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=(x+1)(x+e)-e(x\ln x)$$

احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\ln(x+1)+\dfrac{e\ln x}{x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1-أ) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ، ثم بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(x+1)^2}$ ،

جـ) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

3-أ) بيّن أن المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α.

ب) تحقق أن : $0,7\le\alpha\le 0,8$

4- (Γ) التمثيل البياني للدالة : $x\to\ln(x+1)$ على المجال $]0;+\infty[$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln(x+1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (Γ) و (C_f)

جـ) أرسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f)

التمرين25: دورة 2018

I-نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;1[$ كمايلي: $g(x)=2-x+\ln x$

1- أدرس اتجاه تغير الدالة g المجال $]0;1[$.

2- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,15\le\alpha\le 0,16$

3- استنتج حسب x إشارة $g(x)$ المجال $]0;1[$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1-2x+\ln x}{x-1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. يمكن كتابة f(x) على الشكل $f(x)=\dfrac{1-2x}{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-1}$

ثم فسر النتيجة بيانيا

2- أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{g(\frac{1}{x})}{(x-1)^2}$،

ب) بيّن ان fمتزايدة تماما على $\left]1;\frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f)و المستقيم (Δ)ذي المعادلة : $y=-2$

4-ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) يعطى $f(\frac{1}{\alpha})=-1,8$

5-عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)|=m$ حليّن متمايزين.

التمرين26: دورة 2017

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$:$D_f=$

و(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1-أ-احسب النهايتين التالية : $\lim\limits_{x\to 1^{\prec}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2^{\succ}} f(x)$ ،ثم فسر النتيجتين بيانيا

ب-أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2-بين أنه من أجل كل x من D_f: $f'(x)=-2-\frac{2}{(x-1)(x-2)}$،ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3- أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، $(3-x)\in D_f$:$f(3-x)+f(x)=0$

ب- استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مركز تناظر يطلب تعيين احداثييه.

4- أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $]0,45;0,46[$.

ثم استنتج انها تقبل حلا أخر β يطلب تعيين حصرا له.

5-بيّن أن المستقيم(Δ)ذاالمعادلة:$y=-2x+3$مقارب لـ (C_f)ثم أدرس وضعية (C_f)بالنسبة لـ (Δ)

6-ارسم (Δ)و (C_f).

التمرين27:دورة 2017 الاستدراكية

I--نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2-\ln x}{x^2}$

1- احسب $\lim\limits_{x\to 0^{\succ}} g(x)$ و$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2- أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

3-بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,71\prec\alpha\prec 1,72$ثم استنتج إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة العددية fالمعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=-\frac{1}{2}x+2+\frac{-1+\ln x}{x}$

و(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1-أ) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2-أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3-نقبل أن $f(\alpha) \simeq 0,87$ و $f(\beta) = f(\gamma) = 0$ حيث $0,76 \prec \beta \prec 0,77$ و $4,22 \prec \gamma \prec 4,19$.

أنشئ في المعلم السابق المستقيم (Δ) المنحنى (C_f).

التمرين28:دورة 2016 م1

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1)$

1-أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

ب) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2-أ) بيّن أن للمعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,4 \prec \alpha \prec 0,5$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

II) f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بمايلي: $f(x) = 1 + (x-1)\ln(x+1)$.

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2-أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) بيّن أن : $f(\alpha) = -\alpha + 4 - \frac{4}{\alpha+1}$ ، ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

3) ليكن a عدد حقيقي من المجال $]-1;+\infty[$، نسمي (T_a) المماس للمنحنى (C) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ عند النقطة ذات الفاصلة a.

نضع من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$

أ- تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x) = f'(x) - f'(a)$.

ب-باستعمال اتجاه تغير g، عيّن إشارة $h'(x)$ حسب قيم x واستنتج اتجاه تغير h على المجال $]-1;+\infty[$

جـ-حدّد الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (T_a).

4-أ) بيّن أنه يوجد مماسان (T_a) يشملان النقطة $A(1;0)$ يطلب تعيين معادلتيهما.

ب) ارسم المماسين والمنحنى (C).

التمرين29:دورة 2016 م2

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x - x\ln x$.

1)أ-احـ $\lim g(x)$ $\lim g(x)$

ب)أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2)بيّن ان المعادلة $g(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3,5 \prec \alpha \prec 3,6$

3) استنتج إشارة العبارة $g(x)+1$ على المجال $]0;+\infty[$.

II)نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بمايلي: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=4cm$.

1)بيّن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x=0$ و $y=0$

2-أ)برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

ب)بيّن أن الدالة f متزايدة على $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

جـ)اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

د)أحسب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، فسّر النتيجة هندسيا.

3)أ-بيّن أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$.

ب-استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدوّر النتائج إلى 10^{-2}) جـ-أرسم (C_f) .

4)نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x وm وسيط حقيقي: $x^2+x-2m(x+1)=\ln(x^2)$..(E)

أ-تحقّق أن المعادلة (E) يؤول حلّها إلى حل المعادلة : $f(x)=\dfrac{1}{2}x-m$

ب -عيّن بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلّين متمايزين.

5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $h(x)=\dfrac{\ln|x|}{-|x|-1}$ و (C_h) منحناها البياني في المستوي.

أ- بيّن أن h زوجية. ب-أرسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f) .

التمرين30:دورة 2015

I)h دالة معرفة على $]-2;+\infty[$ بمايلي: $h(x)=(x+2)^2+2-2\ln(x+2)$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$ ، ($\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-2}h(x)$).

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أستنتج أنه من أجل كل x من $]-2;+\infty[$ ، $h(x)\succ 0$.

II) f دالة معرفة على $]-2;+\infty[$ بمايلي: $f(x)=x+1+\dfrac{2}{x+2}\ln(x+2)$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول 1cm)

1) أحسب $\lim f(x)$ و $\lim f(x)$ ... ثم أحسب $\lim f(x)$

2) أ) بين بيّن أنه من أجل كل $x\in]-2;+\infty[$: $f'(x)=\frac{h(x)}{(x+2)^2}$.

ب)أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-2;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

4) أ) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثييها.

ب)أرسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C_f).

III) g دالة معرفة على $]-2;+\infty[$ بمايلي: $g(x)=|x+1|+\frac{2}{x+2}|\ln(x+2)|$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to -1^{>}}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ و $\lim\limits_{x\to -1^{<}}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة إلى g ؟.

2) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

3)انطلاقا من المنحنى (C_f) أرسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم السابق.

التمرين31:دورة جوان2014

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

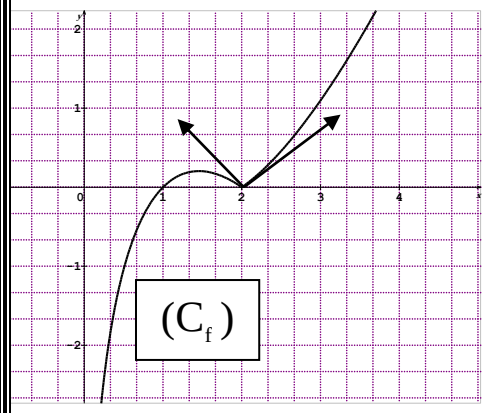
I- g دالة معرفة على $[0;3]$ بـ: $g(x)=x\ln x+x$.

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2-أ)بيّن أن المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;3]$ ثم تحقق أن $1,45\prec\alpha\prec 1,46$.

ب)استنتج إشارة $g(x)-2$.

II – التمثيل البياني المقابل (C_f) هو للدالة f والمعرفة على المجال $[0;3]$ بـ: $f(x)=|x-2|\ln x$



1)باستعمال (C_f) ضع تخمينا حول قابلية اشتقاق f عند2

2)أثبت صحة تخمينك.

3)أدرس تغيرات الدالة f

III-h الدالة المعرفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ بـ: $h(x)=(2-\cos x)\ln(\cos x)$

1)بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $x=\frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h) حيث (C_h) منحنى الدالة h

2)أدرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها وارسم (Δ) و (C_h).

التمرين32:دورة جوان2013 م1

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$

1)أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال

2)بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,31 \prec \alpha \prec 0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$

3)استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II- f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+\left[2-\ln(x+1)\right]^2$ و (C_f) تمثيلها البياني

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- بيّن أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$

3-ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكّل جدول تغيراتها.

4-بيّن أن: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left[1+(\alpha+1)^2\right]$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5-مثّل المنحنى (C_f) على المجال $]-1;2[$.

III- (Γ) المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x.

1-أثبت أن المسافة AM تعطى بالعبارة: $AM=\sqrt{f(x)}$.

2-الدالة k معرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ-بيّن أن للدالتين k و f نفس إتجاه التغير على المجال $]-1;+\infty[$.

ب-عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ)، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

جـ-بيّن أن: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

التمرين33:دورة جوان2013 م2

I- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x-1)e^x$

1-أدرس تغيرات الدالة g.

2- بيّن أنه، من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $1+(x-1)e^x\geq 0$

II- f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-1}{x};x\succ 0\\ f(0)=1\end{cases}$

1-أ-بيّن أن f مستمرة على $]0;+\infty[$.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2-أ-تحقق أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثم شكّل جدول تغيراتها.

III- n عدد طبيعي حيث $n\geq 1$، f_n الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x$

و (C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- $\dfrac{1}{x}$.

3- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

4-بيّن أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين احداثييها.

5-أ- بيّن أنه ، يوجد عدد حقيقي وحيد من $]0,3;0,4[$ بحيث: $f_1(\alpha_1)=0$ بحيث: $\alpha_1 \in]0,3;0,4[$.

ب-بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) \leq 0$

ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]\alpha_1;1[$ بحيث: $f_n(\alpha_n)=0$.

جـ-بالاعتماد على الجزءII ، بيّن أنه ، من أجل كل x من $]0;1[$: $\frac{e^x-1}{x} \leq e-1$.

التمرين34:دورة جوان2012

I-g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+a+b\ln(x)$

1-عيّن العددين الحقيقيين a وb علما أن (C_f) يقبل في النقطة $A(1;-1)$ مماسا معامل توجيهه 4

2- نضع : $a=-2$ و $b=2$. أ) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب)بيّن أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]0;+\infty[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II-f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-2-\frac{2\ln(x)}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- أ) احسب $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. ب) احسب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

جـ)استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

2-أ)بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x-2$ مقارب لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

ب)بيّن أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ثم جد معادلة له

جـ) نأخذ $\alpha=1,25$ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حليّن x_1 و x_2 حيث:

$0,6 \prec x_1 \prec 0,7$ وّ $2,7 \prec x_2 \prec 2,8$. ثم ارسم كلا من (Δ) و (T) و (C_f).

3-ناقش بيانيا ،حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وحلول المعادلة : $(m+2)x+2\ln(x)=0$

التمرين35:دورة جوان2011

f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{a+b\ln(2x)}{4x^2}$ حيث a وb عددان حقيقيان

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)عيّن a وb بحيث يكون المماس في النقطة $A(\frac{1}{2};1)$ لـ (C_f) موازيا لحامل محور الفواصل.

2) g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{1+2\ln(2x)}{4x^2}$ المنحنى الممثل لها في المعلم السابق (C_g)

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$ وفسر النتيجتين بيانيا

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ،ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ) حل في $]0;+\infty[$ المعادلة : $g(x)=0$.

د) أنشئ (C_g).

التمرين36:دورة جوان2010

g دالة معرفة على $]1;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=2x+\ln x$

أ) احسب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

جـ) بيّن أنه من أجل كل $x\in]1;+\infty[$: $g(x)\neq 0$.

2) f دالة معرفة على $]1;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\frac{6\ln x}{2x+\ln x}$ و (C_f) التمثيل البياني لها

أ) بيّن أن: $f(x)=\frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$. ب)احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ماذا تستنتج؟

جـ) ادرس اتجاه تغير الدالة f. ،شكل جدول تغيرات f

د)ما هي قيمة k بحيث تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين

هـ)جد معادلة للمماس (Δ_1) لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها1 .

3) h دالة معرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $h(x)=f(e^x)$ واليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ) شكل جدول تغيرات الدالة h. ب)جد معادلة للمماس (Δ_2) لـ (C_h) عند النقطة التي فاصلتها1

جـ) أ

شعبة الرياضيـــات

التمرين37:دورة 2019

f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x \ ; \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

و(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.الوحدة 3cm

1)برهن أن:

- إذا كان $x>1$ فإن: $1-x-2x\ln x<0$

- إذا كان $0<x<1$ فإن: $1-x-2x\ln x>0$.

2-أ)أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0من اليمين .

أكتب معادلة لنصف المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم.

ب) ادرس الوضع النسبي للمماس (Δ) للمنحنى (C_f).

جـ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4-أ) أكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) الموازي للمستقيم (Δ)

ب)بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1;+\infty[$ حلا وحيدا α،ثم تحقق أن $1,76\prec\alpha\prec1,77$.

جـ) اكتب معادلة للمستقيم (d) الذي يوازي(Δ) ويشمل النقطة ذات الاحداثيين $(\alpha;0)$

- ارسم كلا من (T) ، (d) و (Δ) ثم المنحنى (C_f) في المجال $[0;\alpha]$.

5) m وسيط حقيقي ، ناقش وحسب قيم m عدد حلول المعادلة : $x^2\ln x+m=0$ في المجال $[0;\alpha]$

التمرين38:دورة 2018

f الدالة العددية المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كمايلي: $\begin{cases} f(x)=x+1-\dfrac{1}{\ln x};x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\} \\ f(0)=1 \end{cases}$

و(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-أ) بيّن أن f مستمرة عند 0 بقيم أكبر

ب) أحسب $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

2-أ)احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$.

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3)بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

ثم أدرس [illegible] (C_f) [illegible] (Δ)

4)بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ω فاصلتها α حيث $1,49<\alpha<1,5$

ثم بيّن أن معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ω هي من الشكل: $y=(\alpha+3+\frac{1}{\alpha})(x-\alpha)$

5) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

6) h الدالة العددية والمعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كمايلي: $h(x)=1-x+x\ln x$.

أ)بيّن أن الدالة h متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و اشارة $h(x)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب) بيّن أنه من أجل كل $x>1$: $f(x)-x+\frac{1}{x\ln x}=\frac{h(x)}{x\ln x}$

واستنتج أنه من أجل كل $x>1$: $x-\frac{1}{x\ln x}<f(x)<x+1$.

7) A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=\alpha$ و $x=e$ (e أساس اللوغاريتم النيبري)

بيّن أن : $\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)-\ln(\alpha+1)<A<\frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)$

التمرين39:دورة 2017

I--نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x$

1- أدرس إتجاه تغير الدالة g.

2-بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من $]1,76;1,77[$ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $\begin{cases} f(x)=\frac{x+1}{x-\ln x};x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-أثبت أن الدالة f مستمرة عند العدد 0 من اليمين،ثم أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{f(x)}{x}$ و فسر النتيجة بيانيا

2- بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$.

3-أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وفسر ذلك بيانيا ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4-لتكن h الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $h(x)=x-\ln x$.

أ-بين أن: من أجل كل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $h(x)\succ 0$ واستنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=1$.

ب-أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)\simeq 2,31$)

التمرين40:دورة 2017 الإستثنائية

I--نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=x+2-\ln x$

- أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x)=\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)$

و(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-بين أن:من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x)=\frac{-g(x^2)}{2x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

2-أ) أحسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x)+f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

جـ) شكل جدول تغيرات الدالة f.

3-بيّن أن المستقيم(Δ)ذا المعادلة:$y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}$مقارب لـ (C_f).ثم ادرس وضعية (C_f)بالنسبة لـ(Δ)

4-أ)أثبت أنه يوجد مماسان للمنحنى (C_f)معامل توجيه كل منهما $\left(-\frac{1}{2}\right)$ثم جد معادلة لكل منهما.

ب)بيّن أن المنحنى(C_f)يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث:

$2<\alpha<2,1$ و $-0,4>\beta>-0,5$.

5- أرسم المماسين و المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

6-باستعمال(C_f)،عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة$x(e-2m)=\ln(x^2)$حلا وحيدا

التمرين41:دورة 2016

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=1+x^2+2\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g.

2) بيّن أن المعادلة: $g(x)=0$تقبل في المجال $]0,52\,;0,53[$ حلا وحيدا α.

3) استنتج اشارة $g(x)$ المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=-x+\frac{3+2\ln x}{x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2-أ)بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$.

ب)شكل جدول تغيرات الدالة f. جـ) تحقق أن $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)$ ثم جد حصرا له.

3-أ)احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب)ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لمستقيمه المقارب المائل (Δ) .

جـ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة له.

4) نقبل ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_0 ، x_1 حيث:

$0,22\prec x_0\prec 0,23$ و $2,11\prec x_1\prec 2,13$.

أنشئ (T)، (Δ) و (C_f).

5) m وسيط حقيقي : ناقش بيانيا وحسب قيم m، عدد حلول المعادلة: $3+2\ln x-mx=0$

التمرين42:دورة جوان2015

f الدالة معرفة بـ: $f(0)=1$ ومن أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=1-x^2\ln x$.

و (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين.

ب) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{f(x)-1}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

2)أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0;+\infty[$.

ب)تحقق أن : $1,531\prec\alpha\prec 1,532$.

4) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=f(|x|)$.

و (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ) ادرس شفعيه الدالة g. ب) أنشئ المنحنى (C_g) على المجال $[-2;2]$

التمرين43:دورة جوان2014

1) f الدالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)$.

و (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ)ادرس تغيرات الدالة f.

ب)أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e.

ج) عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم أسم (C_f) على المجال $]0;e^2]$

2) g الدالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-\ln x$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) ادرس تغيرات الدالة g.

ب)عيّن الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم أرسم (C_g) على المجال $]0;e^2]$.

التمرين44:دورة جوان2013

I-1-الدالة u معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $u(x)=e^x-3x+4-e$

أ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة u.

ب-بيّن أنه ، من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $e^x-e\succ 3x-4$

2-الدالة v معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$

أ-بيّن أن: $v'(1)=0$ (v' يرمز إلى المشتقة للدالة v)

ب-أثبت أنه ،من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $v(x)\le 0$

جـ-أثبت أنه ،من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$

3-أثبت أنه ،من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}\ge 0$

II-f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=e^x-ex+\frac{\ln x}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2-بيّن أن f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وشكّل جدول تغيراتها

3-أحسب $f(1)$ ،ثم مثل المنحنى (C_f) على المجال $]0;2,5]$

التمرين45:دورة جوان2012

I) g دالة معرفة على $]-1;3[$ بـ: $g(x)=2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبلا حلين احدهما معدوم والآخر α يحقق: $-0,8 \prec \alpha \prec -0,7$.

3)عيّن ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

4) h دالة عددية معرفة على $]-1;3]$ بـ: $h(x)=[g(x)]^2$

أ)أحسب $h'(x)$ بدلالة كلا من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب)عيّن إشارة $h'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة h .

II) f دالة عددية معرفة على $]-1;3]$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(x+1)} \; ; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1)بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ثم أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

2)أ-بيّن أنه من أجل كل $x\in]-1;0[\cup]0;3]$ ، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$.ثم استنتج أتجاه تغير الدالة f

ب- بيّن أن: $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$ ،ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

جـ-أحسب $f(3)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات f

3)أ-بيّن أنه من أجل كل $x\in]-1;3]$ فإن: $x-\ln(x+1)\geq 0$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T).

4) عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي لـ (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3

5) أرسم (T) ، (T') و (C_f) .

6)ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$

التمرين46:دورة جوان2011

1) g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+\ln(x^2)-1$

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ب)أحسب $g(1)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$.

2) f الدالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=(1-\frac{1}{x^2})(\ln x)$.

و (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ)بيّن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وأن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) (δ) المنحنى الممثل للدالة $x\to \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$.

- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى للمنحنى (δ) ثم جد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x$ ، ماذاتستنتج ؟.

- أرسم (δ) و (C_f).

التمرين47:دورة جوان2010

g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=x-1-2\ln x$ و و (C_g) المنحنى الممثل لها

1-احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} g(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

2- أ) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

ب) أدرس تغيرات الدالة g. جـ) أحسب $g(1)$

د) برهن ان المعادلة $g(x)=0$ تقبلا حلين مختلفين احدهما α حيث $3,5\prec\alpha\prec3,6$.

هـ) استنتج اشارة $g(x)$ ثم اشارة $g(\frac{1}{x})$.

3-f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $\begin{cases} f(x)=-x^2+x+x^2\ln x \ ; x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

أ-احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسيا.

ب-احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

جـ-بيّن أنه من أجل ... فإن $\frac{1}{}$

واستنتج اتجاه تغير الدالة f. د-شكل جدول تغيرات الدالة f بيّن أن $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2}$

و استنتج حصرا للعدد $f(\frac{1}{\alpha})$

4-أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f على المجال $[0;3]$

الجزء الثالث:بكالوريات جزائرية و أجنبية

بكالوريات جزائرية-نظام قديم

التمرين 48:دورة جوان95 ع -ش

1ـ fدالة عددية للمتغيّر الحقيقي x معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\ln x$

أ) احسب نهايات الدالة f عند حدود المجال $]0;+\infty[$

ب)ادرس تغيرات الدالة f

2- نسمي(Γ)المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ) اكتب معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحنى (Γ).

ب)اكتب معادلة المماس لـ(Γ)عند النقطة ω ذات الترتيب 0

بين ان المنحنى (Γ) يقبل نقطة انعطاف E. اكتب معادلة لمماس للمنحنى (Γ) عند هذه النقطة.

ج)ارسم بعناية المماسين المذكورين سابقا ثم ارسم (Γ)

التمرين 49:دورة جوان98 ع -ش

I ـ ϕ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $\phi(x)=x^2-4x+3+6\ln|x-2|$

1 ـ أحسب $\phi(1)$ و $\phi(3)$.

2 ـ أدرس تغيرات الدالة ϕ و استنتج إشارة $\varphi(x)$

II ـ لتكن f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي: $f(x)=x+2-\frac{5}{x-2}-\frac{6\ln|x-2|}{x-2}$

و(Γ) المنحني البياني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 ـ أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$: $f'(x)=\frac{\phi(x)}{(x-2)^2}$.

ب) استنتج تغيرات الدالة f.

جـ) بيّن أن المنحني(Γ) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما مائل يطالب تعيين معادلتهما.

د) احسب $f(-1)$، $f(0)$ ، $f(4)$و$f(-4)$ بالتقريب إلى $\frac{1}{10}$

ـ تحقّق أنّ النقطة $\omega(2;4)$ مركز تناظر للمنحني(Γ)ثم أرسم(Γ)

التمرين 50:دورة جوان2001 ع

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$ كما يلي: $f(x)=x+\ln|e^x-2|$ وليكن(C)المنحنى البياني المـ[illegible] الوحدة 2cm)

1 –أ- أدرس تغيرات الدالة f .

ب- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$ ، $f(x)=2x+\ln\left|1-2e^{-x}\right|$

2-أ-بين أن (C)يقبل مستقيمين مقاربين $(\Delta): y=2x$ و $(\Delta'): y=x+\ln 2$

ب- عين نقط تقاطع (C)مع محور الفواصل .

جـ-أنشئ المنحنى (C)

التمرين 51:دورة جوان2004ع

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=1-\dfrac{\ln x^2}{x}$

وليكن(C)المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس$(O;\vec{i};\vec{j})$

1)- أدرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

- أثبت أنّ (C)يقطع المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$ في نقطتين يطلب تعيين احداثياتهما.

2) احسب : $f(-x)+f(x)$ ماذا تستنتج ؟.

3) بين ان المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]-1;-0,5[$.

4) أثبت أن (C)يقبل مماسا (T)يشمل النقطة A(0;1) ويمس المنحنى(C)في نقطتين يطلب تعيين احداثياتهما ثم أوجد معادلة للمماس (T) .

5) أرسم (T)ثم (C)

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx+1$

7) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x)=1+\dfrac{\ln x^2}{|x|}$ وليكن(γ) تمثيلها البياني

- بين ان g زوجية .

- دون دراسة تغيرات g ، ارسم (γ) علل ذلك.

بكالوريات اجنبية

التمرين 52:عن بكالوريا تونس 2018

ترجمة وتصرف الا ستاذ:بالعبيدي م العربي

في الجزء المرفق الشكل (Γ) يمثل منحنى الدالة u في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $u(x)=x-1-4\ln x$.

(Γ) يقبل مقاربين أحدهما حامل محور التراتيب والاخر مائل (D) ذو المعادلة $y=x$ بجوار $+\infty$

(Γ) يقبل مماسا وحيدا يوازي محور التراتيب عند النقطة ذات الفاصلة 4 .

(Γ) يقطع المحور $(O;\vec{i})$ في نقطتين فاصلتهما 1 و α على الترتيب .

أ) بقراءة بيانية: 1) أحسب كلا من : $u(1)$ ، $u(\alpha)$ ، $u'(4)$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+}u(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u(x)}{x}$.

2) عيّن إشارة كلا من : $u(x)$ و $u'(x)$.

ب) نعتبر f الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x^4}-(x-1)+4\ln x$

وليكن (C) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-أ) تحقق انه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ فإن: $f(x)=e^{u(x)}-u(x)$

ب)بيّن أن $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$.

2- أ) تحقق انه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=u'(x)\left[e^{u(x)}-1\right]$.

ب)بيّن أنه يكون : $f'(x)>0$ إذا وفقط إذا ، $x\in]1;4[\cup]\alpha;+\infty[$ ،ثم شكل جدول تغيرات f.

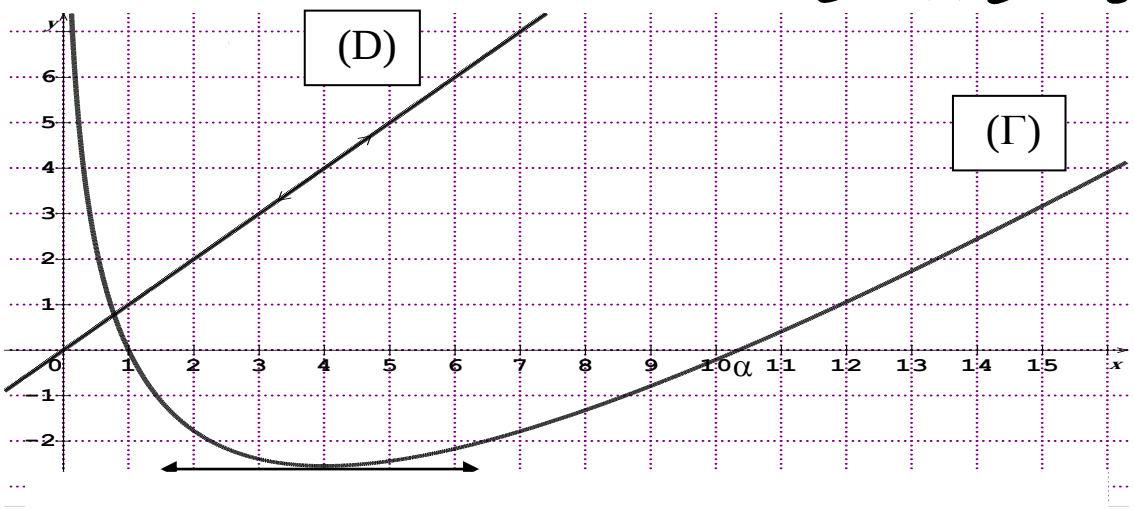
3- أ) تحقق انه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن: $e^x-2x>0$.

ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و (Γ)

جـ) أرسم المنحنى (C) في الجزء الرفق على المجال $]0;15[$

.....

الجزء الرفق:المنحنى (Γ) الممثل للدالة u



التمرين 53:عن بكالوريا المغرب 2017

I) لتكن الدالة g والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$

1) تحقق ان $g(1)=0$.

2) انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g المقابل

بيّن : أن $g(x)\le 0$ من أجل كل x من $]0;1]$

: أن $g(x)\ge 0$ من أجل كل x من $[1;+\infty[$

x	0		$+\infty$
g'(x)		+	
g(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

II) نعتبر الدالة العددية f والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) بيّن أن : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ثم فسر النتيجتين بيانيا .

2-أ) بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب) بيّن أن الدالة متناقصة على المجال $]0;1]$ ومتزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

3-أ) حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة $\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=0$.

ب) أستنتج أن (C_f) يقطع المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ في نقطتين يطلب تعيين احداثياهما

ج) بيّن أن $f(x)\le x$ من أجل كل x من $[1;2]$، استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (D) على $[1;2]$

4- إنشئ كلا من المستقيم (D) والمنحنى (C_f) في نفس المعلم السابق على المجال $]0;5[$.

التمرين 54:عن بكالوريا المغرب 2014

(بتصرف /الاستاذ : محمد جبالي)

I) لتكن الدالة g والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2) احسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) بيّن أن : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة الاولى بيانيا .

2) بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$.

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم ضع جدول تغيراتها.

4) بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $(\ln x)^2+2\ln x+\frac{1}{x^2}-\geq 0$.

5) احسب $f(2)$ ، $f(3)$، $f(4)$ و $f(5)$ ، ثم إنشئ المنحنى (C_f) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6) لتكن الدالة العددية h والمعرفة على $]-\infty;2[$ كمايلي: $h(x)=(1+\ln(2-x))^2+\frac{1}{(2-x)^2}$

وليكن (C_h) المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

بين أن يمن استنتاج المنحنى (C_h) من (C_f) ثم أنشئه في المعلم السابق.

التمرين 55:عن بكالوريا السنغال 2016

(ترجمة وتصرف بسيط الاستاذ : محمد جبالي)

الجزءأ: لتكن الدالة g والمعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=-2\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$

1-أ)احسب نهايتي g ، على طرفي مجال تعريفها.

ب)احسب $g'(x)$ ، وادرس إشارته ، ثم شكل جدول تغيرات g.

2-أ)بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حليّن أحدهما 0 والآخر α ينتمي إلى المجال $]-0,72;-0,71[$

ب)حدّد إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

الجزءب:لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{\ln(x+1)};x>-1;x\neq 0 \\ f(x)=(1+x)e^{-x-1};x\leq -1 \end{cases}$ و $f(0)=0$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) احسب نهايتي f، على طرفي مجال تعريفها.

2-أ) ادرس استمرارية f عند 1- وعند 0.

ب)ادرس اشتقاقية f عند 1-، ثم فسر النتيجتين هندسيا.

3-أ) بيّن أنه ، من أجل كل x من $]-1;+\infty[-\{0\}$: $f'(x)=\frac{-x.g(x)}{\ln^2(x+1)}$

ب) احسب $f'(x)$ على المجال $]-\infty;-1[$.

جـ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f، وشكل جدول تغيراتها.

4-أ)اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ب)أنشئ المماس (T) وكذا نصفي المماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1- ، ثم أنشئ المنحنى (C_f).

تعط

التمرين 56:عن بكالوريا المغرب 2015

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$ وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الوحدة 2cm .

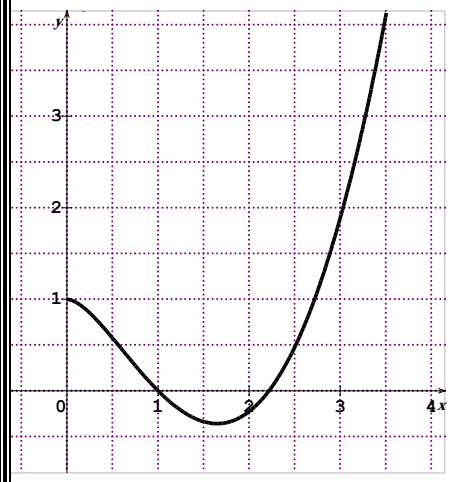
I-1)بيّن أن مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$.

2-أ)احسب $\lim\limits_{x\to e^<} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to e^>} f(x)$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها بيانيا.

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ يطلب تحديده.

جـ) $\lim\limits_{x\to 0^>} f(x)$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها بيان بيانيا.(لاحظ : $x(1-\ln x)=x-x\ln x$)

3-أ)بيّن أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$.



ب) بيّن أن الدالة f متناقصة على المجال $]0;1]$ ومتزايدة على كلا من المجالين $]1;e]$ و $]e;+\infty[$

جـ)شكل جدول تغيرات الدالة f على D_f .

II) لتكن الدالة g والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$ و (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (أنظر الشكل)

1)أ-حدد بيانيا عدد حلول المعادلة $g(x)=0$.

ب-نعطي جدول القيم التالية:

x	2,1	2,2	2,3	2,4
g(x)	–0,14	–0,02	0,12	0,28

بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا α بحيث $2,2<\alpha<2,3$

2-أ)تحقق من أنه من أجل كل x من D_f : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

ب) بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى (C_f) في نقطتين فاصلتاهما 1 و α

جـ) حدد إشارة $g(x)$ انطلاقا من المنحنى (C_g) على المجال $]1;\alpha[$

بيّن $f(x)-x\le 0$ من أجل كل x من $]1;\alpha[$.

3) إنشئ في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

التمرين 57:عن بكالوريا المغرب 2013

الجزء1: f الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-2\sqrt{x}+2$.

1-بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. 2- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 من اليمين.

3- أدرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

الجزء2: g الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\ln(x-2\sqrt{x}+2)$.

و(C)تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-\ln x]$ وفسر النتيجة الثانية بيانيا.

2-أثبت أن $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=-\infty$ وفسر النتيجة بيانيا.

3- أدرس تغيرات الدالة g.

4-أدرس الوضع النسبي للمنحنى(C) والمنحنى (Γ) المثل للدالة $x\to\ln x$.

5-أنشئ المنحنيين (Γ) و (C).

6- أشرح كيف يمكن الحصول على المنحنى (C') المثل للدالة k المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة $k(x)=\ln(ex-2e\sqrt{x}+2e)$ ، ثم أرسم المنحنى (C').

التمرين 58: بكالوريا كاليدونيا الجديدة 2010

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to0} g(x)$ ، ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2. ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1,8<\alpha<1,9$.

استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1$ و $\|\vec{j}\|=4$.

1. أ. بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$.

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

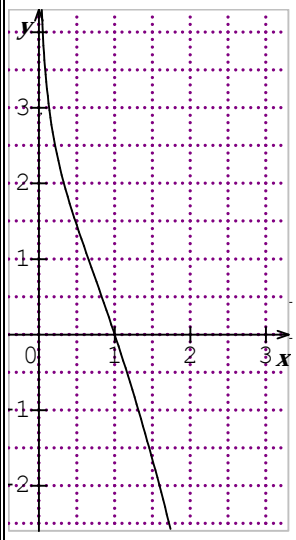
جـ.أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in[1;+\infty[$ ، $0\le f(x)\le\dfrac{\ln x}{x^2}$.ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د. بين أن $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$ ، ثم احصر لعدد $f(\alpha)$.

-2

التمرين 59: بكالوريا فرنسا/Polynésie/تقني/2010

(ترجمة وتصرف بسيط الأستاذ : محمد جبالي)



I) المنحنى (C_g) المقابل هو التمثيل البياني للدالة g المعرّفة على $]0,+\infty[$ بـ:
$g(x)=1-\ln x-x^2$.

بقراءة بيانيّة عيّن إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـِ: $f(x)=\frac{2\ln x}{x}-2x+4$

يرمز (C_f) إلى منحنيها في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$؛ [وحدة الطول $2cm$]

1)ا- احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، و فسّر النتيجة الأولى هندسيّا.

ب- أثبت أنّ المستقيم (D) ذا المعادلة $y=-2x+4$ مقارب مائل لـ C_f.

جـ- ادرس الوضعيّة النسبيّة للمنحني C_f والمستقيم (D).

2)ا- بيّن أنه ، من أجل كل عدد x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2g(x)}{x^2}$.

ب- استنتج تغيّرات f ، و شكّل جدول تغيّراتها.

جـ- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّيْن α و β حيث: $0,4\prec\alpha\prec 0.5$ و $2,3\prec\beta\prec 2,4$.

3)ا- أنشئ المنحني C_f.

ب- يُعطى المستقيم (D_m) ذو المعادلة $y=mx-m+2$ ، حيث m وسيط حقيقي.
بيّن أنه عندما يتغيّر m في $\mathbb{R}$ ، فإنّ (D_m) يدور حول نقطة يطلب تعيين إحداثيّيْها.

جـ- ناقش بيانيّا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة
$2\ln x-(m+2)x^2+(m+2)x=0$.

ملاحظة: للأمانة أقول: لقد تصرّفتُ في الموضوع ، حتّى يتناسب مع البرنامج الجزائري و مدّة الامتحان و يتماشى مع العتبة التي حدّدتها وزارة التّربية هذه السّنة.

التمرين 60:عن بكالوريا المغرب 2009

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كمايلي : $f(x)=2\ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2)$.و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ-تحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $e^x-2\sqrt{e^x}+2=(\sqrt{e^x}-1)^2+1$ ثم استنتج أن f معرفة على $\mathbb{R}$.

ب-بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x: $1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\succ 0$

2- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وبيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ln 4$ وفسر النتيجة الثانية هندسيا.

3- أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x}-1)}{\ldots}$ ثم تحقق أن $f'(0)=0$

ب-أدرس إشارة $(\sqrt{e^x}-1)$ على $\mathbb{R}$ واستنتج أن f متزايدة على $[0;+\infty[$ و متناقصة على $]-\infty;0]$

4-أ-تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=2x+2\ln(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x})$.

ب-بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

5-أ-تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x-3\sqrt{e^x}+2=(\sqrt{e^x}-1)(\sqrt{e^x}-2)$.

ب-أدرس أشارة $(\sqrt{e^x}-2)$ و $(\sqrt{e^x}-1)(\sqrt{e^x}-2)$ على $\mathbb{R}$.

جـ-استنتج أنه من أجل كل x من $[0;\ln 4]$، $e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x}$.

د- بيّن أنه من أجل كل x من $[0;\ln 4]$، $f(x)\leq x$.

6-إنشئ المنحنى (C).

مجلة الرائد في الرياضيات

****

الحـــــــلول

الجزء الاول

العلوم التجريبية

****

الجزء الثاني

تقني رياضي

****

الجزء الثالث

رياضيات

****

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

BAC2020

الجزء الأول: تمارين البكالوريات

شعبة العلوم التجريبية

التمرين 11: دورة 2019

1-أ) حساب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2^{<}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^{>}} f(x)$ **وتفسير النتائج بيانيا**

لدينا: الدالة f المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$

$$\lim_{x\to 0^{>}} f(x)=\lim_{x\to 0^{>}}\frac{1}{x-2}+\lim_{x\to 0^{>}}\ln x=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0^{>}}\ln x=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^{>}} f(x)=\lim_{x\to 2^{>}}\frac{1}{x-2}+\lim_{x\to 0^{>}}\ln x=\lim_{x\to 0^{>}}\frac{1}{x-2}+2=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^{<}} f(x)=\lim_{x\to 2^{<}}\frac{1}{x-2}+\lim_{x\to 0^{<}}\ln x=\lim_{x\to 0^{<}}\frac{1}{x-2}+2=-\infty$$

** $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)=-\infty$ معناه المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور الفواصل) مقارب لـ (C_f)

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\pm\infty$ معناه المستقيم ذو المعادلة $x=2$ مقارب لـ (C_f)

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$

2) دراسة اتجاه تغير f على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ **وتشكيل جدول تغيراتها**

من اجل كل $]0;2[\cup]2;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-x+(x-2)^2}{x(x-2)^2}=\dfrac{x^2-5x+4}{x(x-2)^2}$

اشارة $f'(x)$ من اشارة x^2-5x+4 لأن المقام موجب تماما

$x^2-5x+4=0$ معناه $x=1$ أو $x=4$ و إشارة x^2-5x+4 هي كما يلي

$x^2-5x+4>0$ معناه $]0;1[\cup]4;+\infty[$ و $x^2-5x+4<0$ معناه $]1;2[\cup]2;4[$

وعليه f متزايدة على $]0;1[\cup]4;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]1;2[\cup]2;4[$

وجدول تغيرات الدالة f يكون كما يلي:

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	-1	↘	‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}+2\ln 2$	↗	$+\infty$

3-أ) حساب وتفسير النتيجة بيانيا

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{x-2}=0$$

$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=0$ معناه المنحنى (Γ) الممثل للدالة "ln" مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ)

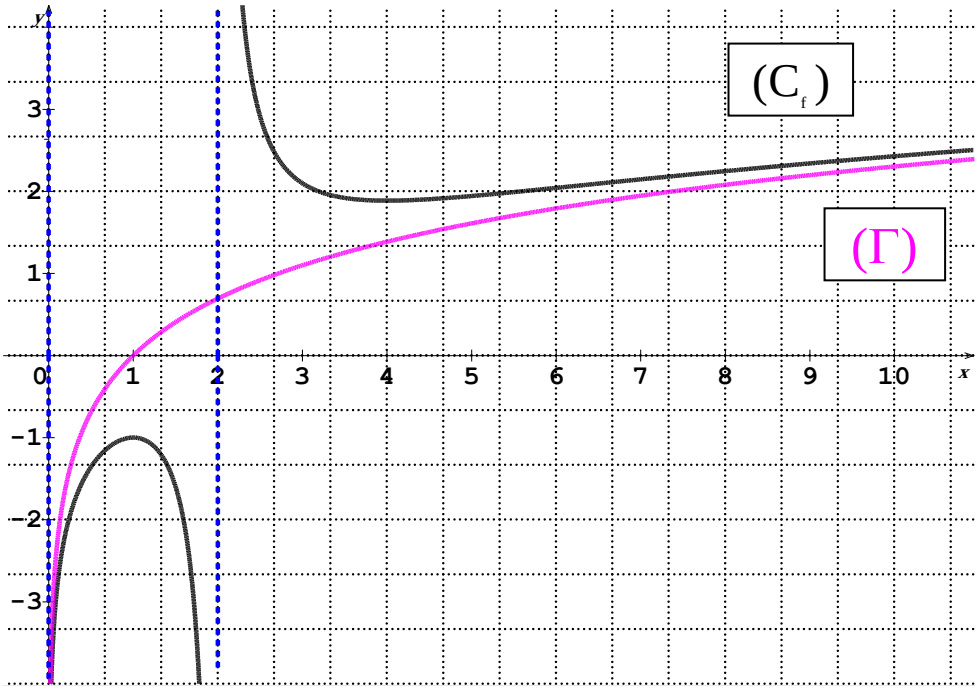
لدراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة لـ (Γ) ندرس اشارة الفرق $\left(f(x)-\ln x\right)$

لدينا: $\left(f(x)-\ln x\right)=\frac{1}{x-2}$ وعليه اشارة الفرق هي حسب اسارة $(x-2)$

ومنه : من أجل كل $]0;2[$ يكون $(x-2)<0$ ومعناه (C_f) تحت (Γ)

من أجل كل $]0;2[\ ]2;+\infty[$ يكون $(x-2)>0$ ومعناه (C_f) فوق (Γ)

4) رسم كلا من المنحنيين (Γ) و (C_f).



6) تحديد اتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها

لدينا: g دالة معرفة على المجال $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ: $g(x)=f(-2x)$

الدالة g هي تركيب الدالة $x\to(-2x)$ تألفية متبوعة بالدالة f

وعليه: من اجل كل x من $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$: $g'(x)=-2f'(-2x)$

$g'(x)=0$ معناه $f'(-2x)=0$ ومعناه $-2x=1$ أو $-2x=4$ أي: $x=-\frac{1}{2}$ و $x=-2$

$g'(x)<0$ معناه $f'(-2x)>0$ ومعناه $x\in]-2;-1[\cup]-1;-\frac{1}{2}[$ أي g متناقصة على هذا المجال

$g'(x)>0$ معناه $f'(-2x)<0$ ومعناه $x\in]-\infty;-2[\cup]-\frac{1}{2};0[$ أي g متزايدة على هذا المجال

التمرين12: دورة 2018

I-حساب g(1)ثم استنتاج حسب x إشارة g(x).

والدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$

لدينا: $g(1)=0$ ومعناه (C_g) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 1

(C_g) فوق حامل محور الفواصل من أجل كل $]0;1[$ ومعناه $g(x)>0$ من أجل كل $x\in]0;1[$

(C_g) تحت حامل محور الفواصل من أجل كل $]1;+\infty[$ ومعناه $g(x)<0$ من أجل كل $x\in]1;+\infty[$

II- 1- احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ وبيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$، ثم فسر النتيجتين بيانيا.

f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x\ln x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ لأن $f(x)=\frac{\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

التفسير الهندسي

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ معناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (حامل محور الفواصل)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ معناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ (حامل محور التراتيب)

2-أ)تبيّان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$

$$f'(x)=\frac{(\frac{1}{x}(1+x\ln x)-(\ln x+1)(1+\ln x))}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-(\ln x)^2-2\ln x-1}{(1+x\ln x)^2}=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$$

ب)استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ نفس اشارة $g(x)$ وعليه الدالة f متزايدة على المجال $]0;1[$ ومتناقصة على المجال $]1;+\infty[$ وجدول تغيرات الدالة f هو كمايلي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↗	1	↘	0

3)تبيان أن: $y=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ(T) مماس لـ (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور الفواصل

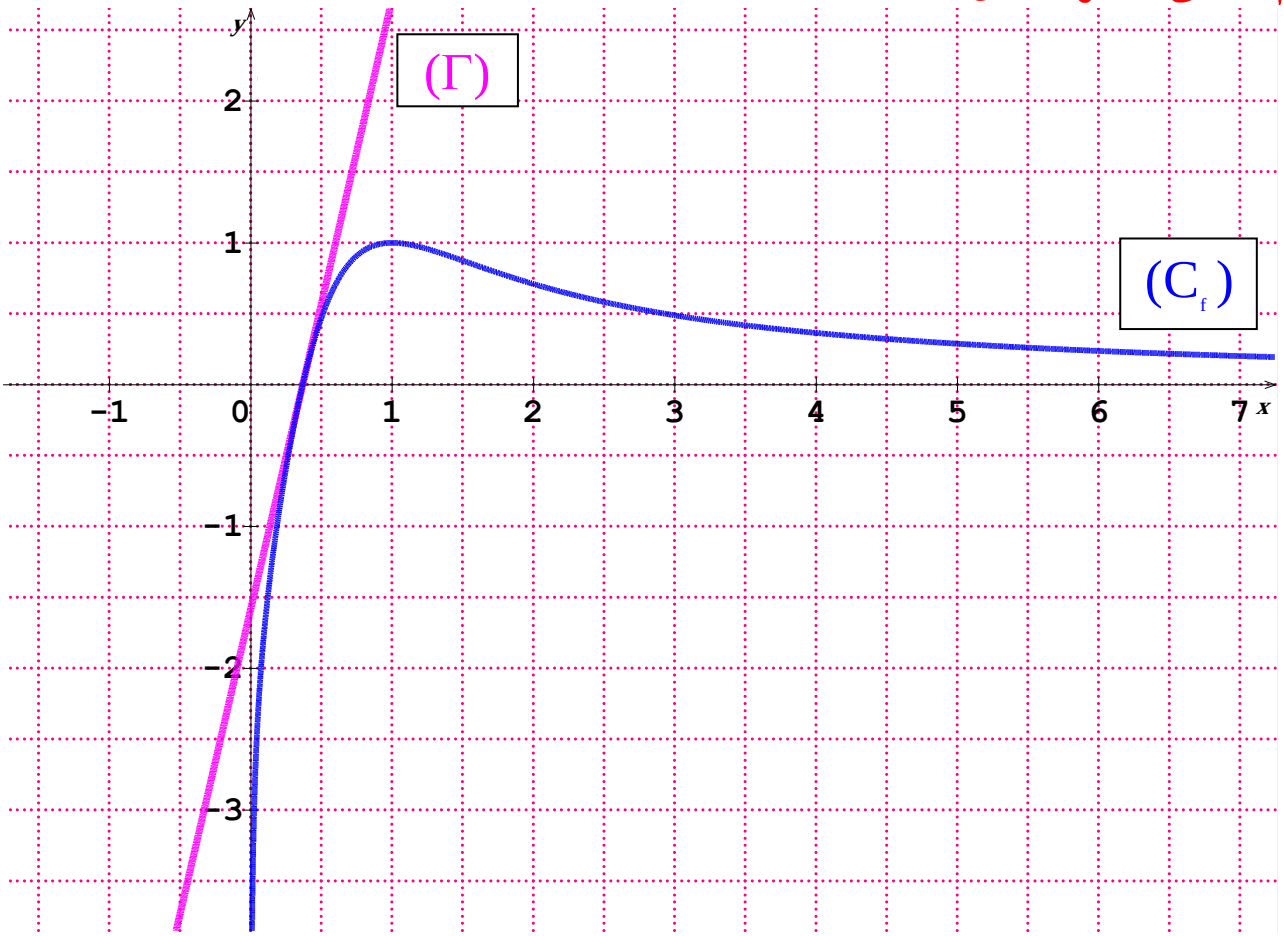
(C_f) يقطع محور الفواصل معناه $f(x)=0$ ومعناه $1+\ln x=0$ أي $x_0=\frac{1}{e}$

ومنه معادلة المماس(T) عند النقطة x_0 هي: $y=f'(\frac{1}{e})(x-\frac{1}{e})+f(\frac{1}{e})$

$$f'(\frac{1}{e})=\frac{g(e^{-1})}{(1+e^{-1}\ln e^{-1})^2}=\frac{e-1}{(1-e^{-1})^2}=\frac{e^2}{e-1} \quad \text{و} \quad f(\frac{1}{e})=0$$

وعليه: $y=\frac{e^2}{e-1}(x-\frac{1}{e})=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}$

رسم المماس (T) والمنحنى (C_f)



4)تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-em$ حلّين متمايزين.

المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-em$ تكافئ $f(x)=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$

من اجل m=1 نجد: $f(x)=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}$ ومعناه $f(x)=y$ حيث $y=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}$ معادلة المماس (T)

وعليه المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-em$ تقبل حلين متمايزين معناه $m>1$

التمرين13: دورة 2017

1)تبيان ان الدالة f فردية وتفسير ذلك بيانيا

لدينا:f دالة معرفة على $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ حيث: $f(x)=\frac{2}{3}(x)+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

تذكير: f دالة فردية معناه من اجل كل $x\in D_f$ $f(-x)+f(x)=0$

لدينا من من اجل كل $x\in D_f$: $f(-x)+f(x)=\frac{2}{3}(-x)+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)+\frac{2}{3}(x)+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\ln\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right)=\ln 1=0$$

التفسير البياني: المنحنى البياني للدالة f يقبل مبدأ الإحداثيات O كمركز تناظر

2)حساب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to-1^{<}}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to1^{>}}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to-1^{<}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0^{+}$ لأن $\lim\limits_{x\to-1^{<}}f(x)=-\frac{2}{3}+\lim\limits_{x\to-1^{<}}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^{>}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to1^{>}}f(x)=\frac{2}{3}+\lim\limits_{x\to1^{>}}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\ln 1=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{3}x=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\ln 1=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{3}x=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

استنتاج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقارب موازيين لحامل محور التراتيب .

من النهايتين السابقتين: $\lim\limits_{x\to-1^{<}}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to1^{>}}f(x)$ نستنتج أن يقبل:

*المنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x=-1$

* المنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x=1$

3-أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D: $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D: $f(x)=\frac{2}{3}(x)+\ln(x-1)-\ln(x+1)$

ومنه: $f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{3}+\frac{3.2}{3(x^2-1)}=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ موجبة تماما لأن :

إشارة x^2-1 موجبة على المجال D و كذلك x^2+2 موجبة من أجل كل عدد حقيقي
وعليه الدالة f متزايدة تماما على مجالي تعريفها وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	‖	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

4)تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8 \prec \alpha \prec 1,9$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]1;+\infty[$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} +1} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

لدينا: $f(1,8) = -0.05 \prec 0$ و $f(1,9) = 0.08 \succ 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة
توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha) = 0$ حيث $1,8 \prec \alpha \prec 1,9$.

3) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = \frac{2}{3}x$ مقارب مائلا للمنحنى (C_f).

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = \frac{2}{3}x$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه: $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - y] = 0$

لدينا: $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$.

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

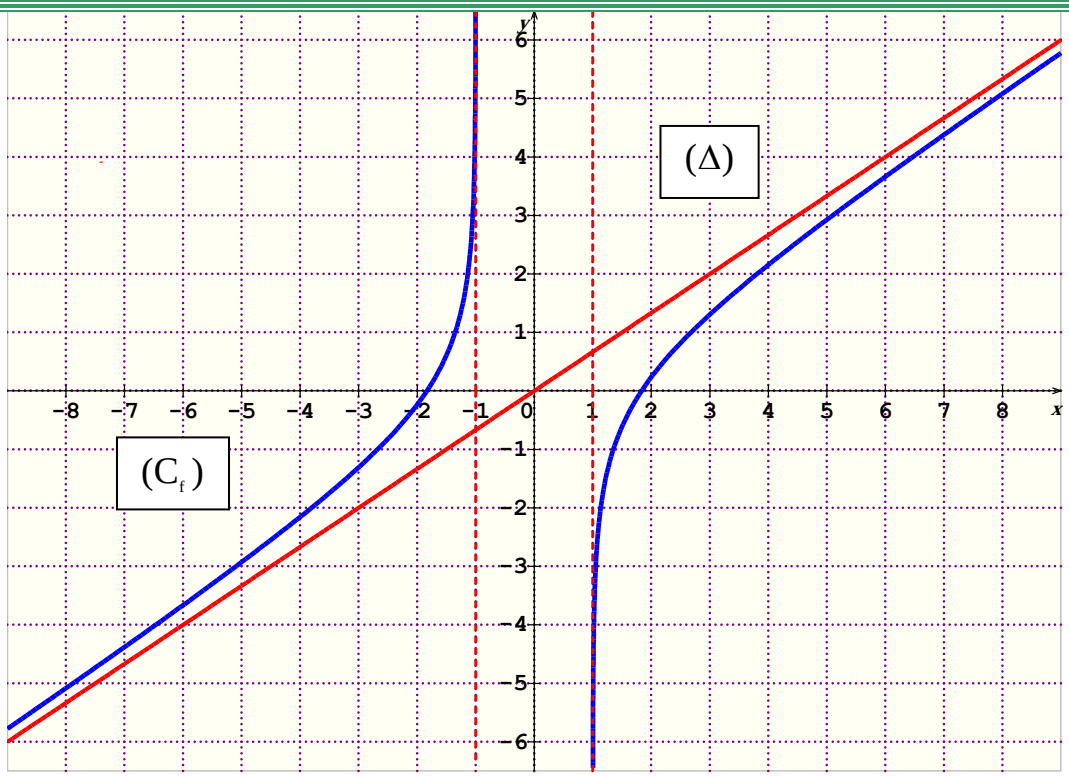
لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

لدينا: $f(x) - y \prec 0$ من أجل كل $]-\infty;-1[$ $x \in$ لأن $\frac{x-1}{x+1} \prec 1$

$f(x) - y \succ 0$: من أجل كل $]1;+\infty[$ $x \in$ لأن $\frac{x-1}{x+1} \succ 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)-y$	−	‖	‖	+
الوضع	(C_f) تحت (Δ)	‖	‖	(C_f) فوق (Δ)

6) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)



7)المناقشة البيانية لعدد حلول المعالة : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

نضع: $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0....(*)$

المعادلة (*) تكافئ $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ وتكافئ $\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=|m|x$

أي $|m|x=f(x)$ وتكافئ بيانيا الجملة التالية : $\begin{cases}y=|m|x\\y=f(x)\end{cases}$ وعليه حلول المعادلة (*)هي فواصل نقط تقاطع(C) والمستقيم (Δ_m) ذا المعادلة $y=|m|x$ (مستقيم دوار يشمل المبدأ ومن البيان نميز الحالات التالية:

1) $-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$ المعادلة تقبل حلّين . 2) $m\geq\frac{2}{3}$ أو $m\leq-\frac{2}{3}$ المعادلة لاتقبل حلول.

التمرين14:دورة 2017 الاستدراكية

I- 1) حساب النهايتن التاليتين : $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^{>}}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم تفسير النتيجة بيانيا.

لدينا: الدالة العددية f معرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كمايلي: $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^{>}}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^{>}}1+2\ln(2x+1)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^{>}}(2x+1)^2=0^+$

علماأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}=0$ نهاية شهيرة

$x=-\dfrac{1}{2}$ معناه $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-\frac{1}{2}} f(x)=+\infty$ يقبل مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته (C_f)

$y=0$. معناه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ يقبل مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل معادلته (C_f)

2-أ)تبيان أنه من أجل كل x من $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$: $f'(x)=\dfrac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$.

لدينا:

$$f'(x)=\frac{2\dfrac{2}{(2x+1)}(2x+1)^2-4(2x+1)(1+2\ln(2x+1)}{\left[(2x+1)^2\right]^2}$$

$$=\frac{4\left[1-(1+2\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^3}=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

ب-دراسة إتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x)=\dfrac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة $-\ln(2x+1)$

لدينا: $-\ln(2x+1)=0$ معناه $x=0$ وعليه اشارة $f'(x)$ تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	1	↘	0

3) حل في المجال $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ **المعادلة** $f(x)=0$ **ثم استنتاج اشارة** $f(x)$.

$f(x)=0$ معناه $1+2\ln(2x+1)=0$ ومعناه $x=\dfrac{1}{2}(-1+\dfrac{1}{\sqrt{e}})$

$f(x)\prec 0$ معناه $1+2\ln(2x+1)\prec 0$ ومعناه $x\in\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}(-1+\dfrac{1}{\sqrt{e}})\right[$

$f(x)\succ 0$ معناه $1+2\ln(2x+1)\succ 0$ ومعناه $x\in\left]\frac{1}{2}(-1+\frac{1}{\sqrt{e}});+\infty\right[$

ملاحظة:لتعيين اشارة $f(x)$ يمكن استعمال جدول تغيرات الدالة f.

4)تبيّان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω و تعيين إحداثياها

(C_f)يقبل نقطة إنعطاف$\omega(x_0;y_0)$معناه المشتقة الثانية"f"تنعدم عندx_0مغيرةاشارتها عندها

لدينا: $f"(x)=\frac{\frac{(-8)2}{2x+1}(2x+1)^3-6(2x+1)^2(-8\ln(2x+1))}{(2x+1)^6}=\frac{16[-1+3\ln(2x+1)]}{(2x+1)^4}$

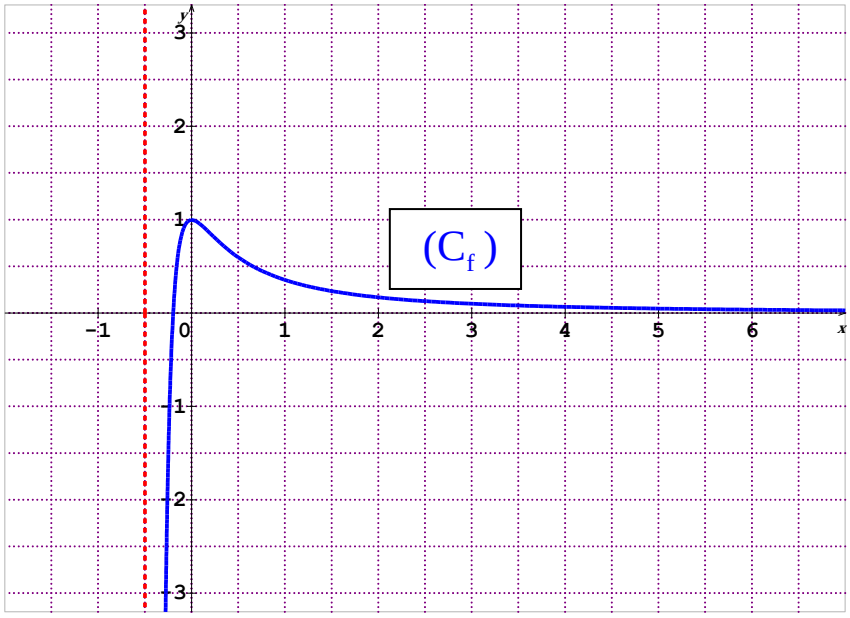
اشارة $f"(x)$ هي نفس إشارة $(-1+3\ln(2x+1))$ والموضحة كما يلي:

$(-1+3\ln(2x+1))=0$ معناه $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt[3]{e})$ نلخص اشارة $f"(x)$ كالتالي

$x\in\left]\frac{1}{2}(-1+\sqrt[3]{e});+\infty\right[$ معناه $f"(x)\succ 0$ ، $x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}(-1+\sqrt[3]{e})\right[$ معناه $f"(x)\prec 0$

نستنتج مما سبق أن النقطة $\omega(x_0;y_0)$ حيث $y_0=f(x_0)=\frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}$ نقطة انعطاف لـ(C_f).

إنشاء المنحنى (C_f)



II-1- أ) دراسة إتجاه تغير الدالة g.

الدالة العددية g ومعرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كمايلي: $g(x)=2[-x+\ln(2x+1)]$

دراسة إتجاه تغير الدالة g معناه حساب عبارة الدالة المشتقة $g'(x)$ و تعيين اشارتها

لدينا: $g'(x)=2\left[-1+\frac{2}{2x+1}\right]=2\left(\frac{-2x+1}{2x+1}\right)$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+1$ لماذا ؟

$g'(x)=0$ معناه $x=\frac{1}{2}$ و $g'(x)\succ 0$ معناه $x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ و $g'(x)\prec 0$ معناه $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

ب) تبيّان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين احدهما معدوم والأخر α حيث $1,2\prec\alpha\prec 1,3$.

*الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ ولدينا: $g(1,2)=0,047$ و $g(1,3)=-0,03$

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$ حيث $1,2\prec\alpha\prec 1,3$

* المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل معدوم لان $g(0)=0$

استنتاج إشارة $g(x)$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in\left]-\frac{1}{2};0\right[\cup]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)\prec 0$

ومن أجل كل $x\in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)\succ 0$

التمرين15:دورة 2016

I-1)دراسة اتجاه تغير الدالة g

لدينا:الدالة g معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-\ln x$

حساب $g'(x)$ و ودراسة اشارته استنتاج اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$

لدينا: $g'(x)=0$ معناه $2x^2-1=0$ ومعناه $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ مرفوض

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
اشارة $g'(x)$	$-$	0	$+$
اتجاه تغير g	متزايدة تماما		متناقصة تماما

2)حساب $g(\frac{\sqrt{2}}{2})$ وتبيان أن $g(x)\succ 0$ من اجل كل عدد $x\in]0;+\infty[$

لدينا: $g(\frac{\sqrt{2}}{2})=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$

من خلال اتجاه تغير g والقيمة الحدية المحلية الصغرى $g(\frac{\sqrt{2}}{2})\succ 0$

نستنتج أن $g(x)\succ 0$ من اجل كل عدد $x\in]0;+\infty[$

II-1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}f(x)$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$

ومنه: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}.\ln x=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ نهاية شهيرة

2-أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

لدينا: $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'+1=\frac{\frac{1}{x}.x-1\ln x}{x^2}+1=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

ب)تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

من العبارة $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها

وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3) كتابة معادلة المماس (T)

(T) **له معادلة من الشكل** : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ومنه: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه : $y=2x-2$.

4-أ) تبيان أن (C) **يقبل مستقيم مقارب مائلا** (Δ) **حيث:** $y=x-1$ **معادلة له**

المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C) معناه: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ نهاية شهيرة

ب)دراسة الوضع النسبي لـ(C)**و** (Δ)

لدراسة الوضع النسبي لـ(C)و (Δ)ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=\frac{\ln x}{x}$

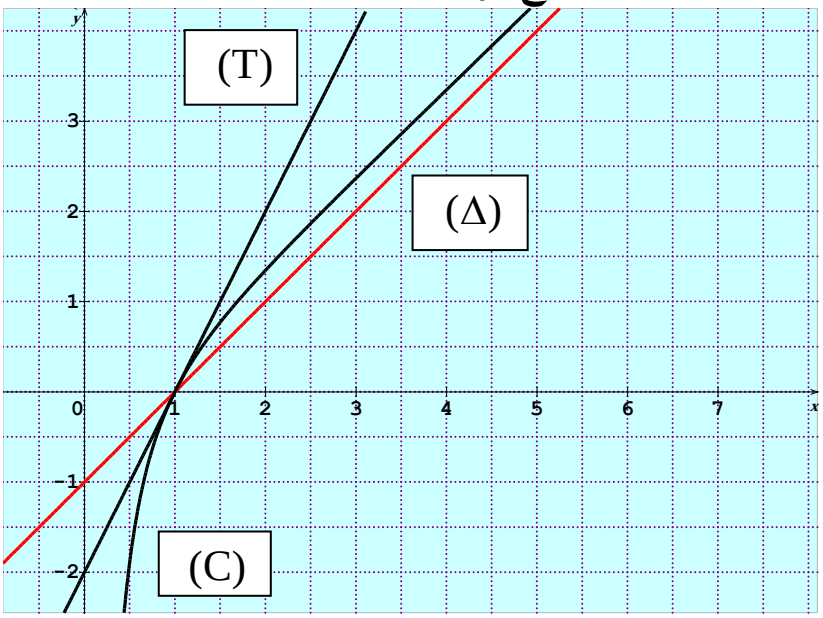
اشارة الفرق هي حسب اشارة $\ln x$ وهي حسب الجدول التالي

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع	(C) تحت (Δ)	(C) يقطع (Δ)	(C) فوق (Δ)

5) رسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحنى (C)

(T) يشمل النقطة $A(1;0)$ $\vec{u}(1;2)$ شعاع توجيه له

(Δ) يشمل النقطة $A(1;0)$ $\vec{v}(1;1)$ شعاع توجيه له



6-أ)اثبات ان النقطة $A(1;0)$ تنتمي للمستقيم (Δ_m)

النقطة $A(1;0) \in (\Delta_m)$ لأن الثنائية $(1;0)$ تحقق صحة المعادلة $y = mx - m$.

من العبارة $y = mx - m$ أي $y = m(x-1)$ نستنتج ام جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة وحيدة هي النقطة $A(1;0)$.

ب)المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$

لدينا: $f(x) = mx - m$ تكافئ الجملى التالية : $\begin{cases} y = f(x) \\ y = mx - m \end{cases}$ وعليه حلول المعادلة $f(x) = mx - m$ هي فواصل نقط تقاطع (C) والمستقيم (Δ_m) (مستقيم دوار يشمل النقطة $A(1;0)$) ومن البيان نميز الحالات التالية:

1) $m \leq 1$ المعادلة تقبل حلا وحيد ، 2) $1 \prec m \prec 2$ المعادلة تقبل حلين .

3) $m = 2$ المعادلة تقبل حلا مضاعف، 4) $m \succ 2$ المعادلة تقبل حلا وحيد .

التمرين16:دورة 2016 الاستدراكية

I-1)دراسة تغيرات الدالة g ، ثم تشكيل جدول تغيراتها

لدينا:الدالة g معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$

حساب النهايات عند 1- وعند $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \to -1} (x+1)e = 0$ و $\lim\limits_{x \to -1} 2\ln(x+1) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

حساب $g'(x)$ و [illegible] اتجاه تغير الدالة g

$g'(x)=e+\frac{2}{x+1}$ ومنه: $g'(x)\succ 0$ لأن $x\in]-1;+\infty[$ ومنه g متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2)تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,34\prec\alpha\prec-0,33$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to-1^{+}}g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

لدينا: $g(-0,34)=-0,03$ و $g(-0,33)=0,02$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$ حيث $-0,34\prec\alpha\prec-0,33$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in]-1;\alpha[$ فإن: $g(x)\prec 0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)\succ 0$

II-1-أ) تبيان أن: $\lim\limits_{x\to-1^{+}}f(x)=-\infty$ و حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ،ثم تفسير النتيجتين هندسيا

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$\lim\limits_{x\to-1^{+}}f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-1^{+}}\frac{e(x+1)+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to-1^{+}}\frac{1}{(x+1)^2}.\ln(x+1)=+\infty(-\infty)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^{+}}f(x)=-\infty$ معناه للنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}\left[e+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}\right]=0$ لاحظ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}=0$ (ن ش)

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ معناه للنحنى (C_f) مستقيم مقارب هو حامل محور الفواصل (معادلته $y=0$)

ب)تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$

$$f'(x)=\left(\frac{e}{x+1}\right)'+\left(\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)'=-\frac{e}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{(x+1)}(x+1)^2-2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$=-\left[\frac{e(x+1)}{(x+1)^3}-\frac{1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3}\right]=-\left[\frac{-1+e(x+1)+2\ln(x+1)}{(x+1)^3}\right]=-\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

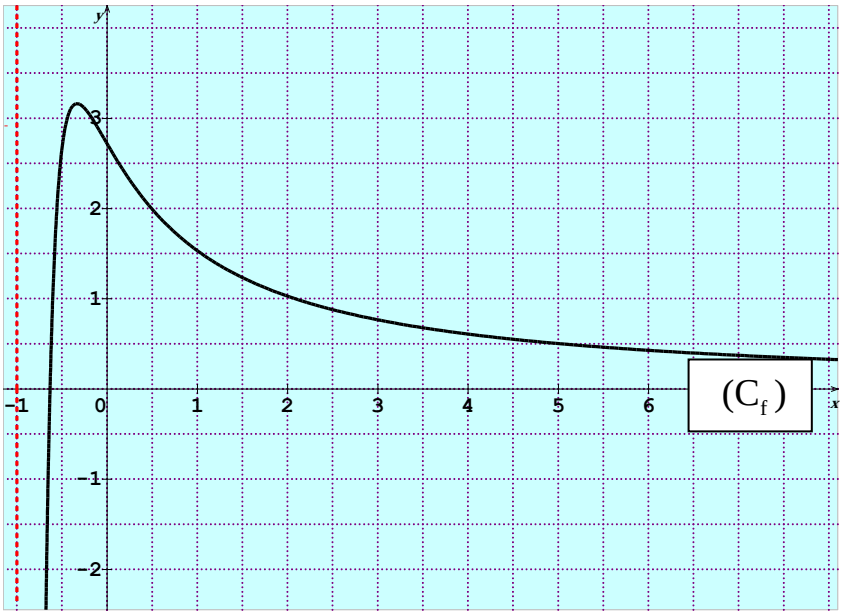
ج) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و تشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x)=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $-g(x)$

وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

د)رسم المنحنى (C_f)



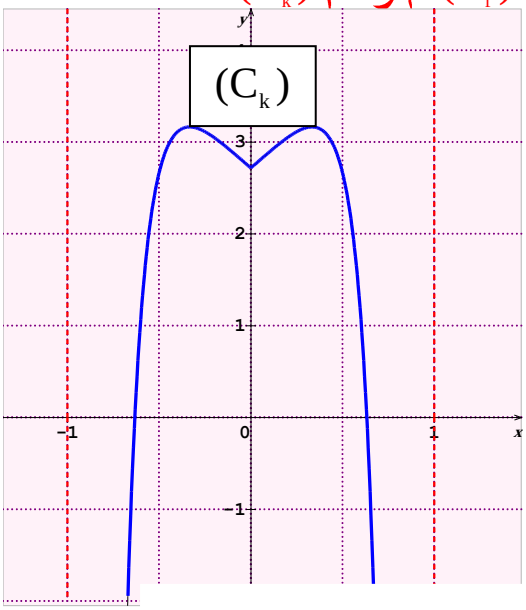
3-أ) تبيان أن الدالة k زوجية

لدينا : الدالة k معرفة على المجال $]-1;+1[$ بـ: $k(x)=f(-|x|)$

الدالة k زوجية معناه من أجل كل $x\in]-1;+1[$ و $-x\in]-1;+1[$ ، $k(-x)=k(x)$

لدينا: $k(-x)=f(-|-x|)=f(-|x|)=k(x)$ لأن $|-x|=|x|$ ومنه k زوجية

ب)تبيان كيفية استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم رسم (C_k)



عبارة $k(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة هي كمايلي:

$$k(x)=\begin{cases} f(x);-1\prec x\le 0 \\ f(-x);0\le x\prec 1 \end{cases}$$

وعليه : $x\in]-1;0]$ معناه (C_k) ينطبق على (C_f)

$x\in[0,1[$ معناه (C_k) نظير (C_f) :

بالنسبة لحامل محور التراتيب (لأن k زوجية)

ب)المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $k(x)=m$

لدينا: $k(x)=m$ تكافئ الجملى التالية : $\begin{cases} y=k(x) \\ y=m \end{cases}$

وعليه حلول المعادلة $k(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_k) والمستقيم (Δ_m) (مستقيم يوازي حامل محور الفواصل)

من البيان (C_k) نميز الحالات التالية:

1) $m \prec e$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة ، 2) $m=e$ المعادلة تقبل مضاعف معدوم .

3) $e \prec m \prec k(\alpha)$ المعادلة تقبل حلّين سالبين وحلين موجبين

4) $m=k(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين مضاعفين مختلفين في الإشارة

5) $m \succ k(\alpha)$ المعادلة لاتقبل حلول.

التمرين17:دورة 2015

I- 1) تحديد وضعية المنحنى (γ) بالنسبة للمستقيم (Δ).

من البيان نلخص وضعية المنحنى (γ) بالنسبة للمستقيم (Δ) كمايلي:

من أجل كل $x \in]0;\alpha[$ يكون (γ) تحت (Δ)

من أجل $x=\alpha$ يكون (γ) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة α.

من أجل كل $x \in]\alpha;+\infty[$ يكون (γ) فوق (Δ)

2) استنتاج اشارة $g(x)$ وذلك حسب قيم x

لدينا: $g(x)=\ln x-(-x+3)$ من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]0;\alpha[$ تكون إشارة $g(x)$ سالبة

من أجل $x=\alpha$ تكون إشارة $g(x)$ معدومة

من أجل كل $x \in]\alpha;+\infty[$ تكون إشارة $g(x)$ موجبة.

3) التحقق أن : $2,2 \prec \alpha \prec 2;3$

g مستمرة (مجموع دالتين مستمرتين) ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ لأن: $g'(x)=\frac{1}{x}+1 \succ 0$

و $g(2;2)=-0;01$ و $g(2;3)=0;13$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن: $2,2 \prec \alpha \prec 2;3$.

II-1) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} f(x)$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} f(x)=(1-\frac{1}{x})=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} f(x)=(\ln x-2)=-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty}(1-\frac{1}{x})=1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty}(\ln x-2)=+\infty$.

2) إثبات أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

$$f'(x)=(\frac{1}{x^2})(\ln x-2)+(1-\frac{1}{x})(\frac{1}{x})=\frac{(\ln x-2)+(x-1)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

من العبارة $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$.

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كالأتي.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) $f(\alpha)=\frac{-(1-\alpha)^2}{\alpha}$ **واستنتاج حصرا للعدد** $f(\alpha)$

*لدينا: $f(\alpha)=(1-\frac{1}{\alpha})(\ln\alpha-2)$ لكن $g(\alpha)=0$ ومنه $\ln\alpha=3-\alpha$

ومنه: $f(\alpha)=(1-\frac{1}{\alpha})(3-\alpha-2)=\frac{(\alpha-1)(1-\alpha)}{\alpha}=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$

$2,2\prec\alpha\prec 2;3.....(1)$ تكافئ $1,2\prec(\alpha-1)\prec 1;3$ تكافئ $(1,2)^2\prec(\alpha-1)^2\prec(1;3)^2....(2)$

من (1) و (2) نجد: $\frac{(1,2)^2}{2;3}\prec\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}\prec\frac{(1;3)^2}{2;2}$ وأخيرا: $-0;73\prec f(\alpha)\prec-0;66$

4) دراسة وضعية (C_f) **بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.**

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ندرس إشارة $f(x)$

$f(x)=0$ معناه $(1-\frac{1}{x})(\ln x-2)=0$ معناه $(\ln x-2)=0$ أو $(x-1)=0$

$(\ln x-2)=0$ تكافئ $x=e^2$ و $(x-1)=0$ تكافئ $x=1$ وعليه إشارة $f(x)$ تكون كمايلي:

x	0		1		e^2		$+\infty$
lnx-2		–		–		+	
x-1		–		+		+	
f(x)	‖	+	‖	–	‖	+	

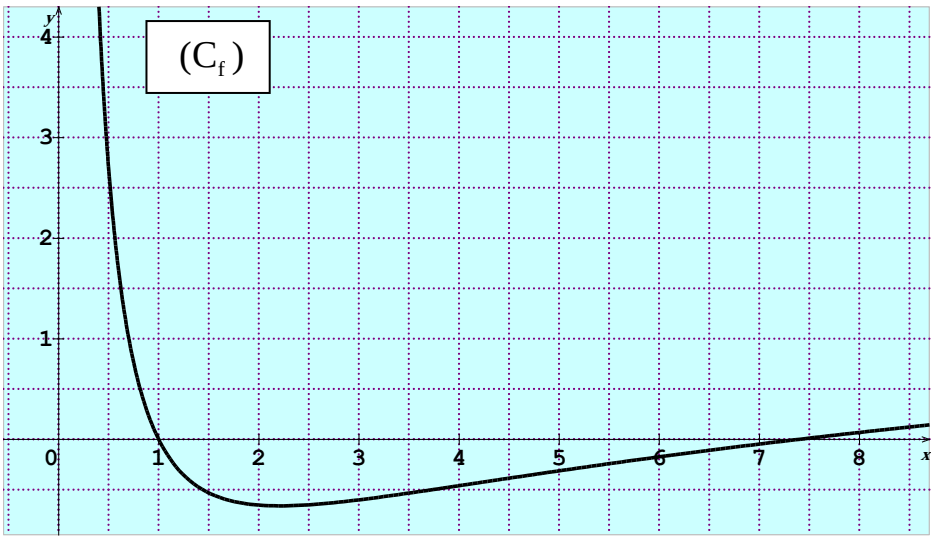
من الجدول السابق نستنتج أن:

من أجل كل $x\in]0;1[\cup]e^2;+\infty[$ يكون (C_f) فوق حامل محور الفواصل

من أجل $x=1$ أو $x=e^2$ يكون (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتهما $x=1$ أو $x=e^2$.

من أجل كل $x\in]1;e^2[$ يكون (C_f) تحت حامل محور الفواصل.

إنشاء (C_f) **في المجال** $]0;e^2]$



التمرين18:دورة جوان 2014

1-أ) حساب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **وتفسير النتيجتين هنسيا.**

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1+2\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ **لأن:** $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ **و** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1+2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=1$ **لأن:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ **نهاية شهيرة**

التفسير الهندسي

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ **معناه المنحنى** (C_f) **يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته:** $x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ **معناه المنحنى** (C_f) **يقبل مستقيم مقارب أفقيي معادلته:** $y=1$

ب)دراسة اتجاه تغير الدالة f **على المجال** $]0;+\infty[$ **وتشكيل جدول تغيراتها.**

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $f'(x)=2\dfrac{(\frac{1}{x}.x-1\ln x)}{x^2}=2\dfrac{(1-\ln x)}{x^2}$

$f'(x)=0$ معناه $1-\ln x=0$ ومنه $x=e$

$f'(x)\prec 0$ معناه $1-\ln x\prec 0$ ومنه $x\succ e$

و $f'(x)\succ 0$ معناه $1-\ln x\succ 0$ ومنه $x\prec e$

وعليه يكون جدول تغيرات الدالة f كمايلي:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$f(e)$	↘	1

2-أ) دراسة وضعية المنحنى (C_f) **بالنسبة للمستقيم** (Δ) **الذي معادلته:** $y=1$

ندرس اشارة الفرق: $f(x)-y=2\dfrac{\ln x}{x}$ حيث $y=1$

$f(x)-y=0$ معناه $\ln x=0$ ومنه $x=1$ معناه (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثي $(1;1)$

$f(x)-y\prec 0$ معناه $\ln x\prec 0$ ومنه $x\in]0;1[$ معناه (C_f) تحت (Δ) في هذا المحال

$f(x)-y\succ 0$ معناه $\ln x\succ 0$ ومنه $x\in]1;+\infty[$ معناه (C_f) فوق (Δ) في هذا المحال

ب) كتابة معادلة المماس (T) **للمنحنى** (C_f) **عند النقطة** A **ذات الفاصلة 1.**

معادلة المماس (T) هي: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه: $y=2(x-1)+1$ أي: $y=2x-1$

ج)تبيّان أن المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **حيث:** $0\prec\alpha\prec 1$

f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;e]$ و $f(e^{-0,4})\times f(e^{-0,3})\prec 0$ **لأن:** $f(e^{-0,4})=-0,2$ و $f(e^{-0,3})=0,2$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $\alpha\in\left]e^{-0,4};e^{-0,3}\right[$ يحقق: $g(\alpha)=0$

3) إنشاء (T) **و** (C) **في آخر المجال**

4-أ) تبيّان أنه من أجل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$ والاستنتاج.

من أجل عدد حقيقي $x\in\mathbb{R}^*$: $h(x)-h(-x)=1+2\dfrac{\ln|x|}{|x|}-1-2\dfrac{\ln|-x|}{|-x|}=2\dfrac{\ln|x|}{|x|}-2\dfrac{\ln|x|}{|x|}=0$

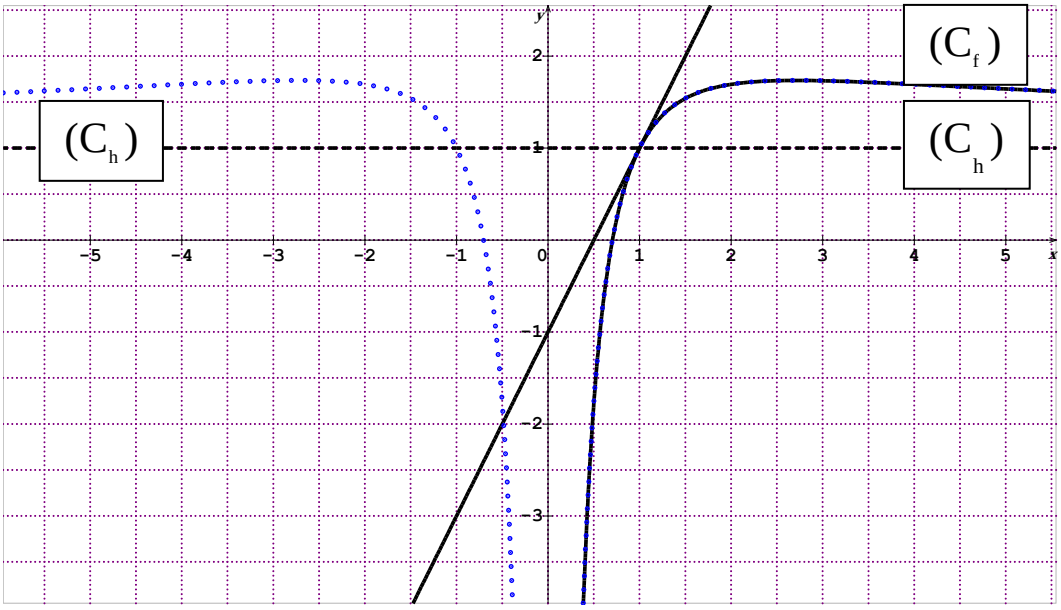
الاستنتاج من العبارة $h(x)-h(-x)=0$ أي $h(x)=h(-x)$ نستنتج أن الدالة h زوجية

ب) إنشاء المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).

لدينا: $h(x)=f(x)$ معناه $(C_h)=(C_f)$ على المجال $x\in]0;+\infty[$.

$h(x)=f(-x)$ معناه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب $x\in]-\infty;0[$.

ب) إنشاء (T) و (C_f) والمنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).



ج) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $\ln x^2=(m-1)|x|$

من أجل عدد حقيقي x غير معدوم المعادلة $\ln x^2=(m-1)|x|$ تكافئ $m=h(x)$

وتكافئ : $\begin{cases}y=m\\y=h(x)\end{cases}$ من الجملة السابقة نستنتج ان حلول المعادلة $\ln x^2=(m-1)|x|$ بيانيا

هي فواصل نقط تقاطع (C_h) والمستقيم $(\Delta_m): y=m$ معادلته من البيان لدينا:

1) $m\le 1$ معناه المعادلة تقبل حلين . 2) $1\prec m\prec h(e)$ معناه المعادلة تقبل اربعة حلول .

3) $m=h(e)$ معناه المعادلة تقبل حلين . 4) $m\succ h(e)$ معناه المعادلة لاتقبل حلول

التمرين19:دورة جوان 2013

I-1) دراسة تغيرات الدالة g ، وتشكيل جدول تغيراتها

$g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$ و $x\in]-1;+\infty[$

حساب النهايات

ح ع ت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2\ln(x+1))$.

ازالة ح ع ت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)(\frac{x^2}{(x+1)}-2\frac{\ln(x+1)}{(x+1)})=+\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}(-2\ln(x+1))=-2(-\infty)=+\infty$

اتجاه التغير

من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$: $g'(x)=2(x+1)-\frac{2}{(x+1)}=\frac{2[(x+1)^2-1]}{(x+1)}=\frac{2x(x+2)}{x+1}$

إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة x على $]-1;+\infty[$

جدول التغيرات

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

2-استنتاج أن $g(x)\succ 0$ **من أجل كل** $x\in]-1;+\infty[$

الدالة g تقبل 4 كقيمة حدّية صغرى أي $g(x)\geq 4$

إذن: $x\in]-1;+\infty[$ من أجل كل $g(x)\succ 0$

II-1-أ)حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ **وتفسير النتيجة بيانيا**

لدينا $f(x)=x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$ و $x\in]-1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-1-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$ معناه المستقيم ذي المعادلة: $x=-1$ مقارب عمودي لـ (C_f)

ب)حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-\frac{1}{x+1}+2\frac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$

2-أ) تبيّان أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=1-\frac{\frac{-2}{(x+1)}(x+1)-1(1-2\ln(x+1))}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2+3-2\ln(x+1))}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ **و تشكيل جدول تغيرات الدالة f**

إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$ أي $f'(x)\succ 0$

x	-1		0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	$+$		$+$		
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	$+\infty$

ج)تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-1} f(x)=-\infty$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $\alpha\in]-1;+\infty[$ حيث: $f(\alpha)=0$

التحقق أن : $0\prec\alpha\prec 0,5$

لدينا: $f(0)=-1$ و $f(0,5)=0,37$ أي: $f(0)\prec 0\prec f(0,5)$ ومنه $0\prec\alpha\prec 0,5$

3-أ)تبيّان أن المستقيم $(\Delta): y=x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

$(\Delta): y=x$ **مقارب لـ** (C_f) **عند** $+\infty$ معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x+1}+2\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$$

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة على (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x=-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

$f(x)-x=0$ معناه $1-2\ln(x+1)=0$ معناه $x=\sqrt{e}-1$

و $f(x)-x\prec 0$ معناه $x\in\left]-1;\sqrt{e}-1\right[$ و $f(x)-x\succ 0$ معناه $x\in\left]\sqrt{e}-1;+\infty\right[$

وعليه : (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}-1$

(C_f) تحت (Δ) في المجال $\left]-1;\sqrt{e}-1\right[$ و (C_f) فوق (Δ) في المجال $\left]\sqrt{e}-1;+\infty\right[$

4-أ) حساب x_0 فاصلة نقط التماس لـ (C_f) و (T)

لدينا: معادلة (T) هي: $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ و (T) مماسا لـ (C_f) معناه $f'(x_0)=1$

$f'(x_0)=1$ معناه $\dfrac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ معناه $g(x_0)=(x_0+1)^2$ ومنه: $x_0=e\sqrt{e}-1$

ب)رسم المستقيمين المقاربيّن والمماس (T) و (C_f) في آخر الحل

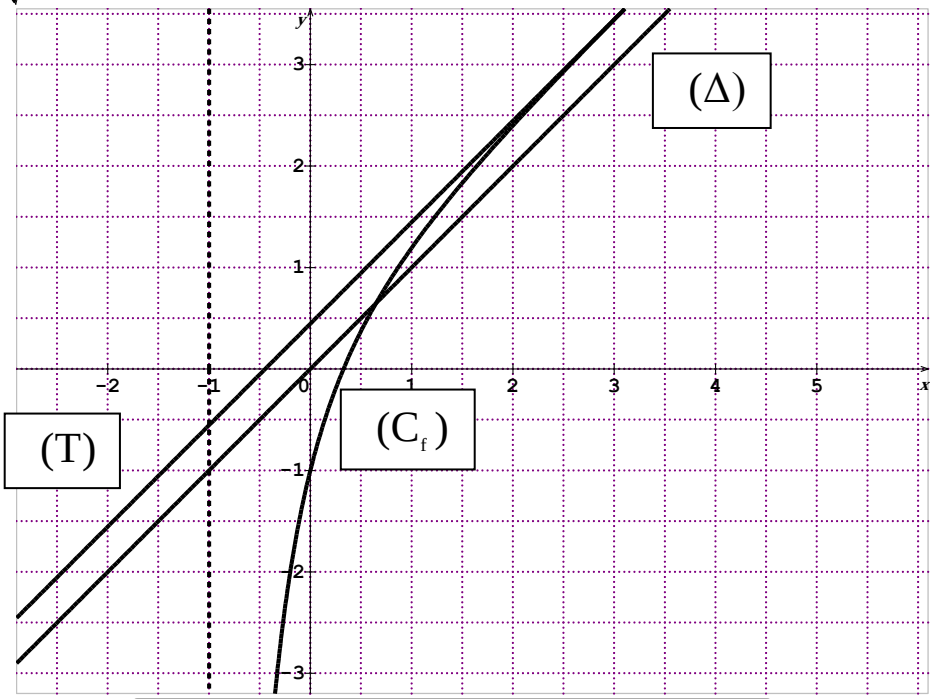
ج)تعيين قيم الوسيط الحقيقي m بيانيا حتى تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين

المعادلة $f(x)=x+m$ تكافئ $\begin{cases}y=x+m\\ y=f(x)\end{cases}$ حيث $y=x+m$ معادلة مستقيم (Δ_m) ميله 1

و $y=f(x)$ معادلة المنحنى (C_f)

الحالة 1 : $m=0$ يكون $(\Delta_m)=(\Delta)$ ، الحالة2 : $m=\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ يكون $(\Delta_m)=(T)$

وعليه نجد من البيان يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلان متمايزان معناه $0\prec m\prec\frac{2}{\sqrt{e^3}}$



التمرين20:دورة جوان 2012

1) أ)حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا

$\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0}(x+5)=5$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0} 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=-\infty$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

ب)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+5)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$

2)تبيان أنه من أجل كل $x\in]-\infty;0[$: $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$

لدينا: $f(x)=x+5+6((\ln|x|-\ln|(x-1)|)$ ومنه: $f'(x)=1+6(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1})=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=0$ معناه $x^2-x-6=0$ معناه $x=-2$ أو $x=3$ مرفوض

ومنه أشارة $f'(x)$ تكون كالآتي:

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

لدينا: $f(-2)=3-6\ln(2)+6\ln 3=0,56$

x	$-\infty$	-2	0
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	f(-2)	↘ $-\infty$

3-أ) تبيان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+5$ هو مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=6\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{x}{x-1}=0$

ومنه: (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) دراسة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

لدينا: $(f(x)-y)=6\ln\dfrac{x}{x-1}$ ولدينا من أجل كل $x\in]-\infty;0[$: $\dfrac{x}{x-1}\le 1$

ومنه $\ln\dfrac{x}{x-1}\le 0$ أي الفرق $(f(x)-y)\prec 0$ وعليه يكون (C_f) تحت (Δ)

4) تبيان ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حليّن α و β

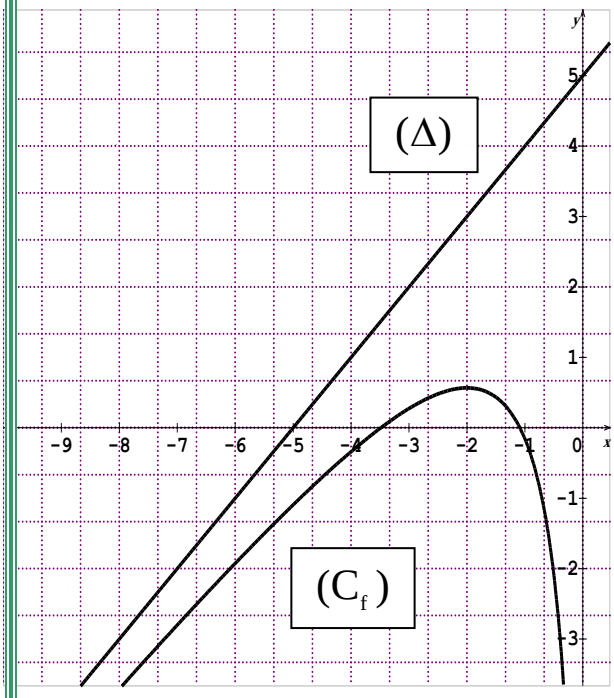
لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-2;0[$ و $f(-1,1)=0,02$ و $f(-1)=-0,15$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β يحقق $f(\beta)=0$

لدينا الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2[$ و $f(-3,5)=1,33$ و $f(-3,4)=-0,15$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقق $f(\alpha)=0$.

5) إنشاء (C_f) و (Δ).



6-أ) تبيان ان (AB) هي معادلة $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}+6\ln\dfrac{3}{4}$

لدينا $y_A=\dfrac{1}{2}x_A+\dfrac{7}{2}+6\ln\dfrac{3}{4}=3+6\ln\dfrac{3}{4}$ ،

$y_B=\dfrac{1}{2}x_B+\dfrac{7}{2}+6\ln\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{2}+6\ln\dfrac{3}{4}$

ومنه (AB) هي معادلة $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}+6\ln\dfrac{3}{4}$

ب) تبيان ان (AB) يمس (C_f) في نقطة M_0

(AB) يمس (C_f) معناه $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$ حيث x_0 فاصلة M_0

معناه $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$ معناه $\dfrac{x_0^2-x_0-6}{x_0(x_0-1)}=\dfrac{1}{2}$

معناه $2x_0^2-2x_0-12=x_0^2-x_0$ معناه $x_0^2-x_0-12=0$ ومنه: $x_0=-3$ أو $x_0=4$ مرفوض

ولدينا $f(-3)=2+6\ln\dfrac{3}{4}$ أي $M_0(-3;f(-3))$

التمرين21:دورة جوان 2011

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g'(x)	+	+	
g(x)	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 1$	

I) بقراءة بيانية

أ)تشكيل جدول التغيرات للدالة g.

ب)حل بيانيا المتراجحة $g(x) \succ 0$

من البيان $g(x) \succ 0$ تكافئ $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

جـ)تعيين بيانيا قيم x والتي من أجلها يكون $0 \prec g(x) \prec 1$

من البيان لدينا: $0 \prec g(x) \prec 1$ تكافئ $x \in]1;+\infty[$

II-1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}1} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} + \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1+0 = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\xrightarrow{\succ}1} f(x) = \lim_{x\xrightarrow{\succ}1} \frac{x-1}{x+1} + \lim_{x\xrightarrow{\succ}1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0-\infty = -\infty$$

النفسير الهندسي للنتيجتين

$(C_f)^*$يقبل مقارب عمودي معادلته هي: $x=1$ و $(C_f)^*$يقبل مقارب أفقي معادلته هي: $y=1$

2-أ) تبيان أن $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ من اجل كل $x \in]1;+\infty[$

$$g'(x) = \frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب)حساب $f'(x)$ ودراسة اشارتها وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f(x) = g(x) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$ ومنه $f'(x) = g'(x) + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} \succ 0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما من أجل كل $x \in]1;+\infty[$

x	1	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty \nearrow$	1

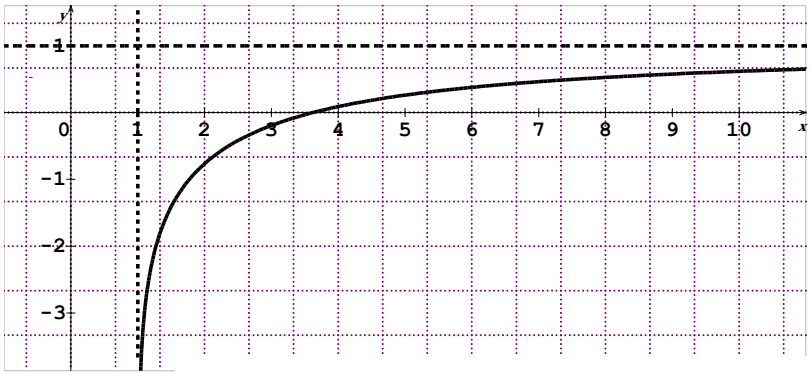
جدول تغيرات الدالة f

جـ-تبيّان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و

$f(3,62) \prec 0$ و $f(3,63) \succ 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 حيث $x_0 \in]3,62;3,63[$ يحقق $f(x_0)=0$

د- رسم (C_f).



3-أ) تعيين إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$

من الجزء I-جـ) $g(x)\prec 1$ ومنه: $\ln[g(x)]\prec \ln 1$ أي: $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\prec 0$

التمرين22:دورة جوان 2010

I)1-أ)حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2x-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}\frac{1}{2}} f(x)=1+\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}\frac{1}{2}}\ln(2x-1)=-\infty$

2) تبيين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I وتشكيل جدول التغيرات للدالة f

$f'(x)=0+\frac{2}{2x-1}\succ 0$ لأن $x\succ\frac{1}{2}$.

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال I لأن $f'(x)\succ 0$.

x	0,5	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس يوازي (d)

(d) يوازي المماس معناه $f'(x_0)=1$ ومنه $x_0=\frac{3}{2}$

4-أ)إثبات أنه من أجل كل $x\in I$: $f(x)=\ln(x+a)+b$.

بالمطابقة نجد: $a=-\frac{1}{2}$ و $b=1+\ln 2$ بـ $f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln\left[2(x-\frac{1}{2})\right]=1+\ln 2+\ln(x-\frac{1}{2})$

ب)استنتاج رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة ln

من العبارة $f(x)=1+\ln 2+\ln(x-\frac{1}{2})$ نستنتج ان (C_f) صورة (C) بانسحاب شعاعه $\vec{V}(\frac{1}{2};1+\ln 2)$

رسم (C_f) و (C) (في الجزء الثاني)

II-1)حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}\frac{1}{2}} g(x)$ وتبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}\frac{1}{2}} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}\frac{1}{2}}(f(x)-x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ حالة عدم التعيين

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1+\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\left[-\frac{x}{2x-1}+\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{2x-1}=-\frac{1}{2}$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها

$g'(x)=f'(x)-1=\frac{2}{2x-1}-1=\frac{-2x+3}{2x-1}$ و إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة $-2x+3$

جدول تغيرات الدالة g

لدينا: $g(\frac{3}{2}) = 1 + \ln(2) - \frac{3}{2} = 0,9$

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	
g(x)	$-\infty$	↗	$g(\frac{3}{2})$	↘	$-\infty$

3-أ) حساب $g(1)$ **وتبيان أن المعادلة** $g(x) = 0$ **تقبل حلا وحيد** $\alpha \in]\frac{3}{2}; +\infty[$

لدينا: $g(1) = f(1) - 1 = 1 + \ln 1 - 1 = 0$

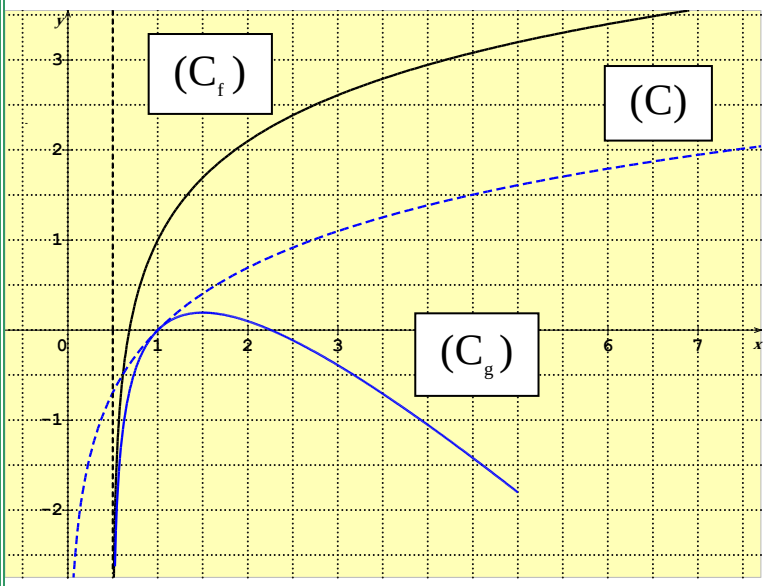
لدينا الدالة متزايدة تماما على المجال $]\frac{3}{2}; +\infty[$ و $g(\frac{3}{2}) = 0,9$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]\frac{3}{2}; +\infty[$

لدينا: $g(2) = f(2) - 2 = -1 + \ln 3 = 0,38$ و $g(3) = f(3) - 3 = -2 + \ln 5 = -0,39$

التحقق أن $2 \prec \alpha \prec 3$

بما أن $g(3) \prec 0 \prec g(2)$ فإن $2 \prec \alpha \prec 3$.



ب) رسم المنحنى (C_g) **على المجال** $]\frac{1}{2}; 5[$.

4)استنتاج إشارة $g(x)$ **على المجال** I .

من البيان أو جدول تغيرات الدالة g

لدينا إشارة $g(x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
g (x)	‖	−	0	+	0	−	

تحديد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) **والمستقيم** (d)

لدرسة وضعية (C_f) و (d) ندرس اشارة الفرق $f(x) - y = g(x)$ وهي حسب إشارة $g(x)$

إذا كانت $x \in [0,5;1[\cup]\alpha; +\infty[$ فإن (C_f) تحت (d) وإذا كانت $x \in]1; \alpha[$ فإن (C_f) فوق (d)

إذا كانت $x = 1$ أو $x = \alpha$ فإن (C_f) يقطع (d).

5) البرهان أنه من أجل كل $x \in]1; \alpha[$ **فإن** $f(x) \in]1; \alpha[$.

لدينا: $g(1) = g(\alpha) = 0$ ومنه $f(1) = 1$ و $f(\alpha) = \alpha$

ولدينا: f متزايدة تماما على المجال $]1; \alpha[$ ومنه $f(\alpha)$ ، $f(x)$ ، $f(1)$ حسب وضعية x ، α ، 1.

التمرين23:دورة جوان 2009

الجزء الأول:

1)حساب $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)$

$h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$ معرفة على $]-1,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x+\ln(x+1))=+\infty$ ، $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}(1-2+\ln(x+1))=-\infty$

2)تبيان أن: $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

لدينا: $h'(x)=2x+2+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)^2+1}{x+1}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة h وتشكيل جدول تغيراتها

بماأن : $x\succ -1$ فإن: $h'(x)\succ 0$ ومنه : h متزايدة تماما

x	-1		0		$+\infty$
h'(x)	‖	+	0	+	
h(x)	‖	↗	0	↗	$+\infty$
	$-\infty$				

3)حساب h(0) واستنتاج اشارة h(x)

$h(0)=0$ واشارة h(x) هي حسب الجدول التالي:

x	-1		0		$+\infty$
h(x)	‖	−	0	+	

ب)البرهان أن $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$

نضع: $t=\ln u$ ومنه $u=e^t$ إذا كان $u\to+\infty$ فإن $t\to+\infty$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^t}{t}}=0$

ج) استنتاج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)-\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty-0=+\infty$

د)حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}(-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1})=0$

استنتاج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$ ومنه (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y=x-1$ في جوار $+\infty$

هـ) دراسة وضعية (C_f) **بالنسبة للمستقيم المقارب المائل**

ندرس اشارة الفرق $[f(x)-(x-1)]=-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

اشارة الفرق هي حسب إشارة $-\ln(x+1)$ لأن $x+1>0$

$-\ln(x+1)=0$ معناه $\ln(x+1)=0$ أي $x=0$ معناه (C_f) يقطع المقارب المائل في النقطة $(0;-1)$

$-\ln(x+1)\geq 0$ معناه $\ln(x+1)\leq 0$ أي $-1\prec x\leq 0$ معناه (C_f) فوق المقارب المائل

$-\ln(x+1)\leq 0$ معناه $\ln(x+1)\geq 0$ أي $x\geq 0$ معناه (C_f) تحت المقارب المائل

2) تبيين أن $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-1\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

تشكيل جدول التغيرات

اشارة $f'(x)$ هي حسب اشارة $h(x)$

جدول التغيرات

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

3) تبيين ان المنحنى (C_f) **يقطع المستقيم:** $y=2$

(C_f) يقطع المستقيم: $y=2$ معناه المعادلة $f(x)=2$

تقبل حلا وحيدا α محصورا بين $3,3$ و $3,4$

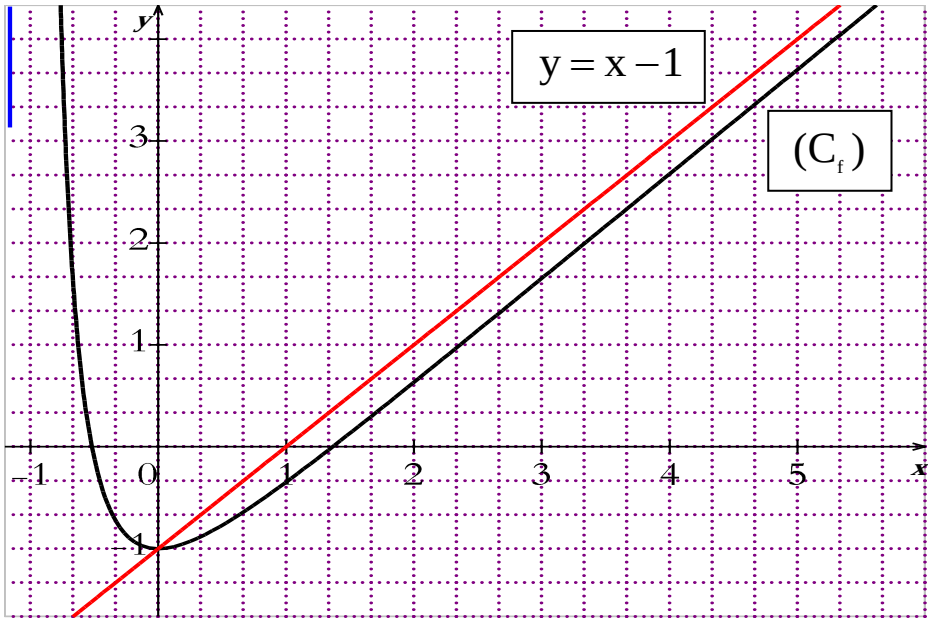
f متزايدة على المجال $[3,3\,;3,4]$

ولدينا: $f(3,3)=1,96$ و $f(3,4)=2,06$

ونلاحظ ان: $f(3,3)\prec 2\prec f(3,4)$

ومنه وحسب مبرهنة القيم التوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث: $f(\alpha)=2$

4) رسم المنحنى (C_f)



شعبة تقني رياضي

التمرين24:دورة 2019

I-حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ ، ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

g والدالة العددية المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = (x+1)(x+e) - e(x\ln x)$$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = e$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x = 0$ نهاية شهيرة ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (x+1)(x+e) = e$.

بما أن g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = e$ فإن $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in]0;+\infty[$

II -1-أ) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، ثم تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln(x+1) + \dfrac{e\ln x}{x+1}$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ لان $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln(x+1) = 0$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ex}{x+1}.\dfrac{\ln x}{x} = +\infty + e(0) = +\infty$

ب) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x+1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{-e}{(x+1)^2}\ln x + \frac{e}{x(x+1)} = \frac{(x+1)(x+e) - ex\ln x}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x+1)^2}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة $g(x)$ لأن المقام موجب

وعليه الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها وجدول تغيراتها يكون كما يلي:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2- كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

معادلة المماس الأول (T) هي: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ أي: $y = \dfrac{e+1}{2}x - \dfrac{e+1}{2} + \ln 2$

3-أ) تبيّان أن المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α.

نبيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α.

من جدول تغيرات الدالة f الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0;+\infty[$ يحقق: $f(\alpha) = 0$

ومنه المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α.

ب) التحقق أن : $0,7 \le \alpha \le 0,8$

لدينا : $f(0,7) < 0 < f(0,8)$ ومنه $0,7 \le \alpha \le 0,8$

4- أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - \ln(x+1)]$ ، ثم تفسير النتيجة بيانيا.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \ln(x+1)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{ex}{x+1}.\frac{\ln x}{x} = e.0 = 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - \ln(x+1)] = 0$ ومعناه المنحنى (T) مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (Γ) و (C_f)

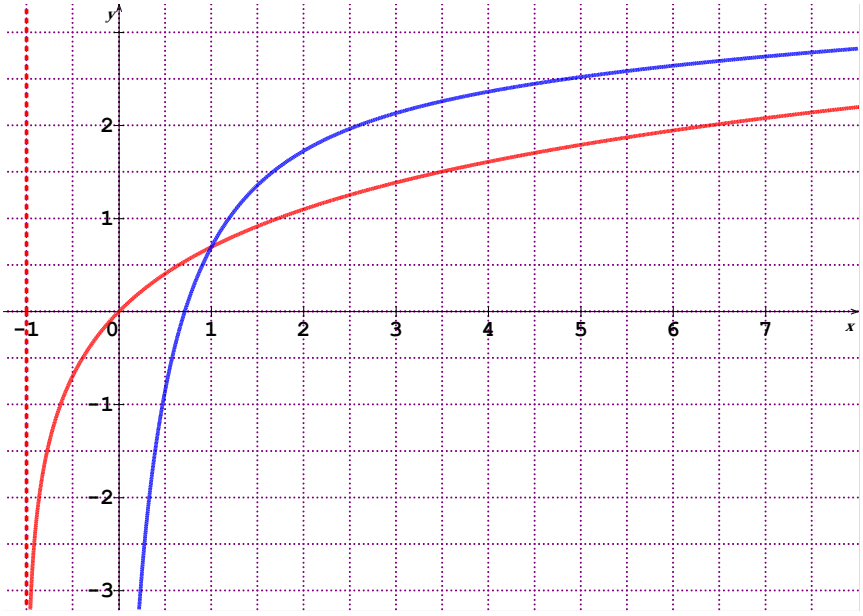
لدينا: $[f(x) - \ln(x+1)] = \frac{e}{x+1}\ln x$ وعليه إشارة الفرق هي حسب اشارة $\ln x$ وهي كما يلي

من أجل كل $0 < x < 1$ يكون المنحنى (C_f) يقع تحت (Γ)

من أجل $x = 1$ يكون المنحنى (C_f) يقطع (Γ) احداثييها $(1;\ln 2)$

من أجل كل $x > 1$ يكون المنحنى (C_f) يقع فوق (Γ).

ج) رسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f)



ملاحظة: المنحنى (Γ) هو صورة منحنى الدالة $x \to \ln x$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{-1}{0}$

التمرين25: دورة 2018

I-1- دراسة اتجاه تغير الدالة g المجال $]0;1[$.

الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;1[$ كمايلي: $g(x) = 2 - x + \ln x$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;1[$ حيث: $g'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{-x+1}{x}$

من أجل كل $x\in]0;1[$ يكون $g'(x)>0$ وعليه الدالة g متزايدة تماما على مجال تعريفها.

2- تبيّان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,15\le\alpha\le0,16$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;1[$ و لدينا: $g(0,15)=$ و $g(0,16)=$

وعليه: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$ حيث $0,15\le\alpha\le0,16$.

3- استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;1[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)\prec0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;1[$ فإن: $g(x)\succ0$.

II- 1- حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

الدالة العددية f المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1-2x+\ln x}{x-1}$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=-\infty$ لان $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}(1-2x+\ln x)=-1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}(x-1)=0^+$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{x-1}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}.\frac{\ln x}{x}=-2+1.0=-2$$

تفسير النتيجتين بيانيا

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=-\infty$ معناه المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور التراتيب

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2$ معناه المستقيم ذو المعادلة $y=-2$ مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور الفواصل

2- أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{g(\frac{1}{x})}{(x-1)^2}$.

$$f'(x)=\frac{(-2+\frac{1}{x})(x-1)-1(1-2x+\ln x)}{(x-1)^2}=\frac{2-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{2-\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{(x-1)^2}=\frac{g(\frac{1}{x})}{(x-1)^2}$$

ب) تبيّان ان f متزايدة تماما على $\left]1;\frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ ثم تشكيل جدول تغيراتها

من عبارة $f'(x)$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة $g(\frac{1}{x})$ لأن المقام موجب

لدينا: من أجل كل $x\in]\alpha;1[$ فإن: $g(x)>0$ وعليه من أجل كل $x\in\left]1;\frac{1}{\alpha}\right[$ فإن $g(\frac{1}{x})>0$

من أجل كل $x\in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)<0$ وعليه من أجل كل $x\in\left]\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ فإن $g(\frac{1}{x})<0$

عليه f متزايدة تماما على $\left]1;\frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ وجدول تغيرات g يكون كما يلي

x	1		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\frac{1}{\alpha})$	↘	-2

3) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y=-2$

لدراسة الوضع النسبي ندرس اشارة الفرق $f(x)-y=\frac{1-2x+\ln x}{x-1}+2=\frac{-1+\ln x}{x-1}$

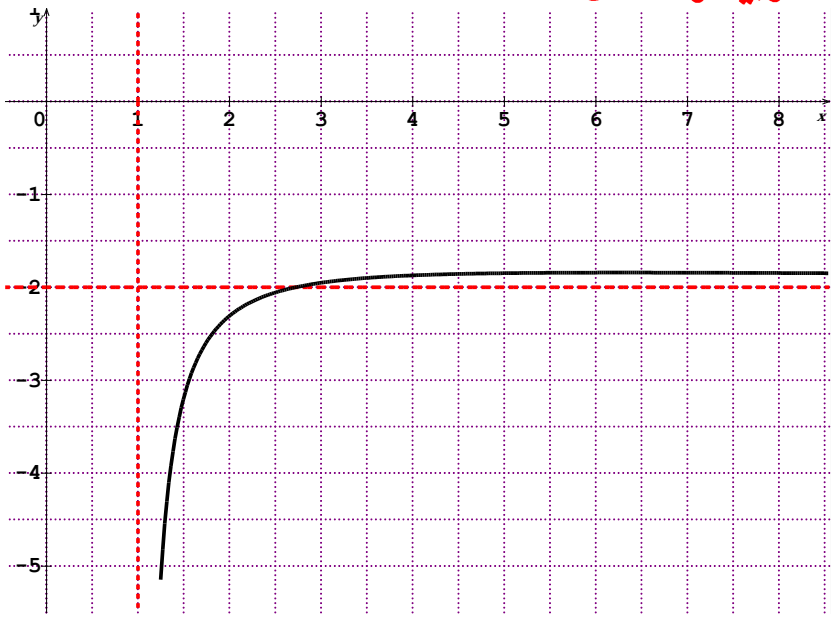
من العبارة السابقة نستنتج ان اشارة الفرق هي نفس اشارة $-1+\ln x$ وهي كما يلي

1) $-1+\ln x=0$ ومعناه $x=e$ ومعناه (C_f) يقطع (Δ) في نقطة احداثييها $(e;-2)$

2) $-1+\ln x>0$ ومعناه $x>e$ ومعناه (C_f) يقع فوق (Δ) في المجال $]e;+\infty[$

3) $-1+\ln x<0$ ومعناه $x<e$ ومعناه (C_f) يقع تحت (Δ) في المجال $]0;e[$.

4-رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f)



5-تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)|=m$ حليّن متمايزين.

حلول المعادلة $|f(x)|=m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y=m$ ومنحنى الدالة ذو المعادلة $y=|f(x)|$ وهو نظير المنحنى (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل

لدينا: المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين متمايزين معناه $-2<m<f(\frac{1}{\alpha})$

وعليه $|f(x)|=m$ تقبل حلين متمايزين معناه $-f(\frac{1}{\alpha})<m<2$

التمرين26:دورة 2017

1-أ)حساب النهايتين $\lim\limits_{x\to 2^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^{<}} f(x)$ **وتفسير النتيجتين بيانيا**

لدينا:الدالة f معرفة على المجال $]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=-2x+3+2\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$

* $\lim\limits_{x\to 1^{<}} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 1^{<}} \ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1^{<}}(-2x+3)=1$

$\lim\limits_{x\to 2^{>}} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 2^{>}} \ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^{>}}(-2x+3)=-1$.

* $\lim\limits_{x\to 1^{<}} f(x)=-\infty$ معناه للنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 2^{>}} f(x)=+\infty$ معناه للنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x=2$.

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)=\ln 1=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x+3)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)=\ln 1=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+3)=+\infty$

2)تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D : $f'(x)=-2-\dfrac{2}{(x-1)(x-2)}$.

لدينا: $f(x)=-2x+3+2\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ أي $f(x)=-2x+3+2[\ln(x-1)-\ln(x-2)]$

ومنه: $f'(x)=-2+2\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}\right]=-2-\dfrac{2}{(x-1)(x-2)}$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

لدينا: $f'(x)=-2\left[1+\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}\right]\prec 0$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ سالبة تماما:

وعليه الدالة f متناقصة تماما على مجالي تعريفها وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	−		‖		‖		−
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖	↗	‖	↘	$-\infty$

3) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، $(3-x)\in D_f$: $f(3-x)+f(x)=0$

أولا:من أجل كل $x\in D_f$ فإن $]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[$ $(-x)\in$ ومنه $(3-x)\in D_f$

ثانيا: $f(3-x)+f(x)=-2(3-x)+3+2\left[\ln\frac{(2-x)}{(1-x)}\right]-2x+3+2\left[\ln\frac{(x-1)}{(x-2)}\right]$

$=2\left[\ln\frac{(x-1)(2-x)}{(x-2)(1-x)}\right]=2\left[\ln\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-1)}\right]=2\ln 1=0$

ب) استنتاج ان المنحنى (C_f) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه

من العبارة $f(3-x)+f(x)=0$ والتي تكافئ $f(2.\frac{3}{2}-x)+f(x)=2(0)$

نستنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مركز تناظر احداثياها $\omega(\frac{3}{2};0)$.

4)تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,45;0,46[$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty;1[$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}+1}f(x)=-\infty$

لدينا: $f(0,45)=0.027\succ 0$ و $f(0,46)=-0,015\prec 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha)=0$ حيث $\alpha\in]0,45;0,46[$.

استنتاج ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا أخر β يطلب تعيين حصرا له

*بماأن المنحنى (C_f) يقبل النقطة ω كمركز تناظر له نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا أخر β على المجال $]2;+\infty[$ حيث $\alpha+\beta=2(\frac{3}{2})$

لأن النقطة التي احداثياها $(\alpha;0)$ نظيرة النقطة التي احداثياها $(\beta;0)$ بالنسبة للنقطة ω

لدينا: $\alpha+\beta=3$ ومنه $\beta=3-\alpha$

وبماأن $\alpha\in]0,45;0,46[$ فإن $\beta\in]3-0,46;3-0,45[$ أي $\beta\in]2,54;2,55[$.

5)تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=-2x+3$ مقارب مائلا للمنحنى (C_f) .

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=-2x+3$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-y]=0$

لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=\ln 1=0$.

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

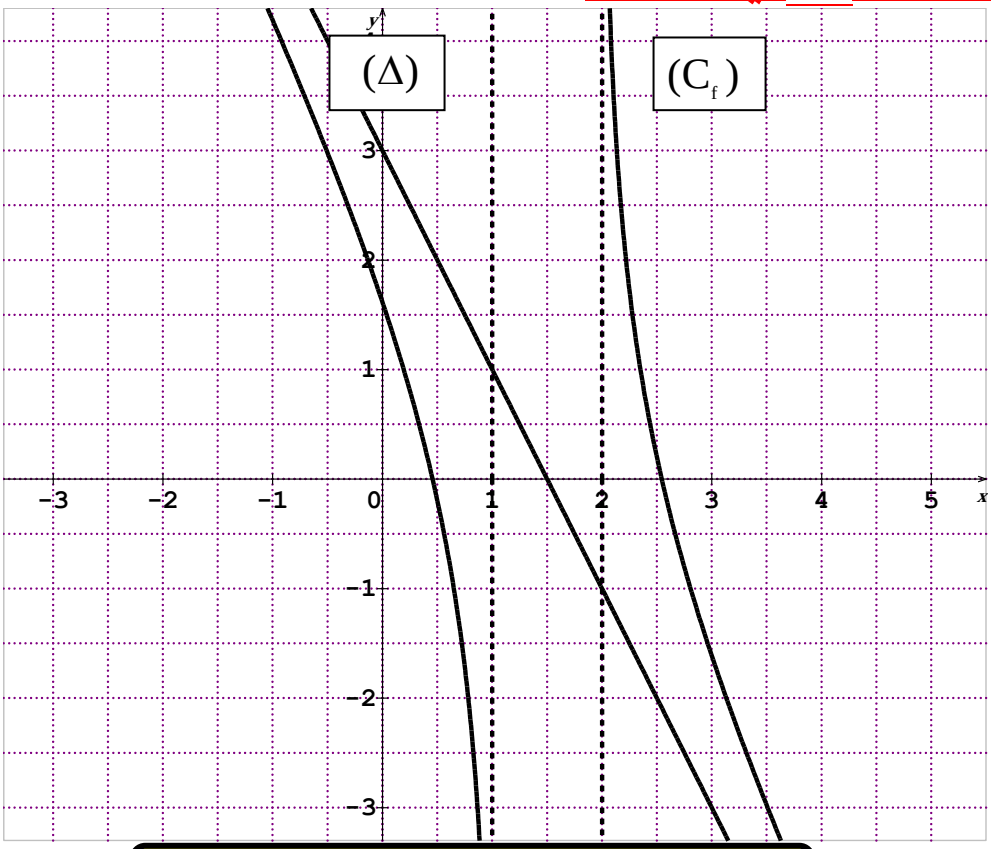
لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

لدينا: $f(x)-y\prec 0$ من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ لأن $\frac{x-1}{x-2}<1$

$f(x)-y\succ 0$: من أجل كل $x\in]2;+\infty[$ لأن $\frac{x-1}{x-2}>1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	‖	$+$	
الوضع	(Δ) تحت (C_f)	‖	(Δ) فوق (C_f)	

ب) رسم (Δ) والمنحنى (C) في أخر الحل



التمرين27:دورة 2017 الإستدراكية

I-1)حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

لدينا: الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2-\ln x}{x^2}$

* $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+} 2-\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0^+$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\frac{1}{2}$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ حيث $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ نهاية شهيرة

ب)دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها

حساب $g'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $g'(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}(x^2)-2x(2-\ln x)}{x^4}=\dfrac{-5+2\ln x}{x^3}$

إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة $-5+2\ln x$ لأن المقام موجب تماما

$-5+2\ln x=0$ معناه $x=e^{\frac{5}{2}}=e^2\sqrt{e}$

$-5+2\ln x\prec 0$ معناه $x\in\left]0;e^2\sqrt{e}\right[$ و $-5+2\ln x\succ 0$ معناه $x\in\left]e^2\sqrt{e};+\infty\right[$

وعليه جدول التغيرات يكون كما يلي

x	0		$e^2\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(e^2\sqrt{e})$	↗	$-\frac{1}{2}$

2-أ)تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,71\prec\alpha\prec 1,72$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\left]0;e^2\sqrt{e}\right[$ و $x\in$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}g(x)=+\infty$ و $g(e^2\sqrt{e})\prec 0$

لدينا: $g(1,71)=1,31$ و $g(1,72)=-0,07$ أي $g(1,71)\times g(1,72)\prec 0$

وعليه توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$ حيث $1,71\prec\alpha\prec 1,72$ حسب مبرهنة كوشي

ب) استنتاج إشارة $g(x)$

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)\succ 0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)\prec 0$

II-1) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

لدينا: الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=-\frac{1}{2}x+2+\frac{-1+\ln x}{x}$

ومنه: $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{-1+\ln x}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}(-\frac{1}{2}x+2)=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1+\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{2}x+2)=-\infty$

2-أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{(\frac{1}{x})(x)-1(-1+\ln x)}{x^2}=-\frac{1}{2}+\frac{2-\ln x}{x^2}=g(x)$

ومنه اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

2-أ) تبيّان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=-\frac{1}{2}x+2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=-\frac{1}{2}x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1+\ln x}{x}=0$

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) ينبغي دراسة اشارة الفرق $f(x)-y=\frac{-1+\ln x}{x}$

إشارة الفرق $f(x)-y$ هي حسب إشارة $-1+\ln x$ وهي كمايلي:

$-1+\ln x=0$ معناه $x=e$ ومعناه (C_f) يقطع (Δ) في نقطة إحداثييها $(e;f(e))$

$-1+\ln x\prec 0$ معناه $x\in]0;e[$ ومعناه (C_f) تحت (Δ) في هذا المجال

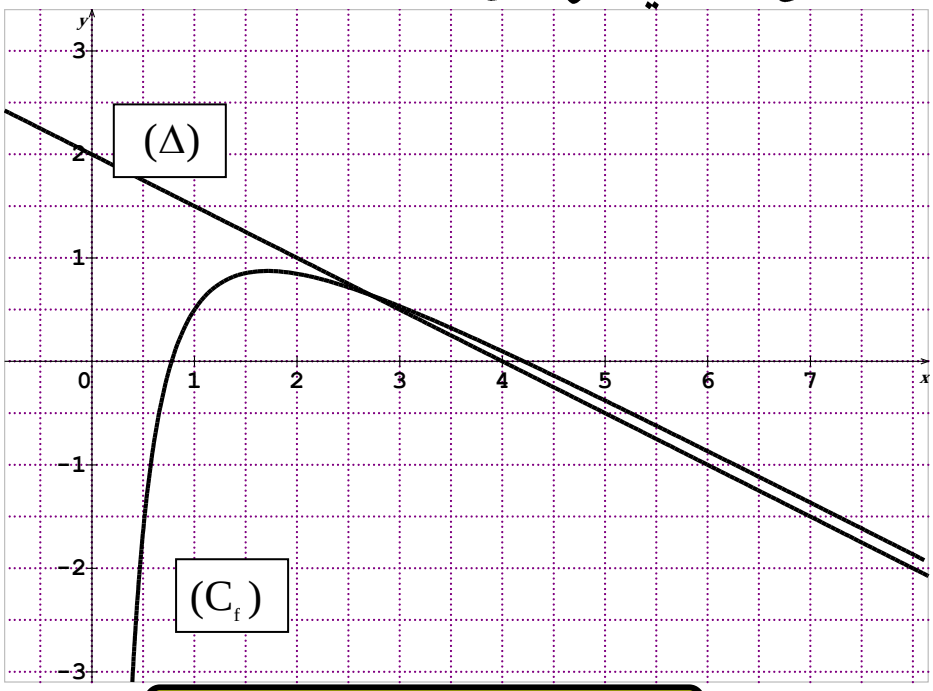
$-1+\ln x\succ 0$ معناه $x\in]e;+\infty[$ ومعناه (C_f) فوق (Δ) في هذا المجال

3) انشاء في المعلم السابق المستقيم (Δ) المنحنى (C_f).

من المعطيات لدينا: $f(\beta)=f(\gamma)=0$ حيث $0,76\prec\beta\prec 0,77$ و $4,19\prec\gamma\prec 4,22$

ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما β و γ.

رسم المستقيم (Δ) المنحنى (C_f) في آخر الحل.



التمرين28:دورة 2016 م1

I-1-أ)حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1^{+}}g(x)$

لدينا:الدالة g معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)$

* $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(x+1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$.

ب)دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها

حساب $g'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $g'(x) = (\frac{x-1}{x+1})' + (\ln(x+1))' = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+3}{(x+1)^2}$

نستنتج أن: $g'(x) \succ 0$ لان: $x \succ -1$ وعليه جدول التغيرات يكون كم يلي

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2-أ)تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,4 \prec \alpha \prec 0,5$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

لدينا: $g(0,4) = -\frac{3}{7} + \ln 1.4$ و $g(0,5) = -\frac{1}{3} + \ln 1.5$ أي $g(0,5) \times g(0,4) \prec 0$

وعليه: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $0,4 \prec \alpha \prec 0,5$.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]-1;\alpha[$ فإن: $g(x) \prec 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x) \succ 0$

II-1) حساب $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ وتفسير النتيجة بيانيا ثم حساب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + (x-1)\ln(x+1)$

ومنه: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(x+1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to -1^+} (x-1) = -2$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ معناه للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x = -1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-1)\ln(x+1) = \lim\limits_{x\to +\infty} (x)\ln(x) = +\infty$

2-أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $]-1;+\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f'(x) = (x-1)'.(\ln(x+1))' = 1.\ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} = g(x)$

ومنه اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

ب) تبيان أن $f(\alpha)=-\alpha+4-\frac{4}{\alpha+1}$ **وإعطاء حصرا لـ** $f(\alpha)$

*لدينا: $f(\alpha)=1+(\alpha-1)\ln(\alpha+1)$ ولدينا أيضا: $g(\alpha)=0$ ومعناه $-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}=\ln(\alpha+1)$

ومنه: $f(\alpha)=1-(\alpha-1)\frac{(\alpha-1)}{(\alpha+1)}=\frac{(\alpha+1)-(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)}=\frac{-\alpha^2+3\alpha}{(\alpha+1)}=-\alpha+4-\frac{4}{(\alpha+1)}$

*الحصر لدينا: $0,4\prec\alpha\prec0,5$ تكافئ $3,5\prec-\alpha+4\prec3,6$.....(1)

ولدينا: $0,4\prec\alpha\prec0,5$ وتكافئ $1,4\prec\alpha+1\prec1,5$ وتكافئ $\frac{4}{1,5}\prec\frac{4}{\alpha+1}\prec\frac{4}{1,4}$...(2)

بطرح (2) من (1) نجد: $0,64\prec f(\alpha)\prec0,93$

3-أ) التحقق أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ $h'(x)=f'(x)-f'(a):$

لدينا: $h'(x)=f'(x)-\left[f'(a)(x-a)+f(a)\right]'=f'(x)-f'(a)$ لأن $(x-a)'=1$ و $f'(a)=0$

ب) تعيين إشارة $h'(x)$ **باستعمال اتجاه تغير الدالة g**

لدينا: $h'(x)=f'(x)-f'(a)=g(x)-g(a)<0$ من أجل $x<a$ لأن g متزايدة تماما

لدينا: $h'(x)=f'(x)-f'(a)=g(x)-g(a)>0$ من أجل $x>a$ لأن g متزايدة تماما

ومنه اشارة $h'(x)$ هي حسب الجدول التالي

x	-1		a		$+\infty$
اشارة $h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

استنتاج اتجاه تغير الدالة h

من الجدول السابق والذي يوضح اشارة $h'(x)$ نستنتج أن:

من أجل كل $x\in]-1;a[$ فإن: h متناقصة تماما ومن أجل كل $x\in]a;+\infty[$ فإن: h متزايدة تماما

والدالة h تقبل 0 كقيمة حدية صغرى من أجل a لأن: $h(a)=f(a)-f(a)=0$ وعليه $h(x)\geq0$

ج) تحديد الوضع النسبي للمنحنى (C) **والمماس** (T_a)

(T_a) له معادلة من الشكل: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

لتحديد الوضع النسبي للمنحنى (C) والمماس (T_a) ندرس اشارة الفرق $f(x)-y=h(x)$

بما أن $h(x)\geq0$ فإن المنحنى (C) يكون دائما فوق المماس (T_a) ويمسه في النقطة ذات الفاصلة a

4-أ) تبيان وجود مماسين (T_a) **يشملان النقطة** $A(1;0)$ **وتعيين معادلتيهما.**

لدينا: (T_a) له معادلة من الشكل

المماس (T_a) يشمل النقطة $A(1;0)$ معناه $0=f'(a)(1-a)+f(a)$

ولدينا: $0=f'(a)(1-a)+f(a)$ تكافئ $0=g(a)(1-a)+f(a)$

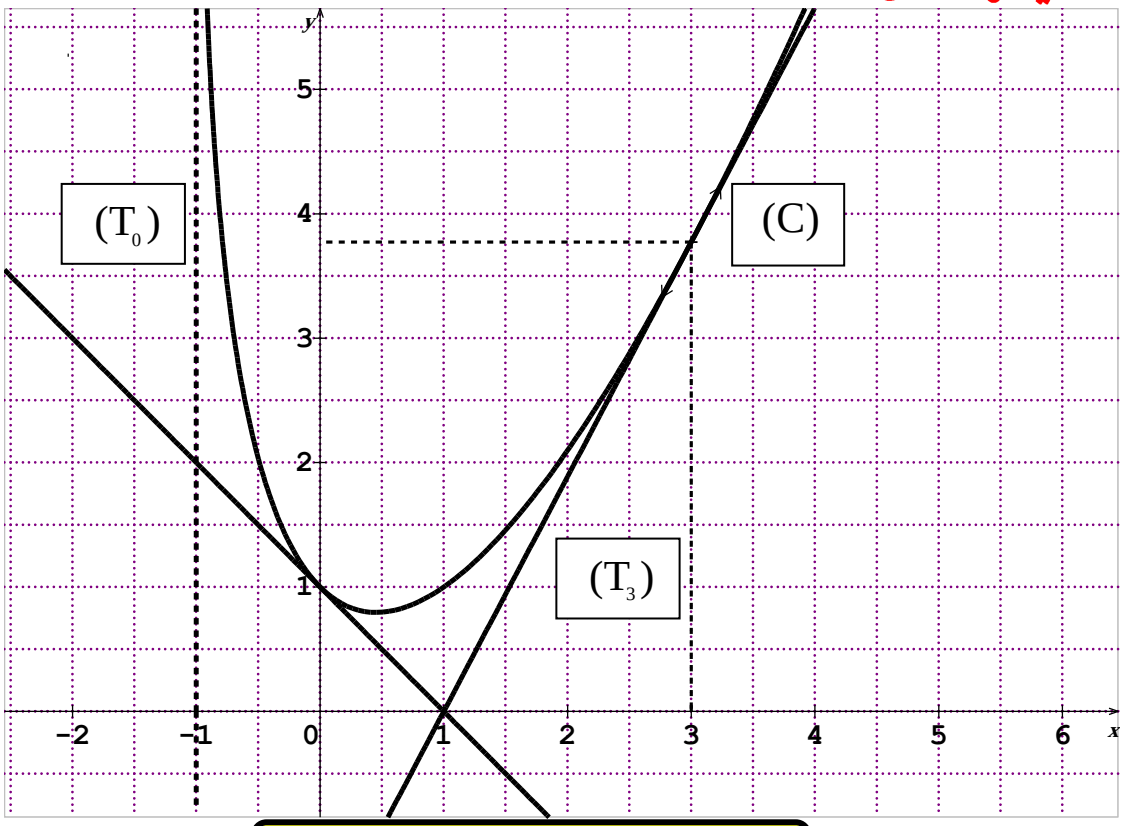
معناه $\frac{(1-a)(a-1)}{(a+1)}+1=0$ وعليه $(a-1)^2=a+1$ أي $a^2-3a=0$ ومنه $a=0$ أو $a=3$

ومنه يوجد مماسين (T_a) لـ (C) الأول عند النقطة $(0;1)$ والثاني عند النقطة $(3;2\ln 4)$

معادلة المماس الأول (T_0) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي: $y=-x+1$

معادلة المماس االثاني (T_3) هي: $y=f'(3)(x-3)+f(3)$ أي: $y=\left(\frac{1}{2}+\ln 4\right)x-\frac{1}{2}-\ln 4$

ب) رسم المماسين والمنحنى (C)



التمرين29:دورة 2016 م2

I) 1) –أ)حساب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$.

$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}(x-x\ln x)=0$ لأن $\lim_{x\xrightarrow{>}0} x\ln x=0$ نهاية شهيرة.

حالة عدم التعيين $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-x\ln x)$

إزالة حالة عدم التعيين $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x(1-\ln x)=-\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيرها.

من أجل كل $]0;+\infty[$ $g'(x)=1-(1.\ln x+x.\frac{1}{x})=-\ln x : x\in$

اشارة $g'(x)$ من اشارة $-\ln x$ على المجال

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

وعليه جدول تغيرات الدالة g يكون كتالي

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

2)تبيّان ان المعادلة $g(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3,5 \prec \alpha \prec 3,6$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]1;+\infty[$ و $\lim\limits_{x \to 1^{+}} g(x)=1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=-\infty$

لدينا: $g(3,5)=-0,88$ و $g(3,6)=-1,01$ أي $g(3,6) \prec -1 \prec g(3,5)$

حسب مبرهنة القيم التوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=-1$ حيث $3,5 \prec \alpha \prec 3,6$.

3) استنتاج إشارة العبارة $g(x)+1$ على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا: $g(x)+1=0$ تكافئ $g(\alpha)=-1$ ومن الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)+1$ هي:

من أجل كل $x \in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)+1 \succ 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)+1 \prec 0$

II-1)تبيّان أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x=0$ و $y=0$

* $\lim\limits_{x \to 0^{+}} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^{+}} \dfrac{\ln x}{x+1}=\lim\limits_{x \to 0^{+}} \ln x=-\infty$ ومعناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $x=0$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x+1}=\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{1}{x}}=0$ ومعناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=0$

2-أ)البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

لدينا: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x+1)-1.\ln x}{(x+1)^2}=\frac{x-x\ln x+1}{x(x+1)^2}=\frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$$

ب)تبيّان أن الدالة f متزايدة على $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x)=\dfrac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)+1$ لأن المقام موجب تماما

من أجل كل $x \in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)+1 \succ 0$ ومنه f متزايدة على $]0;\alpha]$

ومن أجل كل $x \in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)+1 \prec 0$ ومنه f ومتناقصة تماما على $]\alpha;+\infty[$
وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كتالي

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

جـ) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
(T) له معادلة من الشكل: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

ومنه $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

د) حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، تفسير النتيجة هندسيا.
بما أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند α لأنها قابلة للشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ فإن:
$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=0$ ومعناه المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذت الفاصلة α
المماس عند النقطة ذات الفاصلة α يوازي حامل محور الفواصل وله معادلة من الشكل $y=f(\alpha)$

3) أ-تبيّان أن : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$.

لدينا: $f(\alpha)=\frac{\ln\alpha}{\alpha+1}$...(1) ولدينا أيضا $g(\alpha)=-1$ ومعناه $\alpha-\alpha\ln\alpha=-1$ أي $\ln\alpha=\frac{1+\alpha}{\alpha}$

بعدتعويض قيمة $\ln\alpha$ في العبارة (1) نجد: $f(\alpha)=\frac{\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)}=\frac{1}{\alpha}$

ب- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (وتدوّير النتائج إلى 10^{-2})

لدينا: $f(\alpha)=\frac{\ln\alpha}{\alpha+1}$ ولدينا $3,5\prec\alpha\prec3,6$ وتكافئ $4,5\prec\alpha+1\prec4,6$...(1) و $1,25\prec\ln\alpha\prec1,28$....(2)
من المتباينتين (1) و(2) نجد: $0,27\prec f(\alpha)\prec0,28$

جـ-رسم (C_f). (في آخر الحل)

4- أ-التحقق أن المعادلة (E) يؤول حلّها إلى حل المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}x-m$

لدينا: $(E)..\ln(x^2)=x^2+x-2m(x+1)$ تكافئ $2\ln x=x(x+1)-2m(x+1)$

وبعد قسمة الطرفين على $\frac{1}{2}(x+1)$ نجد $\frac{\ln x}{x+1}=\frac{1}{2}x-m$ أي $f(x)=\frac{1}{2}x-m$

ب -تعيّن بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلّين متمايزين.

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x-m$ والمنحنى (C_f)

من البيان يكون للمعادلة (E) حلين متمايزين معناه $m \succ \frac{1}{2}$.

5-أ- تبيّان أن h زوجية.

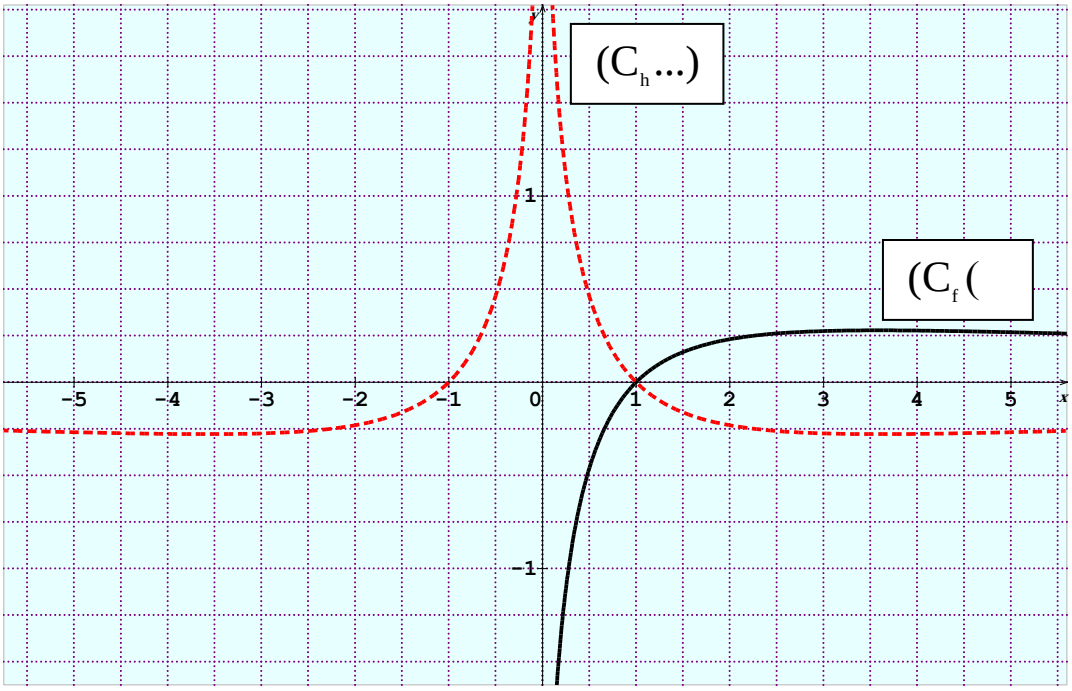
h دالة زوجية معناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ و $-x \in \mathbb{R}^*$: $h(-x)=h(x)$

لدينا: $h(-x)=\frac{\ln|-x|}{-|-x|-1}=\frac{\ln|x|}{-|x|-1}=h(x)$ لأن $|-x|=|x|$ ومنه h زوجية.

ب- رسم في نفس المعلم المنحنى (C_f) و (C_h).

* (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل من أجل $x \in \mathbb{R}_+^*$

* (C_h) نظير (C_f) بالنسبة للمبدأ من أجل $x \in \mathbb{R}_-^*$ (أونتم الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب)



التمرين30:دورة 2015

I -1) حساب $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

لدينا: $h(x)=(x+2)^2+2-2hn(x+2)$ و المعرفة على $]-2;+\infty[$

$\lim\limits_{x \to -2^+}(-2\ln(x+2))=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x)=\lim\limits_{x \to -2^+}(x+2)^2+2-2\ln(x+2)=+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)=\lim\limits_{x \to +\infty}(x+2)^2+2-2\ln(x+2)$ حالة عدم التعيين.

$$\lim_{x \to +\infty} h(x)=\lim_{x \to +\infty}(x+2)\left[(x+2)+\frac{2}{x+2}-2\frac{\ln(x+2)}{(x+2)}\right]=+\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(x+2)}{(x+2)}\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x+2}\right]=0$

2)دراسة اتجاه تغير h وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $h(x)=(x+2)^2+2-2hn(x+2)$ و $D_h=]-2;+\infty[$.

ومنه: $h'(x)=2(x+2)-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{2(x+2)^2-2}{x+2}=\dfrac{2[(x+2)-1][(x+2)+1]}{(x+2)}$

أي: $h'(x)=\dfrac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)}$.

$h'(x)=0$ معناه $(x+1)(x+3)=0$ معناه $x=-1$ أو $x=-3\notin D_h$ مرفوض

$h'(x)\prec 0$ معناه $(x+1)(x+3)\prec 0$ معناه $x\in]-2;-1[$.

$h'(x)\succ 0$ معناه $(x+1)(x+3)\succ 0$ معناه $x\in]-1;+\infty[$

وعليه جدول تغيرات الدالة h كمايلي:

x	-2		-1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	−	0	+	
$h(x)$	‖ $+\infty$	↘	$h(-1)$	↗	$+\infty$

3)استنتاج أنه من أجل كل x من $]-2;+\infty[$: $h(x)>0$

من جدول التغيرات للدلة h لدينا: $h(-1)=3\succ 0$ ومنه $h(x)\succ 0$

I I -1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا ثم حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-2}f(x)$.

لدينا: $f(x)=x+1+\dfrac{2}{x+2}\ln(x+2)$ والمعرفة على $]-2;+\infty[$.

* $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-2}f(x)=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-2}\dfrac{2}{x+2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-2}\ln(x+2)=-\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-2}f(x)=-\infty$ معناه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-2$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln(x+2)}{x+2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$.

2) تبيان أنه من أجل كل x من $]-2;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+2)^2}$.

$$f'(x)=1-\frac{2}{(x+2)^2}\ln(x+2)+\frac{2}{(x+2)}\times\frac{1}{(x+2)}=\frac{(x+2)^2-2\ln(x+2)+2}{(x+2)^2}=\frac{h(x)}{(x+2)^2}$$

2)دراسة اتجاه تغير f على $]-2;+\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x)=\frac{h(x)}{(x+2)^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $h(x)$

وعليه تكون الدالة f متزايدة تماما على $]-2;+\infty[$ لأن : $h(x)\succ 0$

x	-2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ⟶ $+\infty$

3) أ) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$(\Delta): y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x+2)}{x+2}=0$ نهاية شهيرة

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) : ندرس إشارة الفرق: $f(x)-(x+1)$

من الجواب السابق لدينا: $f(x)-(x+1)=\frac{2\ln(x+2)}{(x+2)}$

إشارة الفرق هي من إشارة $\ln(x+2)$ لأن $(x+2)\succ 0$ من أجل كل $x\in]-2;+\infty[$

$*\ln(x+2)=0$ ومنه $x=-1$ معناه (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي احداثياها $(-1;0)$

$*\ln(x+2)\prec 0$ ومنه $x\prec -1$ معناه (C_f) تحت (Δ) في المجال $]-2;-1[$

$*\ln(x+2)\succ 0$ ومنه $x\succ -1$ معناه (C_f) فوق (Δ) في المجال $]-1;+\infty[$

4-أ) اثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعيين إحداثييها.

المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف معناه الدالة "f تنعدم وتغير إشارتها

لدينا: $f'(x)=\frac{h(x)}{(x+2)^2}$ ومنه $f''(x)=\frac{h'(x)(x+2)^2-2(x+2)h(x)}{(x+2)^4}$

ومنه: $f''(x)=\frac{h'(x)(x+2)-2h(x)}{(x+2)^3}=\frac{4\ln(x+2)-6}{(x+2)^3}$

$f''(x)=0$ معناه $\ln(x+2)=\frac{3}{2}$ أي $x+2=e^{\frac{3}{2}}$ ومنه $x=\sqrt{e^3}-2$

$f''(x)\prec 0$ معناه $x\prec\sqrt{e^3}-2$ و $f''(x)\succ 0$ معناه $x\succ\sqrt{e^3}-2$

ومنه (C_f) يقبل نقطة إنعطاف A إحداثياها $(\sqrt{e^3}-2;\sqrt{e^3}-1+\frac{3}{4\sqrt{e^3}})$

ب) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) (في آخر الحل)

III-1)حساب $\lim\limits_{x\to -1^{<}} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ **و** $\lim\limits_{x\to -1^{>}} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ **والإستنتاج بالنسبة لـ g**

كتابة العبارة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ، وذلك حسب قيم x

من أجل كل $]-2;-1[$ $g(x)=-\left[(x+1)+\dfrac{2}{x+2}\ln(x+2)\right]=-f(x):x\in]-2;-1[$

من أجل كل $]-1;+\infty[$ $g(x)=\left[(x+1)+\dfrac{2}{x+2}\ln(x+2)\right]=f(x):x\in]-1;+\infty[$

وعليه : $\lim\limits_{x\to -1^{<}} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^{<}} -\dfrac{f(x)}{x+1}=-1-\lim\limits_{y\to 0^{>}} \dfrac{2}{y}.\dfrac{\ln(y+1)}{(y+1)}=-3$

$$\lim_{x\to -1^{>}} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^{>}} \frac{f(x)}{x+1}=1+\lim_{y\to 0^{>}} \frac{2}{y}.\frac{\ln(y+1)}{(y+1)}=+3$$

نستنتج أن الدالة g غير قابلة للإشتقاق عند 1- لأن: $-3\neq +3$

2)إعطاء تفسيرا هندسيا للنتيجة

بمأن العدد المشتق من اليسار لايساوي العدد المشتق من اليمين للدالة g عند 1-

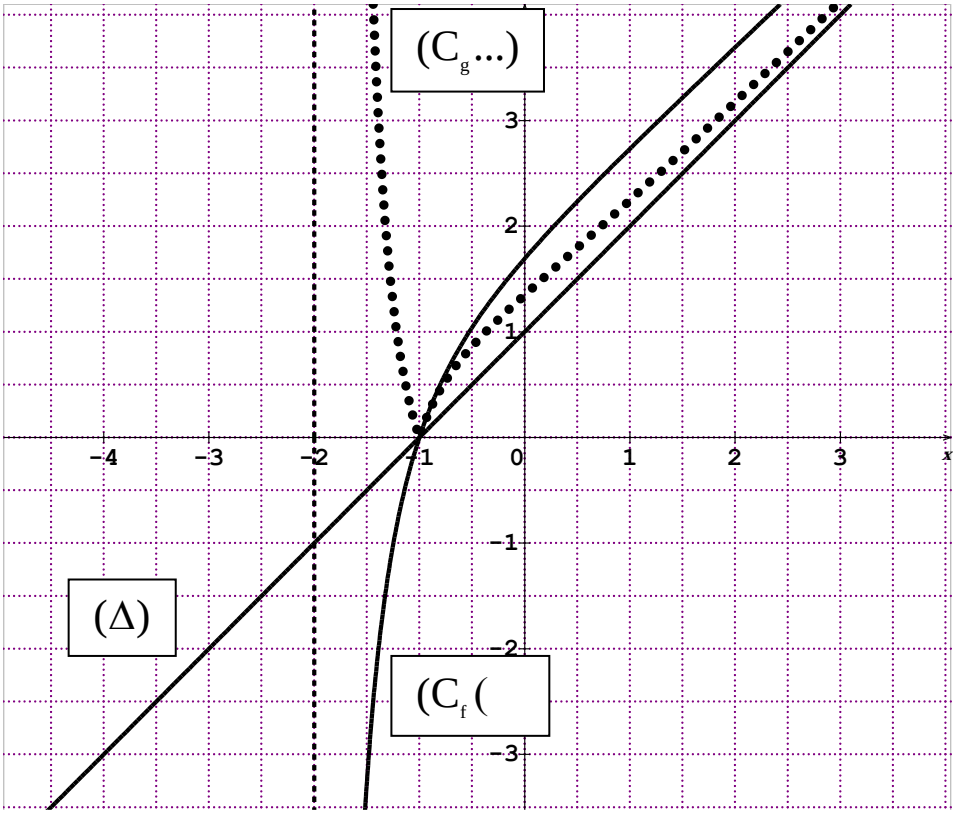
فإن منحنى الدالة (C_g) يقبل نصفي مماسين عند النقطة التي أحدثياها $(-1;0)$.

3)رسم المنحنى (C_g) **إنطلاقا من المنحنى** (C_f)

من الجواب السابق لدينا:

$g(x)=-f(x):x\in]-2;-1[$ ومعناه (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

$g(x)=f(x):x\in]-1;+\infty[$ ومعناه $(C_g)=(C_f)$



التمرين31:دورة 2014

I- 1) ادرس تغيرات الدالة g

لدينا: g دالة معرفة على $]0;3]$ بـ: $g(x)=x\ln x+x$.

النهايات

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x\ln x+x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x\ln x=0$ نهاية شهيرة و $g(3)=3\ln 3+3$

اتجاه التغير

$g'(x)=(x\ln x+x)'=1.\ln x+x.\frac{1}{x}+1=\ln x+2$

$g'(x)=0$ معناه $\ln x+2=0$ أي $x=e^{-2}$

$g'(x)\succ 0$ معناه $\ln x+2\succ 0$ أي $x\succ e^{-2}$ و $g'(x)\prec 0$ معناه $\ln x+2\prec 0$ أي $x\prec e^{-2}$

جدول التغيرات

x	2		e^{-2}		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	$g(e^{-2})$	↗	$g(3)$

2-أ) نبيّان أن المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلا وحيدا α على $]0;3]$ ثم تحقق أن $1,45\prec\alpha\prec 1,46$.

*المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلا وحيدا α على $]0;3]$ لأن:

f متزايدة على $]e^{-2};3]$ ولدينا: $g(e^{-2})=-e^{-2}$ و $g(3)=3\ln 3+3$ أي: $g(e^{-2})\prec 2\prec g(3)$

ومنه وحسب مبرهنة القيم التوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث: $g(\alpha)=2$

* لدينا: $g(1,45)=1,99$ و $g(1,46)=2,01$ ومنه $1,45\prec\alpha\prec 1,46$

ب)استنتج إشارة $g(x)-2$.

$g(\alpha)=2$ معناه $g(\alpha)-2=0$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن إشارة $g(x)-2$ هي حسب الجدول التالي

x	0		α		3
$g(x)-2$		$-$	0	$+$	

II-1)وضع تخمين حول قابلية اشتقاق للدالة f عند 2

باستعمال المنحنى (C_f) نخمن أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 2 لأنها تقبل نصفي مماسين

2) أثبات صحة تخمينك.

توضيح: $f(x)=|x-2|\ln x=\begin{cases}-(x-2)\ln x;x\in]0;2]\\(x-2)\ln x;x\in]2;3]\end{cases}$

لدينا: $\lim\limits_{x\prec 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\prec 2}\dfrac{-(x-2)\ln 2}{(x-2)}=-\ln 2=f'_g(2)$

$\lim\limits_{x\succ 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\succ 2}\dfrac{(x-2)\ln 2}{(x-2)}=\ln 2=f'_d(2)$

ومنه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 2 لأن: $f'_g(2)\neq f'_d(2)$.

3) دراسة تغيرات الدالة f

f والمعرفة على المجال $]0;3]$ بـ: $f(x)=|x-2|\ln x$

النهايات: $\lim\limits_{x\prec 0}\ln x=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\succ 0}f(x)=2\lim\limits_{x\prec 0}\ln x=-\infty$ نهاية شهيرة. و $f(3)=\ln 3$

اتجاه التغير: f قابلة للاشتقاق على كلا من المجالين $]0;2[$ و $]2;3]$ حيث:

$$f'(x)=\begin{cases}-\ln x-\dfrac{x-2}{x}=-\dfrac{g(x)-2}{x};x\in]0;2[\\ \ln x+\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{g(x)-2}{x};x\in]2;3]\end{cases}$$

من الجواب I-2 ب) نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي:

نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]2;3]$ و عكس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;2[$.

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

X	0		α		2		3
f'(x)		+	0	−	‖	+	
f (x)	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$f(3)$

III-1) تبيّان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $x=\dfrac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h).

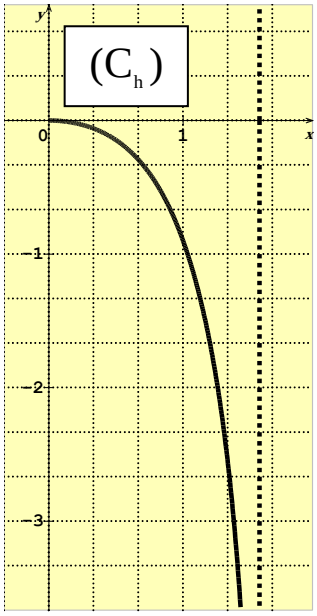
لدينا: h الدالة المعرفة على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ كمايلي: $h(x)=(2-\cos x)\ln(\cos x)$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $x=\dfrac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h) معناه $\lim\limits_{x\prec\frac{\pi}{2}}h(x)=\infty$.

لأن: $\lim\limits_{x\prec\frac{\pi}{2}}h(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\prec\frac{\pi}{2}}(\cos x)=0^+$ و $\lim\limits_{x\prec\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\prec\frac{\pi}{2}}(2-\cos x)=1$.

2) دراسة اتجاه تغير الدالة h ، ثم تشكيل جدول تغيراتها وارسم (Δ) و (C_h).

توضيح:الدالة h هي تركيب الدالة $x \to \cos x$ متبوعة بالدالة f أي: $h(x) = f(\cos x)$



نعلم أن الدالة $x \to \cos x$ متناقصة على المجال $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ و الدالة f متزايدة على المجال $[0;1]$ ومنه الدالة h متناقصة على المجال $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

لأنها تركيب دالتين مختلفتين في اتجاه التغير

وعليه جدول تغيرات الدالة h يكون كمايلي:

لدينا: $h(0) = f(\cos 0) = f(1) = 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
h(x)	0 ↘	$-\infty$

التمرين32:دورة 2013 م1

I-1) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.

g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$

من اجل كل $x \in]-1;+\infty[$ فإن: $g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$

نلاحظ أن : من اجل كل $x \in]-1;+\infty[$ فإن: $g'(x) \succ 0$ وعليه تكون g متزايدة تماما.

2)تبيّان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,31 \prec \alpha \prec 0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1) = 2-(\alpha+1)^2$

*g متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ولدينا: $g(0,32) = $ و $g(0,31)$ أي: $g(0,31) \prec 0 \prec g(0,32)$

ومنه وحسب مبرهنة القيم التوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث: $g(\alpha) = 0$

* $g(\alpha) = 0$ معناه $(\alpha+1)^2 - 2 + \ln(\alpha+1) = 0$ أي $\ln(\alpha+1) = 2-(\alpha+1)^2$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$.

الدالة g تماما على $]-1;+\infty[$ والمعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α فإن إشارة $g(x)$ حسب الجدول التالي:

x	−1	α	$+\infty$
g(x)	‖	− 0 +	

II-1- احسب $\lim\limits_{\substack{\succ \\ x \to -1}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x) = (x+1)^2 + [2 - \ln(x+1)]^2$

$\lim\limits_{\substack{\succ \\ x \to -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{\succ \\ x \to -1}} (x+1)^2 + [2-\ln(x+1)]^2 = 0 + \infty = +\infty$ لأن: $\lim\limits_{\substack{\succ \\ x \to -1}} -\ln(x+1) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)^2 + [2-\ln(x+1)]^2 = +\infty + \infty = +\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} [-\ln(x+1)]^2 = +\infty$.

2- تبيّان أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$

$$f'(x)=2(x+1)-2\left[2-\ln(x+1)\right]\frac{1}{x+1}=\frac{2\left[(x+1)^2-2+\ln(x+1)\right]}{x+1}=\frac{2g(x)}{x+1}$$

3-دراسة اتجاه تغير الدالة f، ثم تشكّيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$.

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	-1		α		$+\infty$
f'(x)	‖	$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4-تبيّان أن: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left[1+(\alpha+1)^2\right]$

ثم استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2+\left[2-\ln(\alpha+1)\right]^2$

ولدينا من جهة أخرى $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$ حسب I-2.

ومنه : $f(\alpha)=(\alpha+1)^2+\left[(\alpha+1)^2\right]^2=(\alpha+1)^2\left[1+(\alpha+1)^2\right]$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

نضع: $0,31\prec\alpha\prec0,32$ .....(1) و لدينا: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left[1+(\alpha+1)^2\right]$

(1) تكافئ $1,31\prec\alpha+1\prec1,32$ وتكافئ $(1,31)^2\prec(\alpha+1)^2\prec(1,32)^2$.....(2)

(2)تكافئ $1+(1,31)^2\prec1+(\alpha+1)^2\prec1+(1,32)^2$.....(3)

بضرب (2) و (3)لطرف لطرف نجد: $(1+(1,31)^2)(1,31)^2\prec f(\alpha)\prec(1+(1,32)^2)(1,32)^2$

بعد الحساب نجد: $\prec f(\alpha)\prec$

5-تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $[-1;2]$.

ملاحظة: $f(2)=3^2+(2-\ln(3))^2=9,$

III-1-أثبات أن المسافة $AM=\sqrt{f(x)}$

لدينا: $A(-1;2)$ و $M(x;h(x))$

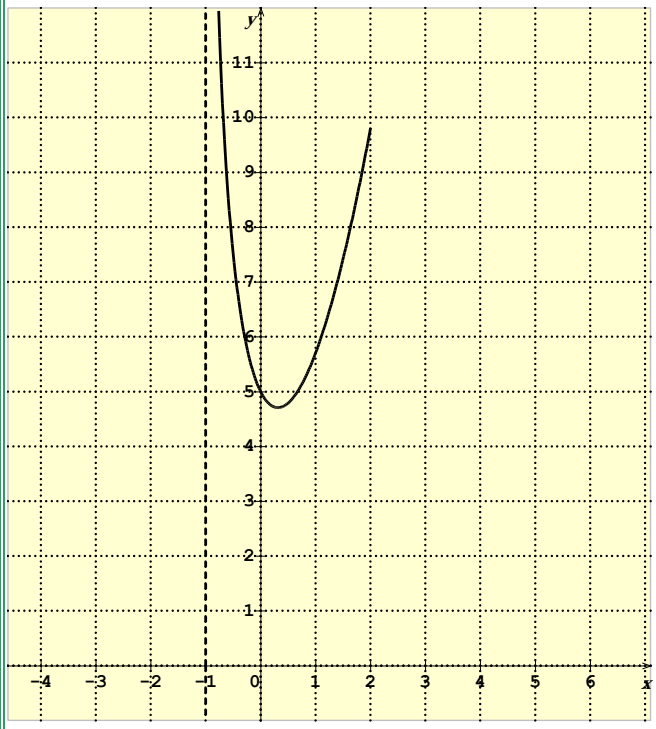
ومنه: $AM=\sqrt{(x+1)^2+(2-\ln(x+1)^2}=\sqrt{f(x)}$

k معرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

2-أ-تبيّان أن k و f نفس إتجاه التغير على $]-1;+\infty[$

الدالة k معرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة

$k(x)=\sqrt{f(x)}$: k قابلة للأشتقاق على $]-1;+\infty[$ حيث: $k'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$



من العبارة $k'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ نستنتج أن العبارتين $k'(x)$ و $f'(x)$ لهما نفس الإشارة

ومنه للدالتين k و f نفس إتجاه التغير على المجال $]-1;+\infty[$.

ب-تعيّين إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

لدينا: $AM=\sqrt{f(x)}=k(x)$

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن عندما تقبل الدالة k قيمة حدية محلية صغرى

الدالة k متناقصة على المجال $]-1;\alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و $k(\alpha)=\ln(\alpha+1)$

أي k قيمة حدية محلية صغرى هي $\ln(\alpha+1)$ عند α

ومنه احداثيي النقطة B هي $(\alpha;\ln(\alpha+1))$.

جـ-تبيّان أن : $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

نضع: $M=B$ في العلاقة $AM=\sqrt{(x+1)^2+(2-\ln(x+1)^2}$

نجد: $AB=\sqrt{(\alpha+1)^2+(2-\ln(\alpha+1)^2}=\sqrt{(\alpha+1)^2[1+(\alpha+1)^2]}=(\alpha+1)\sqrt{1+(\alpha+1)^2}$

التمرين33:دورة 2013 م2

1-دراسة تغيرات الدالة g.

لدينا: g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x-1)e^x$

النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ غاية شهيرة و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$.

دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $f'(x)=[(x-1)e^x]'=1.e^x+(x-1).e^x=xe^x$ وشارته هي حسب اشارة x

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	0	↘	-1	↗	$+\infty$

2- بيّن أنه ، من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $1+(x-1)e^x\geq 0$

من جدول التغيرات لدينا: $g(x)\geq -1$ لأن 1- قيمة حدّية صغرى للدالة g

ومنه: $g(x)+1\geq 0$ عليه $1+(x-1)e^x\geq 0$.

II-1) أ-تبيّان أن f مستمرة على $[0;+\infty[$.

لدينا: f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-1}{x};x\succ 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

نعلم أن f مستمرة على $]0;+\infty[$ معناه أن f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ ومستمرة عند 0

- f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ لأنها حاصل قسمة دالتين مستمرتين على هذا المجال.
- f مستمرة عند 0 معناه $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=f(0)=1$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ نهاية شهيرة.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ نهاية شهيرة و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

2-أ-التحقق أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}$

لدينا: $f'(x)=\dfrac{e^x(x)-1(e^x-1)}{x^2}=\dfrac{1+e^x(x-1)}{x^2}$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f، ثم تشكّيل جدول تغيراتها.

من الجواب I-2) لدينا: $1+(x-1)e^x\geq 0$

ومنه $f'(x)\geq 0$ وعليه تكون الدالة f متزايدة تماما وجدول تغيراتها يكون كمايلي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$

III-1-دراسة اتجاه تغير الدالة f_n على المجال $]0;+\infty[$.

f_n الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x$.

$f_n'(x)=\dfrac{1+e^x(x-1)}{x^2}+\dfrac{n}{x}$ لأن $(n\ln x)'=n\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$f'(x)\geq 0$ وعليه تكون الدالة f متزايدة تماما لأن: $\dfrac{n}{x}\succ 0$ و $\dfrac{1+e^x(x-1)}{x^2}\geq 0$.

2-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f_n(x)$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f_n(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} n\ln x=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x=+$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} n\ln x=+\infty$.

3- دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

لدراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) ندرس إشارة الفرق: $f_{n+1}(x)-f_n(x)$.

لدينا: $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{e^x-1}{x}+(n+1)\ln x-\frac{e^x-1}{x}-n\ln x=\ln x$

إشارة الفرق هي حسب إشارة $\ln x$ والجدول التالي يوضح إشارة $\ln x$ والوضع النسبي:

x	0		1		$+\infty$
إشارة الفرق		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(C_n)تحت(C_{n+1})			(C_n)فوق(C_{n+1})	
			(C_n)يقطع(C_{n+1})		

4-تبيّان أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين احداثيها.

النقطة B نقطة تقاطع جميع المنحنيات تكون مستقلة عن العدد الطبيعي n

من خلال الجواب 3 نستنتج أن $B(1;e-1)$ هي نقطة تقاطع (C_{n+1})و (C_n).

5-أ- تبيّان أنه ، يوجد عدد حقيقي وحيد من $]0,3;0,4[$ α_1 بحيث: $f_1(\alpha_1)=0$.

لتبيين وجود عدد حقيقي وحيد $\alpha_1\in]0,3;0,4[$ بحيث: $f_1(\alpha_1)=0$ نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة

لدينا: الدالة f_1 (هي الدالة f) مستمرة ومتزايدة تماما (انظر جدول تغيرات f)

ولدينا: $f_1(0,3)=-0,03$ و $f_1(0,4)=0,31$ أي $f_1(0,4)\times f_1(0,3)\prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_1\in]0,3;0,4[$ يحقق $f(\alpha_1)=0$.

ب-تبيّان أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1)\leq 0$

لتبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1)\leq 0$

من الجواب 3 لدينا: $f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$ من أجل كل $x\in]0;1[$

إذن $f_n(x)\leq f_1(x)$ **من أجل كل عدد طبيعي n حيث** $n\geq 1$.

ملاحظة: يمكن استعمل طريقة البرهان بالتراجع

البرهان أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]\alpha_1;1[$ بحيث: $f_n(\alpha_n)=0$.

لتبيين وجود عدد حقيقي وحيد $\alpha_n\in]\alpha_1;1[$ بحيث: $f_n(\alpha_n)=0$ نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة

لدينا: الدالة f_n مستمرة ومتزايدة تماما (أنظر الجواب III-1)

ولدينا: $f_n(\alpha_1)\prec 0$ و $f_n(1)=e-1\succ 0$ أي $f_n(\alpha_1)\times f_n(1)\prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n\in]\alpha_1;1[$ يحقق $f_n(\alpha_n)=0$.

6-أ- **تبيّان أنه ، من أجل كل x من** $]0;1[$: $\frac{e^x-1}{x}\leq e-1$.

المتراجحة $\frac{e^x-1}{x}\leq e-1$ تكافئ $f_1(x)\leq f_1(1)$ محققة لأن الدالة f متزايدة تماما على $]0;1[$.

التمرين34:دورة 2012

1-تعيّن العددين الحقيقيين a و b

التمثيل البياني للدالة g يقبل في النقطة $A(1;-1)$ مماسا معامل توجيهه 4 معناه $\begin{cases} g'(1)=4 \\ g(1)=-1 \end{cases}$

لدينا: $g(1)=1^2+a+b\ln(1)=1+a=-1$ ومنه $a=-2$.

لدينا: $g'(x)=2x+\frac{b}{x}$ ومنه $g'(1)=2+\frac{b}{1}=4$ ومنه $b=2$

أ) دراسة تغيرات الدالة g ، ثم تشكّيل جدول تغيراتها.

لدينا: $g(x)=x^2-2+2\ln(x)$ والمعرفة على $]0;+\infty[$

النهايات

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-2+\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-2-\infty=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ نهاية شهيرة.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2)+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty+\infty=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ نهاية شهيرة

اتجاه التغير

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث: $g'(x)=2x+\frac{2}{x}$

نلاحظ أن: $g'(x)\succ 0$ من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ وعليه الدالة g متزايدة تماما.

جدول تغيرات g

x	0	$+\infty$
g'(x)	+	
g(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

ب)تبيّان أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ g ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ومنه وحسب مبرهنة القيم التوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha\in]0;+\infty[$ بحيث: $g(\alpha)=0$

استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

لدينا: $g(]0;\alpha[)=]-\infty;0[$ معناه $g(x)\prec 0$ من أجل $x\in]0;\alpha[$.

$g(]\alpha;+\infty[)=]0;+\infty[$ معناه $g(x)\succ 0$ من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$.

II- 1- أ) حساب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-2-\frac{2\ln(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x-2-\frac{2\ln(x)}{x}=-2-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\ln(x)}{x}=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-2-\frac{2\ln(x)}{x}=+\infty$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ نهاية شهيرة.

ب) حساب $f'(x)$، ثم تحقق أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=1-2\frac{\left(\frac{1}{x}.x-1.\ln x\right)}{x^2}=\frac{x^2-2(1-\ln x)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

جـ)استنتاج إشارة $f'(x)$، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f

من العبارة $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$وعليه جدول التغيرات للدالة f يكون كمايلي:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

2-أ)بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x-2$مقارب لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f)بالنسبة لـ (Δ)

*المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x-2$مقارب لـ (C_f) معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=0$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2\ln(x)}{x}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ نهاية شهيرة.

*لدراسة وضعية (C_f)بالنسبة لـ (Δ) ندرس إشارة الفرق: $[f(x)-(x-2)]=-2\frac{\ln x}{x}$

نلخص إشارة الفرق والوضعية في الجدول التالي:

:

x	0	1	$+\infty$
اشارة الفرق	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

ب)تبيّان أن (C_f)يقبل مماسا (T)يوازي (Δ)ثم ايجاد معادلة له و كتابة معادلة للمماس (T)

(C_f)يقبل مماسا (T)يوازي (Δ) معناه معامل توجيه (T) يساوي 1 أي $f'(x_0)=1$

$f'(x_0)=1$ معناه $\frac{g(x_0)}{{x_0}^2}=1$ أي $g(x_0)=x_0^2$ أي $-2+2\ln(x_0)=0$ ومنه: $x_0=e$

(T) له معادلة من الشكل : $y = f'(e)(x-e)+f(e)$ ومنه $y = x-2-\frac{2}{e}$

ج) تبيّان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حليّن x_1 و x_2

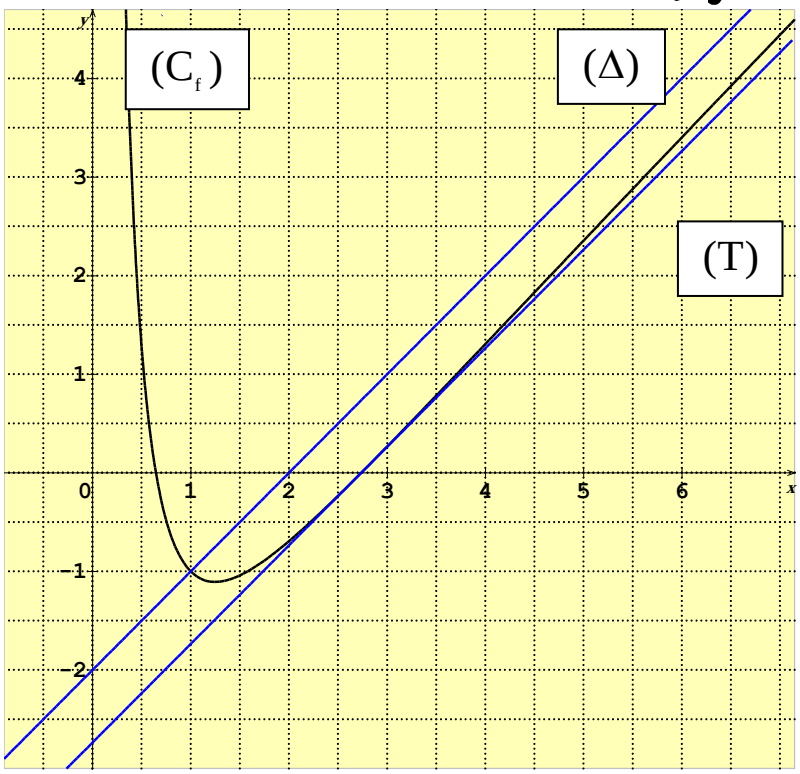
الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha[$ و $f(0,6)\times f(0,7)\prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α محصور بين $0,6$ و $0,7$ يحقق: $f(x_1)=0$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\alpha;+\infty[$ و $f(2,7)\times f(2,8)\prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد β محصور بين $2,8$ و $2,7$ يحقق: $f(x_2)=0$

*رسم كلا من (Δ) و (T) و (C_f).



3-المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة : $(m+2)x+2\ln(x)=0\ldots(1)$

(1) تكافئ $m=-2-\frac{2\ln(x)}{x}$ وتكافئ $x+m=f(x)$ وتكافئ الجملة: $\begin{cases} y=x+m \\ y=f(x) \end{cases}$

حلول الجملة السابقة هي فواصل نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$ والمنحنى (C_f)

من البيان نميز الحالات التالية:

1) $m\prec -2-\frac{2}{e}$ المعادلة (1) لا تقبل حلول ، 2) $m=-2-\frac{2}{e}$ المعادلة (1) تقبل حلا مضاعفا

3) $-2-\frac{2}{e}\prec m\prec -2$ المعادلة (1) تقبل حليّن ،4) $m\geq -2$ المعادلة (1) لا تقبل حلا واحدا

التمرين35:دورة 2011

1)تعيّين العددين a و b

المماس في النقطة $A(\frac{1}{2};1)$ لـ (C_f) موازيا لحامل محور الفواصل معناه $\begin{cases} f'(\frac{1}{2})=0 \\ f(\frac{1}{2})=-1 \end{cases}$

لدينا: $f(x)=\frac{a+b\ln(2x)}{4x^2}$ ومنه $f'(x)=\frac{\frac{b}{x}.4x^2-8x(a+b\ln(2x)}{(4x^2)^2}=\frac{b-2(a+b\ln(2x)}{4x^3}$

$f(\frac{1}{2})=-1$ معناه $f(\frac{1}{2})=\frac{a}{1}=1$ ومنه $a=1$

$f'(\frac{1}{2})=0$ معناه $b-2a=0$ ومنه : $b=2a$ أي $b=2$.

2-أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}g(x)$ وتفسير النتيجتين بيانيا

g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{1+2\ln(2x)}{4x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(2x)}{(2x)^2}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x)}{(2x)^2}=0$ نهاية شهيرة

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1+2\ln(2x)}{(2x)^2}=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}1+2\ln(2x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}4x^2=0^+$.

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g ،ثم تشكيل جدول تغيراتها.

حساب $g'(x)$ ودراسة إشارته

$g'(x)=\frac{\frac{2}{x}.4x^2-8x(1+2\ln(2x))}{(4x^2)^2}=\frac{8x(1-1-2\ln(2x))}{16x^4}=-\frac{-\ln(2x)}{x^3}$

إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(-\ln(2x))$

$g'(x)=0$ معناه $x=\frac{1}{2}$ ، $g'(x)<0$ معناه $x>\frac{1}{2}$ و $g'(x)>0$ معناه $x<\frac{1}{2}$

جدول تغيرات الدالة g يكون كمايلي:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	$f(\frac{1}{2})$	↘	0

ج) حل في $]0;+\infty[$ المعادلة : $g(x)=0$.

$g(x)=0$ معناه $(1+2\ln(2x))=0$

معناه $\ln(2x)=-\frac{1}{2}$ ومعناه $x=\frac{1}{2\sqrt{e}}$

من الجواب السابق نستنتج أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x=\frac{1}{2\sqrt{e}}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln(x^2)\right)-1=+\infty$$

التمرين36:دورة 2010

أ) احساب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

لدينا: g دالة معرفة على $]1;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=2x+\ln x$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}2x+\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ نهاية شهيرة.

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g .

لدينا: $g'(x)=2+\frac{1}{x}$ ، نلاحظ أن $g'(x)\succ 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما **على المجال** $]1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g يكون كمايلي:

x	1		$+\infty$
g'(x)		+	
g(x)	2	↗	$+\infty$

ج) تبيّان أنه من أجل كل $x \in [1;+\infty[$: $g(x) \neq 0$.

من جدول تغيرات g لدينا صورة المجال $[1;+\infty[$ بالدالة g هو المجال $[2;+\infty[$ أي $g(x) \geq 2$

ومنه من أجل كل $x \in [1;+\infty[$: $g(x) \neq 0$.

2-أ) تبيّان أن: $f(x) = \dfrac{\dfrac{6\ln x}{x}}{2+\dfrac{\ln x}{x}}$.

لدينا: $f(x) = \dfrac{\dfrac{6\ln x}{x}}{2+\dfrac{\ln x}{x}} = \dfrac{\dfrac{6\ln x}{x}}{\dfrac{2x+\ln x}{x}} = \dfrac{6\ln x}{x}.\dfrac{x}{2x+\ln x} = \dfrac{6\ln x}{2x+\ln x}$

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و الاستنتاج.**

باستعمال العبارة السابقة لـ $f(x)$ نجد: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{0}{2+0} = 0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ نهاية شهيرة

ج) دراسة اتجاه تغير الدالة f. ،وتشكيل جدول تغيرات f .

$$f'(x) = \frac{\frac{6}{x}(2x+\ln x)-(2+\frac{1}{x})(6\ln x)}{(2x+\ln x)^2} = \frac{12+\frac{6\ln x}{x}-\frac{12\ln x}{x}-\frac{6\ln x}{x}}{(2x+\ln x)^2} = \frac{12(1-\ln x)}{x(2+\ln x)^2}$$

من العبارة الأخيرة لـ $f'(x)$ نستنتج أن

اشارته هي حسب إشارة $1-\ln x$.

$f'(x) = 0$ معناه $x = e$ ، $f'(x) < 0$

معناه $x > e$ و $f'(x) > 0$ معناه $x < e$

x	1		e		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	0	↗	f(e)	↘	0

وعليه f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ وجدول تغيراتها هو كالآتي

د) تعيين قيمة k بحيث تقبل المعادلة $f(x) = k$ **حلين متمايزين**

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن: $f(e)$ ، $f(x)$ ، 0 أحاد في $x \in [1;+\infty[$

أي $0 \prec k \prec f(e)$ ومنه $k \in \left]0;\frac{6}{2e+1}\right]$ لاحظ: $f(e)=\frac{6}{2e+1}$.

هـ)ايجاد معادلة للمماس (Δ_1) لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 .

(Δ_1) له معادلة من الشكل : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=3(x-1)$ أي $y=3x-3$

3-أ) تشكل جدول تغيرات الدالة h.

لدينا: h دالة معرفة على $]-\infty;1]$ بـ: $h(x)=f(e^x)$

النهايات: $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} f(e^x)=0$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $h(1)=f(e)=\frac{6}{2e+1}$

اتجاه التغير: $h'(x)=e^x f'(e^x)=\frac{12(1-x)}{(2e^x+x)^2}$ واشارة $h'(x)$ من اشارة $(1-x)$ لأن $0 \prec 1-x$ على $]-\infty;1]$

ومنه الدالة h متناقصة تماما على $]-\infty;1]$

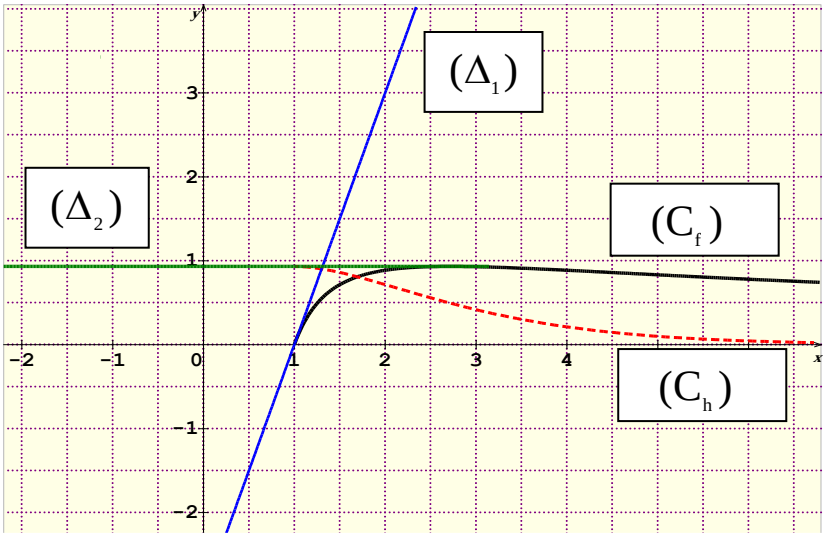
جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1
h'(x)	+	0	
h(x)	0	↘	h(1)

ب)ايجاد معادلة للمماس (Δ_2) لـ (C_h)

(Δ_2) له معادلة من الشكل : $y=h'(1)(x-1)+h(1)$ ومنه $y=0(x-1)+$ أي $y=\frac{6}{2e+1}$

ج) رسم كلا من (Δ_1)، (Δ_2)، (C_f) و (C_h) في المعلم السابق.



الجزء الأول: تمارين البكالوريات

شعبة العلوم التجريبية

التمرين 11: دورة 2019

1-أ) حساب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2^{<}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^{>}} f(x)$ **وتفسير النتائج بيانيا**

لدينا: الدالة f المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$

$$\lim_{x\to 0^{>}} f(x)=\lim_{x\to 0^{>}}\frac{1}{x-2}+\lim_{x\to 0^{>}}\ln x=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0^{>}}\ln x=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^{>}} f(x)=\lim_{x\to 2^{>}}\frac{1}{x-2}+\lim_{x\to 0^{>}}\ln x=\lim_{x\to 0^{>}}\frac{1}{x-2}+2=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^{<}} f(x)=\lim_{x\to 2^{<}}\frac{1}{x-2}+\lim_{x\to 0^{<}}\ln x=\lim_{x\to 0^{<}}\frac{1}{x-2}+2=-\infty$$

** $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)=-\infty$ معناه المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور الفواصل) مقارب لـ (C_f)

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\pm\infty$ معناه المستقيم ذو المعادلة $x=2$ مقارب لـ (C_f)

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$

2) دراسة اتجاه تغير f على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ **وتشكيل جدول تغيراتها**

من اجل كل $]0;2[\cup]2;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-x+(x-2)^2}{x(x-2)^2}=\dfrac{x^2-5x+4}{x(x-2)^2}$

اشارة $f'(x)$ من اشارة x^2-5x+4 لأن المقام موجب تماما

$x^2-5x+4=0$ معناه $x=1$ أو $x=4$ و إشارة x^2-5x+4 هي كما يلي

$x^2-5x+4>0$ معناه $]0;1[\cup]4;+\infty[$ و $x^2-5x+4<0$ معناه $]1;2[\cup]2;4[$

وعليه f متزايدة على $]0;1[\cup]4;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]1;2[\cup]2;4[$

وجدول تغيرات الدالة f يكون كما يلي:

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$-\frac{1}{2}+2\ln 2$	↗	$+\infty$

larbibelabidi@gmail.com

3-أ) حساب وتفسير النتيجة بيانيا

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{x-2}=0$$

$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=0$ معناه المنحنى (Γ) الممثل للدالة "ln" مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ)

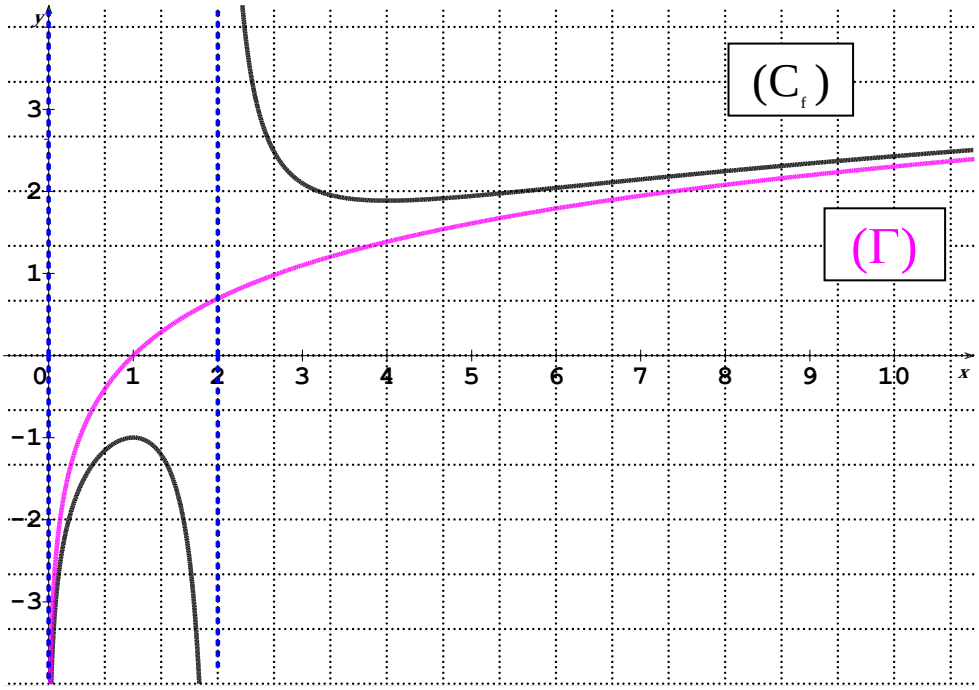
لدراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة لـ (Γ) ندرس اشارة الفرق $\left(f(x)-\ln x\right)$

لدينا: $\left(f(x)-\ln x\right)=\frac{1}{x-2}$ وعليه اشارة الفرق هي حسب اسارة $(x-2)$

ومنه : من أجل كل $]0;2[$ يكون $(x-2)<0$ ومعناه (C_f) تحت (Γ)

من أجل كل $]0;2[\ ]2;+\infty[$ يكون $(x-2)>0$ ومعناه (C_f) فوق (Γ)

4) رسم كلا من المنحنيين (Γ) و (C_f).



6) تحديد اتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها

لدينا: g دالة معرفة على المجال $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ: $g(x)=f(-2x)$

الدالة g هي تركيب الدالة $x\to(-2x)$ تألفية متبوعة بالدالة f

وعليه: من اجل كل x من $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$: $g'(x)=-2f'(-2x)$

$g'(x)=0$ معناه $f'(-2x)=0$ ومعناه $-2x=1$ أو $-2x=4$ أي: $x=-\frac{1}{2}$ و $x=-2$

$g'(x)<0$ معناه $f'(-2x)>0$ ومعناه $x\in]-2;-1[\cup]-1;-\frac{1}{2}[$ أي g متناقصة على هذا المجال

$g'(x)>0$ معناه $f'(-2x)<0$ ومعناه $x\in]-\infty;-2[\cup]-\frac{1}{2};0[$ أي g متزايدة على هذا المجال

التمرين12: دورة 2018

I-حساب g(1)ثم استنتاج حسب x إشارة g(x).

والدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$

لدينا: $g(1)=0$ ومعناه (C_g) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 1

(C_g) فوق حامل محور الفواصل من أجل كل $]0;1[$ ومعناه $g(x)>0$ من أجل كل $x\in]0;1[$

(C_g) تحت حامل محور الفواصل من أجل كل $]1;+\infty[$ ومعناه $g(x)<0$ من أجل كل $x\in]1;+\infty[$

II- 1- احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ وبيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$، ثم فسر النتيجتين بيانيا.

f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x\ln x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ لأن $f(x)=\frac{\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

التفسير الهندسي

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ معناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (حامل محور الفواصل)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ معناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ (حامل محور التراتيب)

2-أ)تبيّان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$

$$f'(x)=\frac{(\frac{1}{x}(1+x\ln x)-(\ln x+1)(1+\ln x))}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-(\ln x)^2-2\ln x-1}{(1+x\ln x)^2}=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$$

ب)استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ نفس اشارة $g(x)$ وعليه الدالة f متزايدة على المجال $]0;1[$ ومتناقصة على المجال $]1;+\infty[$ وجدول تغيرات الدالة f هو كمايلي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↗	1	↘	0

3)تبيان أن: $y=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ(T) مماس لـ (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور الفواصل

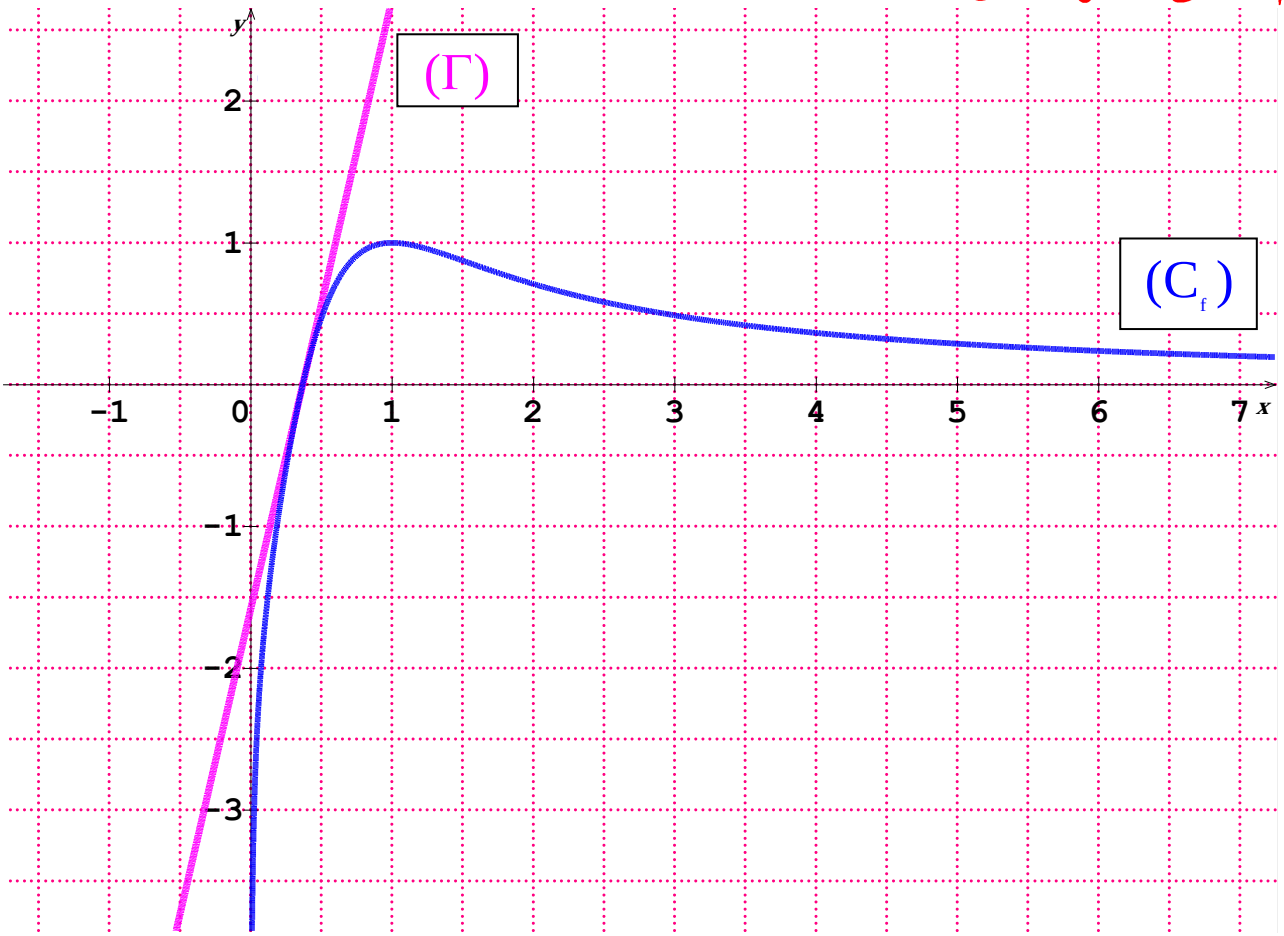
(C_f) يقطع محور الفواصل معناه $f(x)=0$ ومعناه $1+\ln x=0$ أي $x_0=\frac{1}{e}$

ومنه معادلة المماس(T) عند النقطة x_0 هي: $y=f'(\frac{1}{e})(x-\frac{1}{e})+f(\frac{1}{e})$

$$f'(\frac{1}{e})=\frac{g(e^{-1})}{(1+e^{-1}\ln e^{-1})^2}=\frac{e-1}{(1-e^{-1})^2}=\frac{e^2}{e-1} \quad \text{و} \quad f(\frac{1}{e})=0$$

وعليه: $y=\frac{e^2}{e-1}(x-\frac{1}{e})=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}$

رسم المماس (T) والمنحنى (C_f)



4)تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-em$ حلّين متمايزين.

المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-em$ تكافئ $f(x)=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$

من اجل m=1 نجد: $f(x)=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}$ ومعناه $f(x)=y$ حيث $y=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}$ معادلة المماس (T)

وعليه المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-em$ تقبل حلين متمايزين معناه $m>1$

التمرين13: دورة 2017

1)تبيان ان الدالة f فردية وتفسير ذلك بيانيا

لدينا:f دالة معرفة على $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ حيث: $f(x)=\frac{2}{3}(x)+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

تذكير: f دالة فردية معناه من اجل كل $x\in D_f$ $f(-x)+f(x)=0$

لدينا من من اجل كل $x\in D_f$: $f(-x)+f(x)=\frac{2}{3}(-x)+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)+\frac{2}{3}(x)+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\ln\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right)=\ln 1=0$$

التفسير البياني: المنحنى البياني للدالة f يقبل مبدأ الإحداثيات O كمركز تناظر

2)حساب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to-1^{<}}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to1^{>}}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to-1^{<}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0^{+}$ لأن $\lim\limits_{x\to-1^{<}}f(x)=-\frac{2}{3}+\lim\limits_{x\to-1^{<}}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^{>}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to1^{>}}f(x)=\frac{2}{3}+\lim\limits_{x\to1^{>}}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\ln 1=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{3}x=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\ln 1=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{3}x=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

استنتاج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقارب موازيين لحامل محور التراتيب .

من النهايتين السابقتين: $\lim\limits_{x\to-1^{<}}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to1^{>}}f(x)$ نستنتج أن يقبل:

*المنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x=-1$

* المنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x=1$

3-أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D: $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D: $f(x)=\frac{2}{3}(x)+\ln(x-1)-\ln(x+1)$

ومنه: $f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{3}+\frac{3.2}{3(x^2-1)}=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ موجبة تماما لأن :

إشارة x^2-1 موجبة على المجال D و كذلك x^2+2 موجبة من أجل كل عدد حقيقي
وعليه الدالة f متزايدة تماما على مجالي تعريفها وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	‖	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

4)تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8 \prec \alpha \prec 1,9$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]1;+\infty[$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} +1} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

لدينا: $f(1,8) = -0.05 \prec 0$ و $f(1,9) = 0.08 \succ 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة
توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha) = 0$ حيث $1,8 \prec \alpha \prec 1,9$.

3) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = \frac{2}{3}x$ مقارب مائلا للمنحنى (C_f).

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = \frac{2}{3}x$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه: $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - y] = 0$

لدينا: $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$.

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

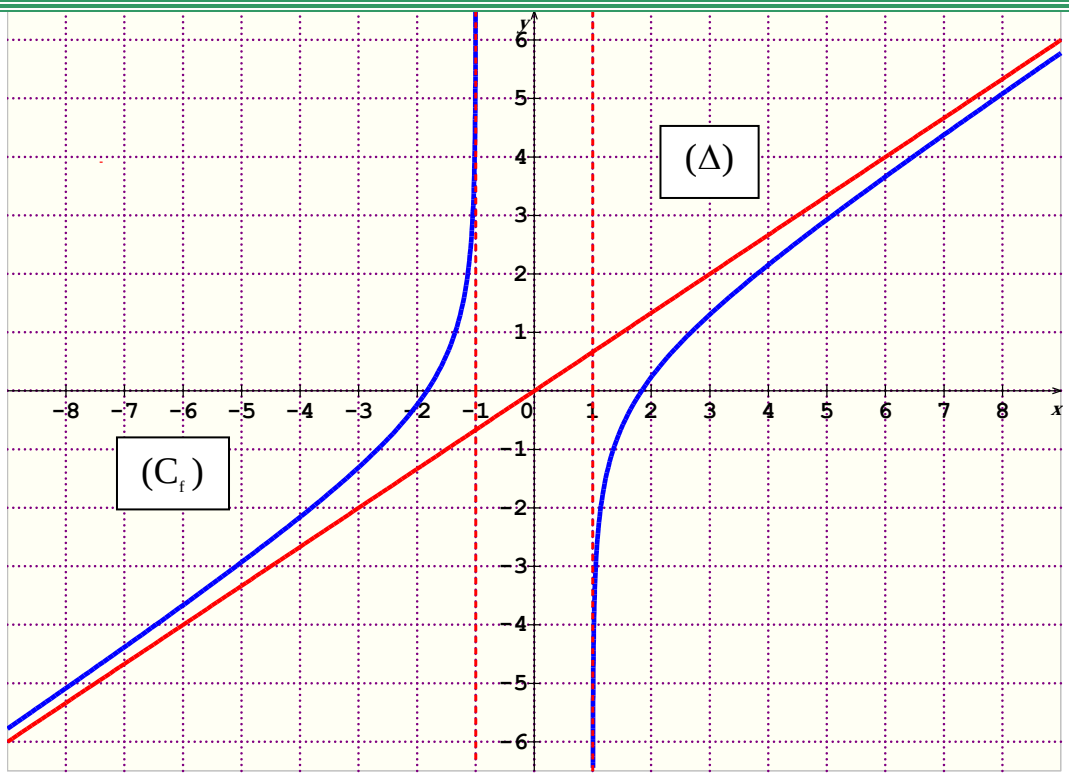
لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

لدينا: $f(x) - y \prec 0$ من أجل كل $]-\infty;-1[$ $x \in$ لأن $\frac{x-1}{x+1} \prec 1$

$f(x) - y \succ 0$: من أجل كل $]1;+\infty[$ $x \in$ لأن $\frac{x-1}{x+1} \succ 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)-y$	−	‖	‖	+
الوضع	(C_f) تحت (Δ)	‖	‖	(C_f) فوق (Δ)

6) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)



7)المناقشة البيانية لعدد حلول المعالة : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

نضع: $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0....(*)$

المعادلة (*) تكافئ $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ وتكافئ $\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=|m|x$

أي $|m|x=f(x)$ وتكافئ بيانيا الجملة التالية : $\begin{cases}y=|m|x\\y=f(x)\end{cases}$ وعليه حلول المعادلة (*)هي فواصل نقط تقاطع(C) والمستقيم (Δ_m) ذا المعادلة $y=|m|x$ (مستقيم دوار يشمل المبدأ ومن البيان نميز الحالات التالية:

1) $-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$ المعادلة تقبل حلّين . 2) $m\geq\frac{2}{3}$ أو $m\leq-\frac{2}{3}$ المعادلة لاتقبل حلول.

التمرين14:دورة 2017 الاستدراكية

I- 1) حساب النهايتن التاليتين : $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^{>}}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم تفسير النتيجة بيانيا.

لدينا: الدالة العددية f معرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كمايلي: $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^{>}}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^{>}}1+2\ln(2x+1)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^{>}}(2x+1)^2=0^+$

علماأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}=0$ نهاية شهيرة

$x=-\dfrac{1}{2}$ معناه $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-\frac{1}{2}} f(x)=+\infty$ يقبل مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته (C_f)

$y=0$. معناه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ يقبل مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل معادلته (C_f)

2-أ)تبيان أنه من أجل كل x من $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$: $f'(x)=\dfrac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$.

لدينا:

$$f'(x)=\frac{2\dfrac{2}{(2x+1)}(2x+1)^2-4(2x+1)(1+2\ln(2x+1)}{\left[(2x+1)^2\right]^2}$$

$$=\frac{4\left[1-(1+2\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^3}=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

ب-دراسة إتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x)=\dfrac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة $-\ln(2x+1)$

لدينا: $-\ln(2x+1)=0$ معناه $x=0$ وعليه اشارة $f'(x)$ تكون حسب الجدول التالي:

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	1	↘	0

3) حل في المجال $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ **المعادلة** $f(x)=0$ **ثم استنتاج اشارة** $f(x)$.

$f(x)=0$ معناه $1+2\ln(2x+1)=0$ ومعناه $x=\dfrac{1}{2}(-1+\dfrac{1}{\sqrt{e}})$

$f(x)\prec 0$ معناه $1+2\ln(2x+1)\prec 0$ ومعناه $x\in\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}(-1+\dfrac{1}{\sqrt{e}})\right[$

$f(x)\succ 0$ معناه $1+2\ln(2x+1)\succ 0$ ومعناه $x\in\left]\frac{1}{2}(-1+\frac{1}{\sqrt{e}});+\infty\right[$

ملاحظة:لتعيين اشارة $f(x)$ يمكن استعمال جدول تغيرات الدالة f.

4)تبيّان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω و تعيين إحداثياها

(C_f)يقبل نقطة إنعطاف$\omega(x_0;y_0)$معناه المشتقة الثانية"f"تنعدم عندx_0مغيرةاشارتها عندها

لدينا: $f"(x)=\frac{\frac{(-8)2}{2x+1}(2x+1)^3-6(2x+1)^2(-8\ln(2x+1))}{(2x+1)^6}=\frac{16[-1+3\ln(2x+1)]}{(2x+1)^4}$

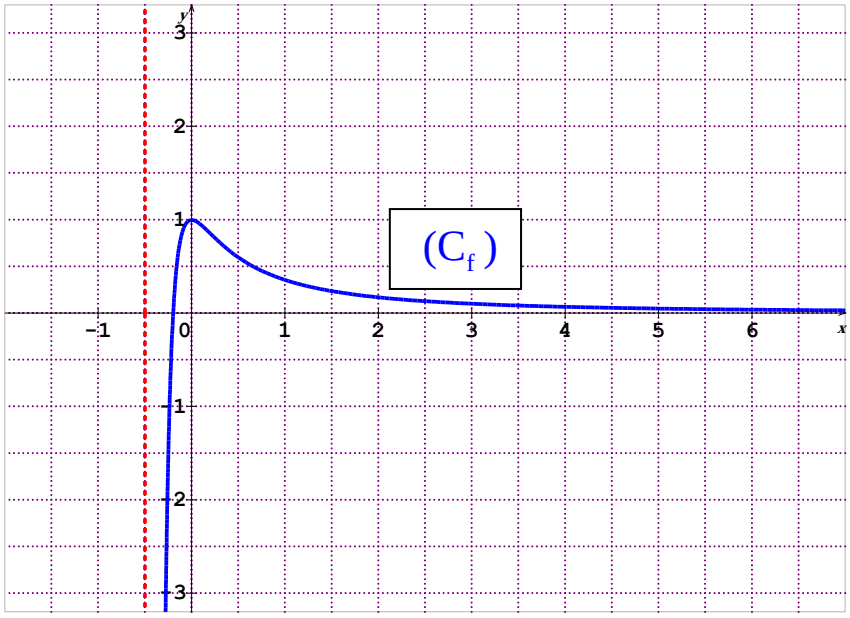
اشارة $f"(x)$ هي نفس إشارة $(-1+3\ln(2x+1))$ والموضحة كما يلي:

$(-1+3\ln(2x+1))=0$ معناه $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt[3]{e})$ نلخص اشارة $f"(x)$ كالتالي

$x\in\left]\frac{1}{2}(-1+\sqrt[3]{e});+\infty\right[$ معناه $f"(x)\succ 0$ ، $x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}(-1+\sqrt[3]{e})\right[$ معناه $f"(x)\prec 0$

نستنتج مما سبق أن النقطة $\omega(x_0;y_0)$ حيث $y_0=f(x_0)=\frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}$ نقطة انعطاف لـ(C_f).

إنشاء المنحنى (C_f)



II-1- أ) دراسة إتجاه تغير الدالة g.

الدالة العددية g ومعرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كمايلي: $g(x)=2[-x+\ln(2x+1)]$

دراسة إتجاه تغير الدالة g معناه حساب عبارة الدالة المشتقة $g'(x)$ و تعيين اشارتها

لدينا: $g'(x)=2\left[-1+\frac{2}{2x+1}\right]=2\left(\frac{-2x+1}{2x+1}\right)$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+1$ لماذا ؟

$g'(x)=0$ معناه $x=\frac{1}{2}$ و $g'(x)\succ 0$ معناه $x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ و $g'(x)\prec 0$ معناه $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

ب) تبيّان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين احدهما معدوم والأخر α حيث $1,2\prec\alpha\prec 1,3$.

*الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ ولدينا: $g(1,2)=0,047$ و $g(1,3)=-0,03$

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$ حيث $1,2\prec\alpha\prec 1,3$

* المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل معدوم لان $g(0)=0$

استنتاج إشارة $g(x)$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in\left]-\frac{1}{2};0\right[\cup]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)\prec 0$

ومن أجل كل $x\in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)\succ 0$

التمرين15:دورة 2016

I-1)دراسة اتجاه تغير الدالة g

لدينا:الدالة g معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-\ln x$

حساب $g'(x)$ و ودراسة اشارته استنتاج اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$

لدينا: $g'(x)=0$ معناه $2x^2-1=0$ ومعناه $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ مرفوض

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
اشارة $g'(x)$	$-$	0	$+$
اتجاه تغير g	متزايدة تماما		متناقصة تماما

2)حساب $g(\frac{\sqrt{2}}{2})$ وتبيان أن $g(x)\succ 0$ من اجل كل عدد $x\in]0;+\infty[$

لدينا: $g(\frac{\sqrt{2}}{2})=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$

من خلال اتجاه تغير g والقيمة الحدية المحلية الصغرى $g(\frac{\sqrt{2}}{2})\succ 0$

نستنتج أن $g(x)\succ 0$ من اجل كل عدد $x\in]0;+\infty[$

II-1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}f(x)$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$

ومنه: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}.\ln x=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ نهاية شهيرة

2-أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

لدينا: $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'+1=\frac{\frac{1}{x}.x-1\ln x}{x^2}+1=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

ب)تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

من العبارة $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها

وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3) كتابة معادلة المماس (T)

(T) **له معادلة من الشكل** : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ومنه: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه : $y=2x-2$.

4-أ) تبيان أن (C) **يقبل مستقيم مقارب مائلا** (Δ) **حيث:** $y=x-1$ **معادلة له**

المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C) معناه: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ نهاية شهيرة

ب)دراسة الوضع النسبي لـ(C)**و** (Δ)

لدراسة الوضع النسبي لـ(C)و (Δ)ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=\frac{\ln x}{x}$

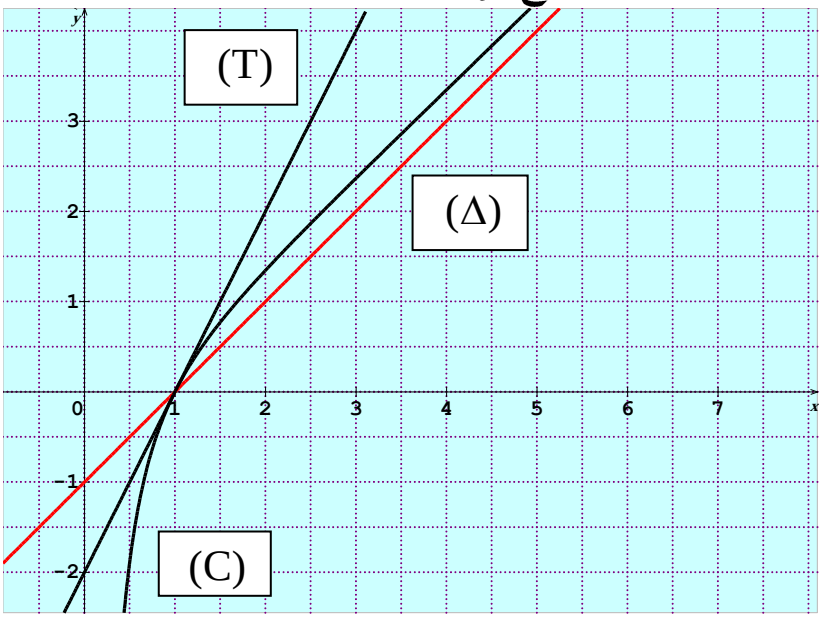
اشارة الفرق هي حسب اشارة $\ln x$ وهي حسب الجدول التالي

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع	(C) تحت (Δ)	(C) يقطع (Δ)	(C) فوق (Δ)

5) رسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحنى (C)

(T) يشمل النقطة $A(1;0)$ $\vec{u}(1;2)$ شعاع توجيه له

(Δ) يشمل النقطة $A(1;0)$ $\vec{v}(1;1)$ شعاع توجيه له



6-أ)اثبات ان النقطة $A(1;0)$ تنتمي للمستقيم (Δ_m)

النقطة $A(1;0) \in (\Delta_m)$ لأن الثنائية $(1;0)$ تحقق صحة المعادلة $y = mx - m$.

من العبارة $y = mx - m$ أي $y = m(x-1)$ نستنتج ام جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة وحيدة هي النقطة $A(1;0)$.

ب)المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$

لدينا: $f(x) = mx - m$ تكافئ الجملى التالية : $\begin{cases} y = f(x) \\ y = mx - m \end{cases}$ وعليه حلول المعادلة $f(x) = mx - m$ هي فواصل نقط تقاطع (C) والمستقيم (Δ_m) (مستقيم دوار يشمل النقطة $A(1;0)$) ومن البيان نميز الحالات التالية:

1) $m \leq 1$ المعادلة تقبل حلا وحيد ، 2) $1 \prec m \prec 2$ المعادلة تقبل حلين .

3) $m = 2$ المعادلة تقبل حلا مضاعف، 4) $m \succ 2$ المعادلة تقبل حلا وحيد .

التمرين16:دورة 2016 الاستدراكية

I-1)دراسة تغيرات الدالة g ، ثم تشكيل جدول تغيراتها

لدينا:الدالة g معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$

حساب النهايات عند 1- وعند $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \to -1} (x+1)e = 0$ و $\lim\limits_{x \to -1} 2\ln(x+1) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

حساب $g'(x)$ و [illegible] اتجاه تغير الدالة g

$g'(x)=e+\frac{2}{x+1}$ ومنه: $g'(x)\succ 0$ لأن $x\in]-1;+\infty[$ ومنه g متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2)تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,34\prec\alpha\prec-0,33$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to-1^{+}}g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

لدينا: $g(-0,34)=-0,03$ و $g(-0,33)=0,02$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$ حيث $-0,34\prec\alpha\prec-0,33$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in]-1;\alpha[$ فإن: $g(x)\prec 0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)\succ 0$

II-1-أ) تبيان أن: $\lim\limits_{x\to-1^{+}}f(x)=-\infty$ و حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ،ثم تفسير النتيجتين هندسيا

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$\lim\limits_{x\to-1^{+}}f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-1^{+}}\frac{e(x+1)+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to-1^{+}}\frac{1}{(x+1)^2}.\ln(x+1)=+\infty(-\infty)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^{+}}f(x)=-\infty$ معناه للنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}\left[e+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}\right]=0$ لاحظ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}=0$ (ن ش)

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ معناه للنحنى (C_f) مستقيم مقارب هو حامل محور الفواصل (معادلته $y=0$)

ب)تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$

$$f'(x)=\left(\frac{e}{x+1}\right)'+\left(\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)'=-\frac{e}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{(x+1)}(x+1)^2-2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$=-\left[\frac{e(x+1)}{(x+1)^3}-\frac{1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3}\right]=-\left[\frac{-1+e(x+1)+2\ln(x+1)}{(x+1)^3}\right]=-\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

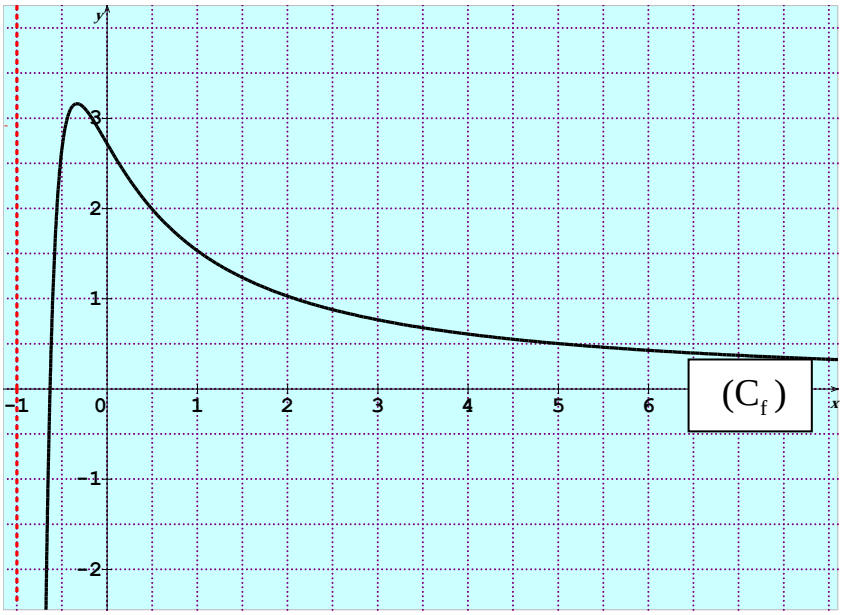
ج) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و تشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x)=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $-g(x)$

وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

د)رسم المنحنى (C_f)



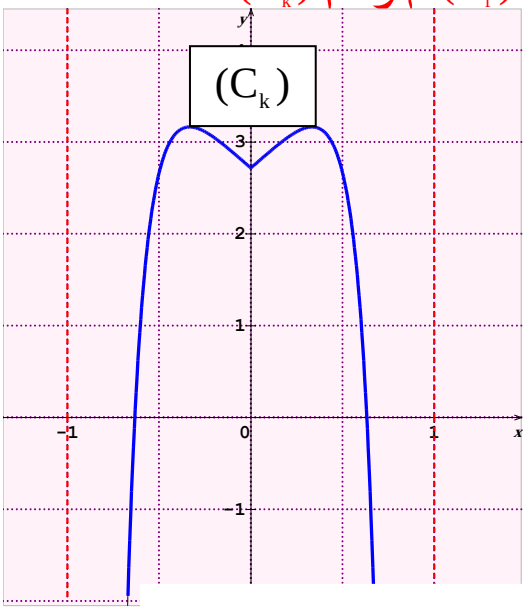
3-أ) تبيان أن الدالة k زوجية

لدينا : الدالة k معرفة على المجال $]-1;+1[$ بـ: $k(x)=f(-|x|)$

الدالة k زوجية معناه من أجل كل $x\in]-1;+1[$ و $-x\in]-1;+1[$ ، $k(-x)=k(x)$

لدينا: $k(-x)=f(-|-x|)=f(-|x|)=k(x)$ لأن $|-x|=|x|$ ومنه k زوجية

ب)تبيان كيفية استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم رسم (C_k)



عبارة $k(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة هي كمايلي:

$$k(x)=\begin{cases} f(x);-1\prec x\le 0 \\ f(-x);0\le x\prec 1 \end{cases}$$

وعليه : $x\in]-1;0]$ معناه (C_k) ينطبق على (C_f)

$x\in[0,1[$ معناه (C_k) نظير (C_f) :

بالنسبة لحامل محور التراتيب (لأن k زوجية)

ب)المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $k(x)=m$

لدينا: $k(x)=m$ تكافئ الجملى التالية : $\begin{cases} y=k(x) \\ y=m \end{cases}$

وعليه حلول المعادلة $k(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_k) والمستقيم (Δ_m) (مستقيم يوازي حامل محور الفواصل)

من البيان (C_k) نميز الحالات التالية:

1) $m \prec e$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة ، 2) $m=e$ المعادلة تقبل مضاعف معدوم .

3) $e \prec m \prec k(\alpha)$ المعادلة تقبل حلّين سالبين وحلين موجبين

4) $m=k(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين مضاعفين مختلفين في الإشارة

5) $m \succ k(\alpha)$ المعادلة لاتقبل حلول.

التمرين17:دورة 2015

I- 1) تحديد وضعية المنحنى (γ) بالنسبة للمستقيم (Δ).

من البيان نلخص وضعية المنحنى (γ) بالنسبة للمستقيم (Δ) كمايلي:

من أجل كل $x \in]0;\alpha[$ يكون (γ) تحت (Δ)

من أجل $x=\alpha$ يكون (γ) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة α.

من أجل كل $x \in]\alpha;+\infty[$ يكون (γ) فوق (Δ)

2) استنتاج اشارة $g(x)$ وذلك حسب قيم x

لدينا: $g(x)=\ln x-(-x+3)$ من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]0;\alpha[$ تكون إشارة $g(x)$ سالبة

من أجل $x=\alpha$ تكون إشارة $g(x)$ معدومة

من أجل كل $x \in]\alpha;+\infty[$ تكون إشارة $g(x)$ موجبة.

3) التحقق أن : $2,2 \prec \alpha \prec 2;3$

g مستمرة (مجموع دالتين مستمرتين) ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ لأن: $g'(x)=\frac{1}{x}+1 \succ 0$

و $g(2;2)=-0;01$ و $g(2;3)=0;13$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن: $2,2 \prec \alpha \prec 2;3$.

II-1) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} f(x)$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} f(x)=(1-\frac{1}{x})=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} f(x)=(\ln x-2)=-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty}(1-\frac{1}{x})=1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty}(\ln x-2)=+\infty$.

2) إثبات أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

$$f'(x)=(\frac{1}{x^2})(\ln x-2)+(1-\frac{1}{x})(\frac{1}{x})=\frac{(\ln x-2)+(x-1)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

من العبارة $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$.

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كالأتي.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) $f(\alpha)=\frac{-(1-\alpha)^2}{\alpha}$ **واستنتاج حصرا للعدد** $f(\alpha)$

*لدينا: $f(\alpha)=(1-\frac{1}{\alpha})(\ln\alpha-2)$ لكن $g(\alpha)=0$ ومنه $\ln\alpha=3-\alpha$

ومنه: $f(\alpha)=(1-\frac{1}{\alpha})(3-\alpha-2)=\frac{(\alpha-1)(1-\alpha)}{\alpha}=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$

$2,2\prec\alpha\prec 2;3.....(1)$ تكافئ $1,2\prec(\alpha-1)\prec 1;3$ تكافئ $(1,2)^2\prec(\alpha-1)^2\prec(1;3)^2....(2)$

من (1) و (2) نجد: $\frac{(1,2)^2}{2;3}\prec\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}\prec\frac{(1;3)^2}{2;2}$ وأخيرا: $-0;73\prec f(\alpha)\prec-0;66$

4) دراسة وضعية (C_f) **بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.**

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ندرس إشارة $f(x)$

$f(x)=0$ معناه $(1-\frac{1}{x})(\ln x-2)=0$ معناه $(\ln x-2)=0$ أو $(x-1)=0$

$(\ln x-2)=0$ تكافئ $x=e^2$ و $(x-1)=0$ تكافئ $x=1$ وعليه إشارة $f(x)$ تكون كمايلي:

x	0		1		e^2		$+\infty$
lnx-2		–		–		+	
x-1		–		+		+	
f(x)	‖	+	‖	–	‖	+	

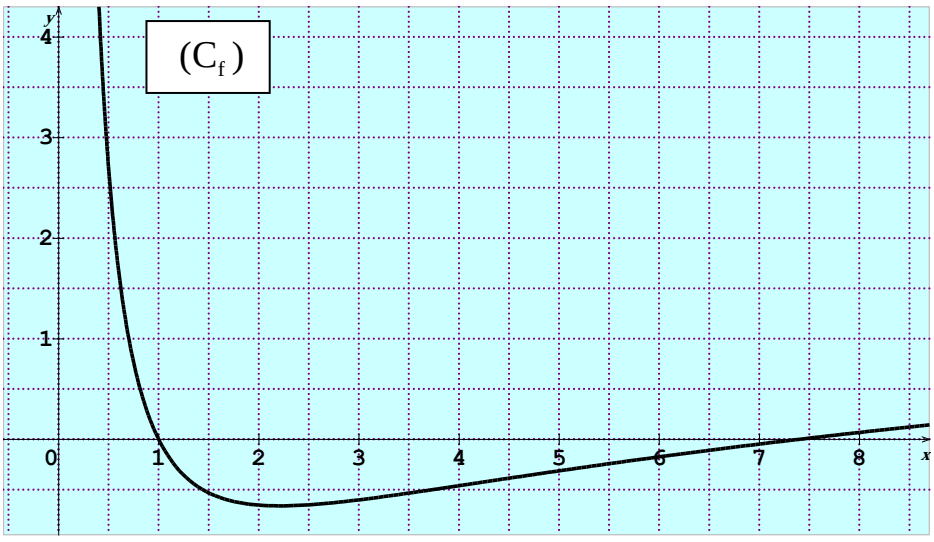
من الجدول السابق نستنتج أن:

من أجل كل $x\in]0;1[\cup]e^2;+\infty[$ يكون (C_f) فوق حامل محور الفواصل

من أجل $x=1$ أو $x=e^2$ يكون (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتهما $x=1$ أو $x=e^2$.

من أجل كل $x\in]1;e^2[$ يكون (C_f) تحت حامل محور الفواصل.

إنشاء (C_f) **في المجال** $]0;e^2]$



التمرين18:دورة جوان 2014

1-أ) حساب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **وتفسير النتيجتين هنسيا.**

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1+2\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ **لأن:** $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ **و** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1+2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=1$ **لأن:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ **نهاية شهيرة**

التفسير الهندسي

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ **معناه المنحنى** (C_f) **يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته:** $x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ **معناه المنحنى** (C_f) **يقبل مستقيم مقارب أفقيي معادلته:** $y=1$

ب)دراسة اتجاه تغير الدالة f **على المجال** $]0;+\infty[$ **وتشكيل جدول تغيراتها.**

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $f'(x)=2\dfrac{(\frac{1}{x}.x-1\ln x)}{x^2}=2\dfrac{(1-\ln x)}{x^2}$

$f'(x)=0$ معناه $1-\ln x=0$ ومنه $x=e$

$f'(x)\prec 0$ معناه $1-\ln x\prec 0$ ومنه $x\succ e$

و $f'(x)\succ 0$ معناه $1-\ln x\succ 0$ ومنه $x\prec e$

وعليه يكون جدول تغيرات الدالة f كمايلي:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$f(e)$	↘	1

2-أ) دراسة وضعية المنحنى (C_f) **بالنسبة للمستقيم** (Δ) **الذي معادلته:** $y=1$

ندرس اشارة الفرق: $f(x)-y=2\dfrac{\ln x}{x}$ حيث $y=1$

$f(x)-y=0$ معناه $\ln x=0$ ومنه $x=1$ معناه (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثي $(1;1)$

$f(x)-y\prec 0$ معناه $\ln x\prec 0$ ومنه $x\in]0;1[$ معناه (C_f) تحت (Δ) في هذا المحال

$f(x)-y\succ 0$ معناه $\ln x\succ 0$ ومنه $x\in]1;+\infty[$ معناه (C_f) فوق (Δ) في هذا المحال

ب) كتابة معادلة المماس (T) **للمنحنى** (C_f) **عند النقطة** A **ذات الفاصلة 1.**

معادلة المماس (T) هي: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه: $y=2(x-1)+1$ أي: $y=2x-1$

ج)تبيّان أن المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **حيث:** $0\prec\alpha\prec 1$

f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;e]$ و $f(e^{-0,4})\times f(e^{-0,3})\prec 0$ **لأن:** $f(e^{-0,4})=-0,2$ و $f(e^{-0,3})=0,2$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $\alpha\in\left]e^{-0,4};e^{-0,3}\right[$ يحقق: $g(\alpha)=0$

3) إنشاء (T) **و** (C) **في آخر المجال**

4-أ) تبيّان أنه من أجل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$ والاستنتاج.

من أجل عدد حقيقي $x\in\mathbb{R}^*$: $h(x)-h(-x)=1+2\dfrac{\ln|x|}{|x|}-1-2\dfrac{\ln|-x|}{|-x|}=2\dfrac{\ln|x|}{|x|}-2\dfrac{\ln|x|}{|x|}=0$

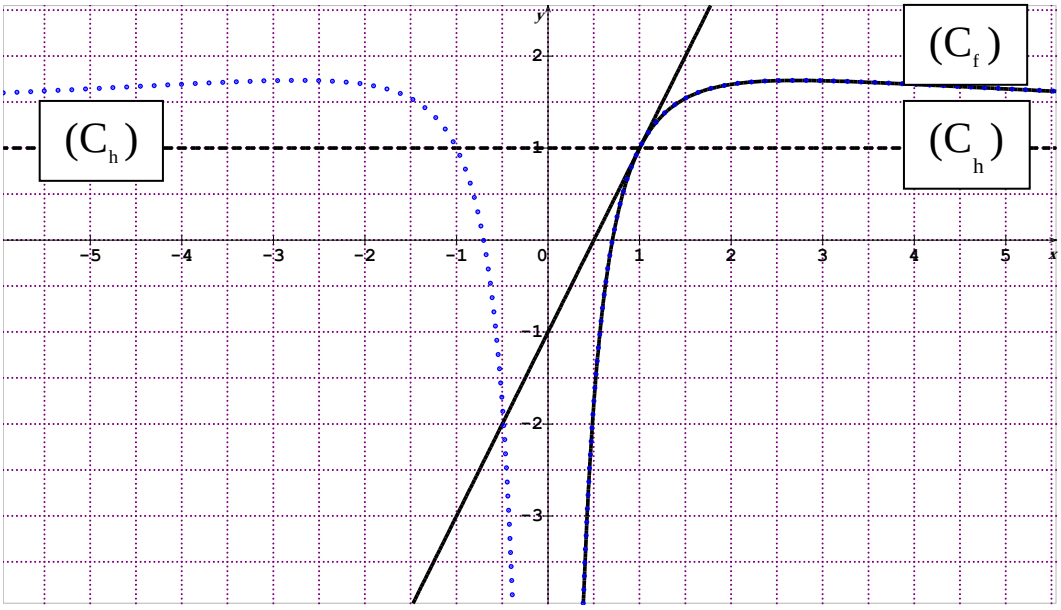
الاستنتاج من العبارة $h(x)-h(-x)=0$ أي $h(x)=h(-x)$ نستنتج أن الدالة h زوجية

ب) إنشاء المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).

لدينا: $h(x)=f(x)$ معناه $(C_h)=(C_f)$ على المجال $x\in]0;+\infty[$.

$h(x)=f(-x)$ معناه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب $x\in]-\infty;0[$.

ب) إنشاء (T) و (C_f) والمنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).



ج) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $\ln x^2=(m-1)|x|$

من أجل عدد حقيقي x غير معدوم المعادلة $\ln x^2=(m-1)|x|$ تكافئ $m=h(x)$

وتكافئ : $\begin{cases}y=m\\y=h(x)\end{cases}$ من الجملة السابقة نستنتج ان حلول المعادلة $\ln x^2=(m-1)|x|$ بيانيا

هي فواصل نقط تقاطع (C_h) والمستقيم $(\Delta_m): y=m$ معادلته من البيان لدينا:

1) $m\le 1$ معناه المعادلة تقبل حلين . 2) $1\prec m\prec h(e)$ معناه المعادلة تقبل اربعة حلول .

3) $m=h(e)$ معناه المعادلة تقبل حلين . 4) $m\succ h(e)$ معناه المعادلة لاتقبل حلول

التمرين19:دورة جوان 2013

I-1) دراسة تغيرات الدالة g ، وتشكيل جدول تغيراتها

$g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$ و $x\in]-1;+\infty[$

حساب النهايات

ح ع ت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2\ln(x+1))$.

ازالة ح ع ت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)(\frac{x^2}{(x+1)}-2\frac{\ln(x+1)}{(x+1)})=+\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}(-2\ln(x+1))=-2(-\infty)=+\infty$

اتجاه التغير

من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$: $g'(x)=2(x+1)-\frac{2}{(x+1)}=\frac{2[(x+1)^2-1]}{(x+1)}=\frac{2x(x+2)}{x+1}$

إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة x على $]-1;+\infty[$

جدول التغيرات

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

2-استنتاج أن $g(x)\succ 0$ **من أجل كل** $x\in]-1;+\infty[$

الدالة g تقبل 4 كقيمة حدّية صغرى أي $g(x)\geq 4$

إذن: $x\in]-1;+\infty[$ من أجل كل $g(x)\succ 0$

II-1-أ)حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ **وتفسير النتيجة بيانيا**

لدينا $f(x)=x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$ و $x\in]-1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-1-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$ معناه المستقيم ذي المعادلة: $x=-1$ مقارب عمودي لـ (C_f)

ب)حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-\frac{1}{x+1}+2\frac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$

2-أ) تبيّان أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=1-\frac{\frac{-2}{(x+1)}(x+1)-1(1-2\ln(x+1))}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2+3-2\ln(x+1))}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ **و تشكيل جدول تغيرات الدالة f**

إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$ أي $f'(x)\succ 0$

x	-1		0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	$+$		$+$		
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	$+\infty$

ج)تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-1} f(x)=-\infty$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $\alpha\in]-1;+\infty[$ حيث: $f(\alpha)=0$

التحقق أن : $0\prec\alpha\prec 0,5$

لدينا: $f(0)=-1$ و $f(0,5)=0,37$ أي: $f(0)\prec 0\prec f(0,5)$ ومنه $0\prec\alpha\prec 0,5$

3-أ)تبيّان أن المستقيم $(\Delta): y=x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

$(\Delta): y=x$ **مقارب لـ** (C_f) **عند** $+\infty$ معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x+1}+2\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$$

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة على (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x=-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

$f(x)-x=0$ معناه $1-2\ln(x+1)=0$ معناه $x=\sqrt{e}-1$

و $f(x)-x\prec 0$ معناه $x\in\left]-1;\sqrt{e}-1\right[$ و $f(x)-x\succ 0$ معناه $x\in\left]\sqrt{e}-1;+\infty\right[$

وعليه : (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}-1$

(C_f) تحت (Δ) في المجال $\left]-1;\sqrt{e}-1\right[$ و (C_f) فوق (Δ) في المجال $\left]\sqrt{e}-1;+\infty\right[$

4-أ) حساب x_0 فاصلة نقط التماس لـ (C_f) و (T)

لدينا: معادلة (T) هي: $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ و (T) مماسا لـ (C_f) معناه $f'(x_0)=1$

$f'(x_0)=1$ معناه $\dfrac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ معناه $g(x_0)=(x_0+1)^2$ ومنه: $x_0=e\sqrt{e}-1$

ب)رسم المستقيمين المقاربيّن والمماس (T) و (C_f) في آخر الحل

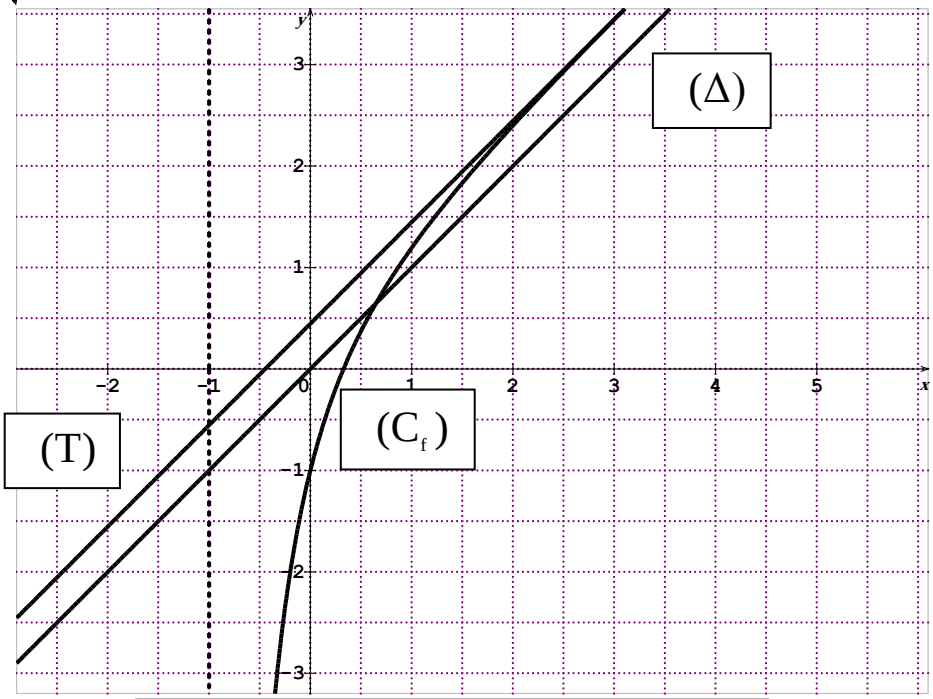
ج)تعيين قيم الوسيط الحقيقي m بيانيا حتى تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين

المعادلة $f(x)=x+m$ تكافئ $\begin{cases}y=x+m\\ y=f(x)\end{cases}$ حيث $y=x+m$ معادلة مستقيم (Δ_m) ميله 1

و $y=f(x)$ معادلة المنحنى (C_f)

الحالة 1 : $m=0$ يكون $(\Delta_m)=(\Delta)$ ، الحالة2 : $m=\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ يكون $(\Delta_m)=(T)$

وعليه نجد من البيان يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلان متمايزان معناه $0\prec m\prec\frac{2}{\sqrt{e^3}}$



التمرين20:دورة جوان 2012

1) أ)حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا

$\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0}(x+5)=5$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0} 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=-\infty$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

ب)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+5)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$

2)تبيان أنه من أجل كل $x\in]-\infty;0[$: $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$

لدينا: $f(x)=x+5+6((\ln|x|-\ln|(x-1)|)$ ومنه: $f'(x)=1+6(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1})=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=0$ معناه $x^2-x-6=0$ معناه $x=-2$ أو $x=3$ مرفوض

ومنه أشارة $f'(x)$ تكون كالآتي:

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

لدينا: $f(-2)=3-6\ln(2)+6\ln 3=0,56$

x	$-\infty$	-2	0
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	f(-2)	↘ $-\infty$

3-أ) تبيان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+5$ هو مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=6\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{x}{x-1}=0$

ومنه: (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) دراسة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

لدينا: $(f(x)-y)=6\ln\dfrac{x}{x-1}$ ولدينا من أجل كل $x\in]-\infty;0[$: $\dfrac{x}{x-1}\le 1$

ومنه $\ln\dfrac{x}{x-1}\le 0$ أي الفرق $(f(x)-y)\prec 0$ وعليه يكون (C_f) تحت (Δ)

4) تبيان ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حليّن α و β

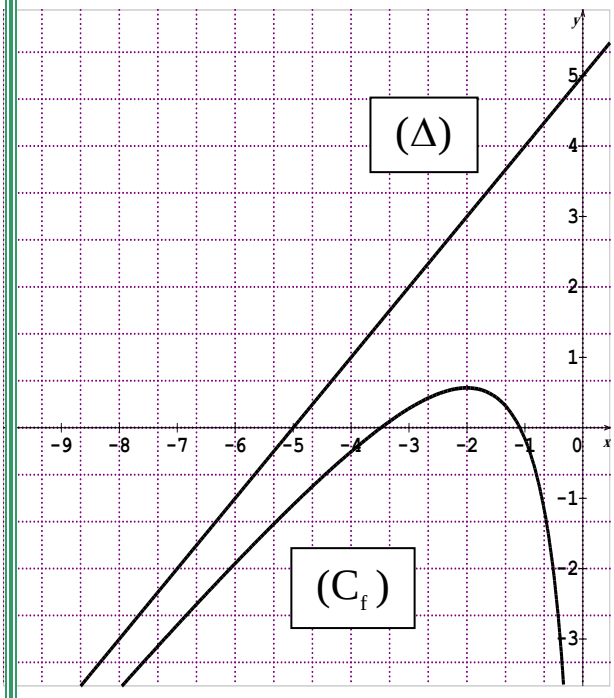
لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-2;0[$ و $f(-1,1)=0,02$ و $f(-1)=-0,15$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β يحقق $f(\beta)=0$

لدينا الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2[$ و $f(-3,5)=1,33$ و $f(-3,4)=-0,15$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقق $f(\alpha)=0$.

5) إنشاء (C_f) و (Δ).



6-أ) تبيان ان (AB) هي معادلة $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}+6\ln\dfrac{3}{4}$

لدينا $y_A=\dfrac{1}{2}x_A+\dfrac{7}{2}+6\ln\dfrac{3}{4}=3+6\ln\dfrac{3}{4}$ ،

$y_B=\dfrac{1}{2}x_B+\dfrac{7}{2}+6\ln\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{2}+6\ln\dfrac{3}{4}$

ومنه (AB) هي معادلة $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}+6\ln\dfrac{3}{4}$

ب) تبيان ان (AB) يمس (C_f) في نقطة M_0

(AB) يمس (C_f) معناه $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$ حيث x_0 فاصلة M_0

معناه $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$ معناه $\dfrac{x_0^2-x_0-6}{x_0(x_0-1)}=\dfrac{1}{2}$

معناه $2x_0^2-2x_0-12=x_0^2-x_0$ معناه $x_0^2-x_0-12=0$ ومنه: $x_0=-3$ أو $x_0=4$ مرفوض

ولدينا $f(-3)=2+6\ln\dfrac{3}{4}$ أي $M_0(-3;f(-3))$

التمرين21:دورة جوان 2011

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g'(x)	+	+	
g(x)	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 1$	

I) بقراءة بيانية

أ)تشكيل جدول التغيرات للدالة g.

ب)حل بيانيا المتراجحة $g(x) \succ 0$

من البيان $g(x) \succ 0$ تكافئ $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

جـ)تعيين بيانيا قيم x والتي من أجلها يكون $0 \prec g(x) \prec 1$

من البيان لدينا: $0 \prec g(x) \prec 1$ تكافئ $x \in]1;+\infty[$

II-1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}1} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} + \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1+0 = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\xrightarrow{\succ}1} f(x) = \lim_{x\xrightarrow{\succ}1} \frac{x-1}{x+1} + \lim_{x\xrightarrow{\succ}1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0-\infty = -\infty$$

النفسير الهندسي للنتيجتين

$(C_f)^*$يقبل مقارب عمودي معادلته هي: $x=1$ و $(C_f)^*$يقبل مقارب أفقي معادلته هي: $y=1$

2-أ) تبيان أن $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ من اجل كل $x \in]1;+\infty[$

$$g'(x) = \frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب)حساب $f'(x)$ ودراسة اشارتها وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f(x) = g(x) + \ln(x-1) - \ln(x+1)$ ومنه $f'(x) = g'(x) + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} \succ 0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما من أجل كل $x \in]1;+\infty[$

x	1	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty \nearrow$	1

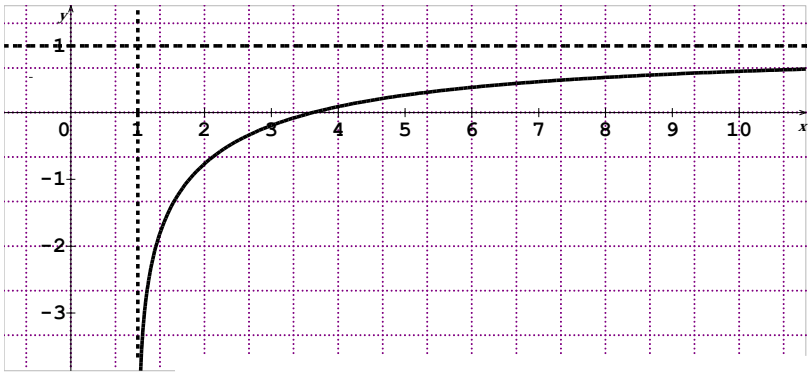
جدول تغيرات الدالة f

جـ-تبيّان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و

$f(3,62) \prec 0$ و $f(3,63) \succ 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 حيث $x_0 \in]3,62;3,63[$ يحقق $f(x_0)=0$

د- رسم (C_f).



3-أ) تعيين إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$

من الجزء I-جـ) $g(x)\prec 1$ ومنه: $\ln[g(x)]\prec \ln 1$ أي: $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\prec 0$

التمرين22:دورة جوان 2010

I)1-أ)حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2x-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}\frac{1}{2}} f(x)=1+\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}\frac{1}{2}}\ln(2x-1)=-\infty$

2) تبيين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I وتشكيل جدول التغيرات للدالة f

$f'(x)=0+\frac{2}{2x-1}\succ 0$ لأن $x\succ\frac{1}{2}$.

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال I لأن $f'(x)\succ 0$.

x	0,5	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس يوازي (d)

(d) يوازي المماس معناه $f'(x_0)=1$ ومنه $x_0=\frac{3}{2}$

4-أ)إثبات أنه من أجل كل $x\in I$: $f(x)=\ln(x+a)+b$.

بالمطابقة نجد: $a=-\frac{1}{2}$ و $b=1+\ln 2$ بـ $f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln\left[2(x-\frac{1}{2})\right]=1+\ln 2+\ln(x-\frac{1}{2})$

ب)استنتاج رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة ln

من العبارة $f(x)=1+\ln 2+\ln(x-\frac{1}{2})$ نستنتج ان (C_f) صورة (C) بانسحاب شعاعه $\vec{V}(\frac{1}{2};1+\ln 2)$

رسم (C_f) و (C) (في الجزء الثاني)

II-1)حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}\frac{1}{2}} g(x)$ وتبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}\frac{1}{2}} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}\frac{1}{2}}(f(x)-x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ حالة عدم التعيين

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1+\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\left[-\frac{x}{2x-1}+\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{2x-1}=-\frac{1}{2}$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها

$g'(x)=f'(x)-1=\frac{2}{2x-1}-1=\frac{-2x+3}{2x-1}$ و إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة $-2x+3$

جدول تغيرات الدالة g

لدينا: $g(\frac{3}{2}) = 1 + \ln(2) - \frac{3}{2} = 0,9$

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	
g(x)	$-\infty$	↗	$g(\frac{3}{2})$	↘	$-\infty$

3-أ) حساب $g(1)$ **وتبيان أن المعادلة** $g(x) = 0$ **تقبل حلا وحيد** $\alpha \in]\frac{3}{2}; +\infty[$

لدينا: $g(1) = f(1) - 1 = 1 + \ln 1 - 1 = 0$

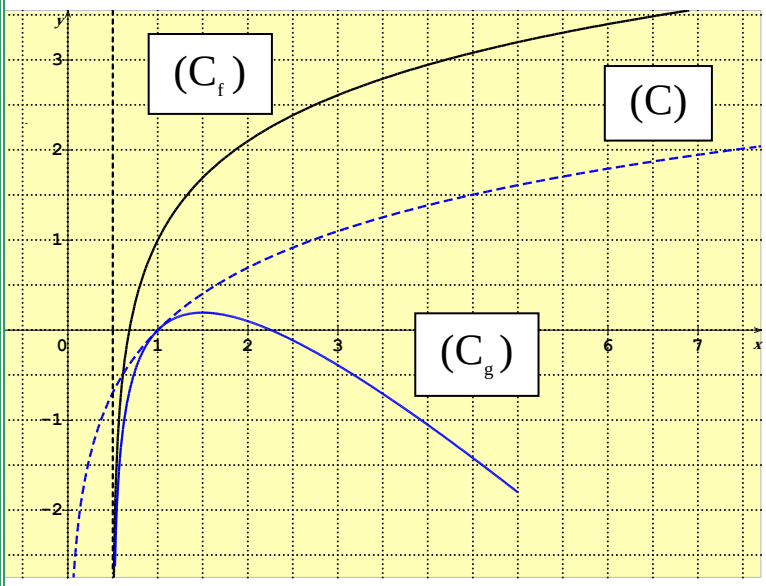
لدينا الدالة متزايدة تماما على المجال $]\frac{3}{2}; +\infty[$ و $g(\frac{3}{2}) = 0,9$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]\frac{3}{2}; +\infty[$

لدينا: $g(2) = f(2) - 2 = -1 + \ln 3 = 0,38$ و $g(3) = f(3) - 3 = -2 + \ln 5 = -0,39$

التحقق أن $2 \prec \alpha \prec 3$

بما أن $g(3) \prec 0 \prec g(2)$ فإن $2 \prec \alpha \prec 3$.



ب) رسم المنحنى (C_g) **على المجال** $]\frac{1}{2}; 5[$.

4)استنتاج إشارة $g(x)$ **على المجال** I .

من البيان أو جدول تغيرات الدالة g

لدينا إشارة $g(x)$ هي حسب الجدول التالي:

x	$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
g (x)	‖	−	0	+	0	−	

تحديد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) **والمستقيم** (d)

لدرسة وضعية (C_f) و (d) ندرس اشارة الفرق $f(x) - y = g(x)$ وهي حسب إشارة $g(x)$

إذا كانت $x \in [0,5;1[\cup]\alpha; +\infty[$ فإن (C_f) تحت (d) وإذا كانت $x \in]1; \alpha[$ فإن (C_f) فوق (d)

إذا كانت $x = 1$ أو $x = \alpha$ فإن (C_f) يقطع (d).

5) البرهان أنه من أجل كل $x \in]1; \alpha[$ **فإن** $f(x) \in]1; \alpha[$.

لدينا: $g(1) = g(\alpha) = 0$ ومنه $f(1) = 1$ و $f(\alpha) = \alpha$

ولدينا: f متزايدة تماما على المجال $]1; \alpha[$ ومنه $f(\alpha)$ ، $f(x)$ ، $f(1)$ حسب وضعية x ، α ، 1.

التمرين23:دورة جوان 2009

الجزء الأول:

1)حساب $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)$

$h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$ معرفة على $]-1,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x+\ln(x+1))=+\infty$ ، $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}(1-2+\ln(x+1))=-\infty$

2)تبيان أن: $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

لدينا: $h'(x)=2x+2+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)^2+1}{x+1}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة h وتشكيل جدول تغيراتها

بماأن : $x\succ -1$ فإن: $h'(x)\succ 0$ ومنه : h متزايدة تماما

x	-1		0		$+\infty$
h'(x)	‖	+	0	+	
h(x)	‖	↗	0	↗	$+\infty$
	$-\infty$				

3)حساب h(0) واستنتاج اشارة h(x)

$h(0)=0$ واشارة h(x) هي حسب الجدول التالي:

x	-1		0		$+\infty$
h(x)	‖	−	0	+	

ب)البرهان أن $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$

نضع: $t=\ln u$ ومنه $u=e^t$ إذا كان $u\to+\infty$ فإن $t\to+\infty$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^t}{t}}=0$

ج) استنتاج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)-\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty-0=+\infty$

د)حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}(-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1})=0$

استنتاج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$ ومنه (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y=x-1$ في جوار $+\infty$

هـ) دراسة وضعية (C_f) **بالنسبة للمستقيم المقارب المائل**

ندرس اشارة الفرق $[f(x)-(x-1)]=-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

اشارة الفرق هي حسب إشارة $-\ln(x+1)$ لأن $x+1>0$

$-\ln(x+1)=0$ معناه $\ln(x+1)=0$ أي $x=0$ معناه (C_f) يقطع المقارب المائل في النقطة $(0;-1)$

$-\ln(x+1)\geq 0$ معناه $\ln(x+1)\leq 0$ أي $-1\prec x\leq 0$ معناه (C_f) فوق المقارب المائل

$-\ln(x+1)\leq 0$ معناه $\ln(x+1)\geq 0$ أي $x\geq 0$ معناه (C_f) تحت المقارب المائل

2) تبيين أن $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-1\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

تشكيل جدول التغيرات

اشارة $f'(x)$ هي حسب اشارة $h(x)$

جدول التغيرات

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

3) تبيين ان المنحنى (C_f) **يقطع المستقيم:** $y=2$

(C_f) يقطع المستقيم: $y=2$ معناه المعادلة $f(x)=2$

تقبل حلا وحيدا α محصورا بين $3,3$ و $3,4$

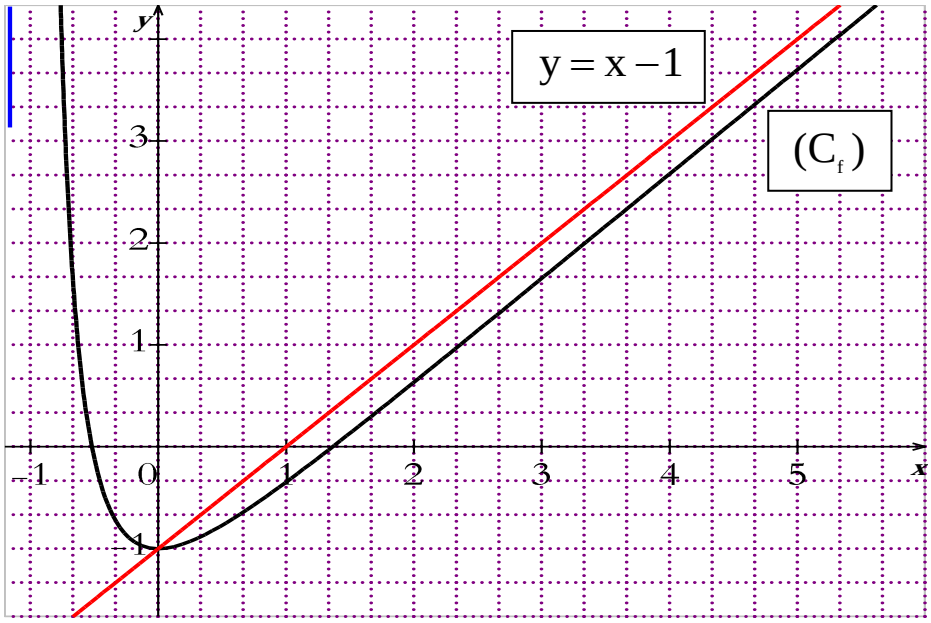
f متزايدة على المجال $[3,3\,;3,4]$

ولدينا: $f(3,3)=1,96$ و $f(3,4)=2,06$

ونلاحظ ان: $f(3,3)\prec 2\prec f(3,4)$

ومنه وحسب مبرهنة القيم التوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث: $f(\alpha)=2$

4) رسم المنحنى (C_f)



شعبة تقني رياضي

التمرين24:دورة 2019

I-حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ ، ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

g والدالة العددية المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = (x+1)(x+e) - e(x\ln x)$$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = e$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x = 0$ نهاية شهيرة ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (x+1)(x+e) = e$.

بما أن g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = e$ فإن $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in]0;+\infty[$

II -1-أ) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، ثم تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln(x+1) + \dfrac{e\ln x}{x+1}$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ لان $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln(x+1) = 0$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ex}{x+1}.\dfrac{\ln x}{x} = +\infty + e(0) = +\infty$

ب) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x+1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{-e}{(x+1)^2}\ln x + \frac{e}{x(x+1)} = \frac{(x+1)(x+e) - ex\ln x}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x+1)^2}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة $g(x)$ لأن المقام موجب

وعليه الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها وجدول تغيراتها يكون كما يلي:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\|$ $-\infty$	↗	$+\infty$

2- كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

معادلة المماس الأول (T) هي: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ أي: $y = \dfrac{e+1}{2}x - \dfrac{e+1}{2} + \ln 2$

3-أ) تبيّان أن المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α.

نبيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α.

من جدول تغيرات الدالة f الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0;+\infty[$ يحقق: $f(\alpha)=0$

ومنه المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α.

ب) التحقق أن : $0,7\le\alpha\le 0,8$

لدينا : $f(0,7)<0<f(0,8)$ ومنه $0,7\le\alpha\le 0,8$

4- أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln(x+1)]$ ، ثم تفسير النتيجة بيانيا.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln(x+1)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{ex}{x+1}.\frac{\ln x}{x}=e.0=0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln(x+1)]=0$ ومعناه المنحنى (T) مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (Γ) و (C_f)

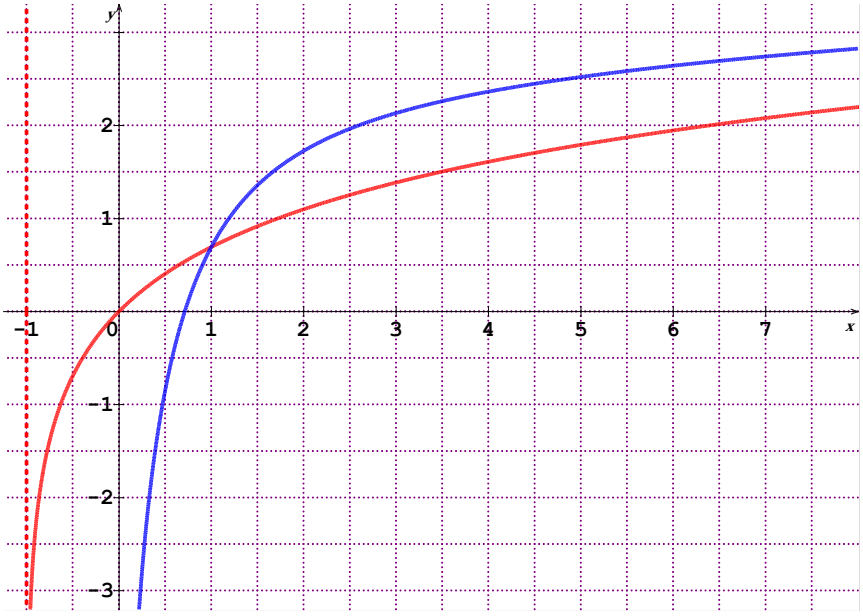
لدينا: $[f(x)-\ln(x+1)]=\frac{e}{x+1}\ln x$ وعليه إشارة الفرق هي حسب اشارة $\ln x$ وهي كما يلي

من أجل كل $0<x<1$ يكون المنحنى (C_f) يقع تحت (Γ)

من أجل $x=1$ يكون المنحنى (C_f) يقطع (Γ) احداثييها $(1;\ln 2)$

من أجل كل $x>1$ يكون المنحنى (C_f) يقع فوق (Γ).

ج) رسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f)



ملاحظة: المنحنى (Γ) هو صورة منحنى الدالة $x\to\ln x$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{-1}{0}$

التمرين25: دورة 2018

I-1- دراسة اتجاه تغير الدالة g المجال $]0;1[$.

الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;1[$ كمايلي: $g(x)=2-x+\ln x$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;1[$ حيث: $g'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{-x+1}{x}$

من أجل كل $x\in]0;1[$ يكون $g'(x)>0$ وعليه الدالة g متزايدة تماما على مجال تعريفها.

2- تبيّان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,15\le\alpha\le0,16$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;1[$ و لدينا: $g(0,15)=$ و $g(0,16)=$

وعليه: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$ حيث $0,15\le\alpha\le0,16$.

3- استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;1[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)\prec0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;1[$ فإن: $g(x)\succ0$.

II- 1- حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

الدالة العددية f المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1-2x+\ln x}{x-1}$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=-\infty$ لان $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}(1-2x+\ln x)=-1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}(x-1)=0^+$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{x-1}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}.\frac{\ln x}{x}=-2+1.0=-2$$

تفسير النتيجتين بيانيا

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=-\infty$ معناه المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور التراتيب

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2$ معناه المستقيم ذو المعادلة $y=-2$ مقارب للمنحنى (C_f) يوازي محور الفواصل

2- أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{g(\frac{1}{x})}{(x-1)^2}$.

$$f'(x)=\frac{(-2+\frac{1}{x})(x-1)-1(1-2x+\ln x)}{(x-1)^2}=\frac{2-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{2-\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{(x-1)^2}=\frac{g(\frac{1}{x})}{(x-1)^2}$$

ب) تبيّان ان f متزايدة تماما على $\left]1;\frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ ثم تشكيل جدول تغيراتها

من عبارة $f'(x)$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة $g(\frac{1}{x})$ لأن المقام موجب

لدينا: من أجل كل $x\in]\alpha;1[$ فإن: $g(x)>0$ وعليه من أجل كل $x\in\left]1;\frac{1}{\alpha}\right[$ فإن $g(\frac{1}{x})>0$

من أجل كل $x\in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)<0$ وعليه من أجل كل $x\in\left]\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ فإن $g(\frac{1}{x})<0$

عليه f متزايدة تماما على $\left]1;\frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ وجدول تغيرات g يكون كما يلي

x	1		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\frac{1}{\alpha})$	↘	-2

3) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y=-2$

لدراسة الوضع النسبي ندرس اشارة الفرق $f(x)-y=\frac{1-2x+\ln x}{x-1}+2=\frac{-1+\ln x}{x-1}$

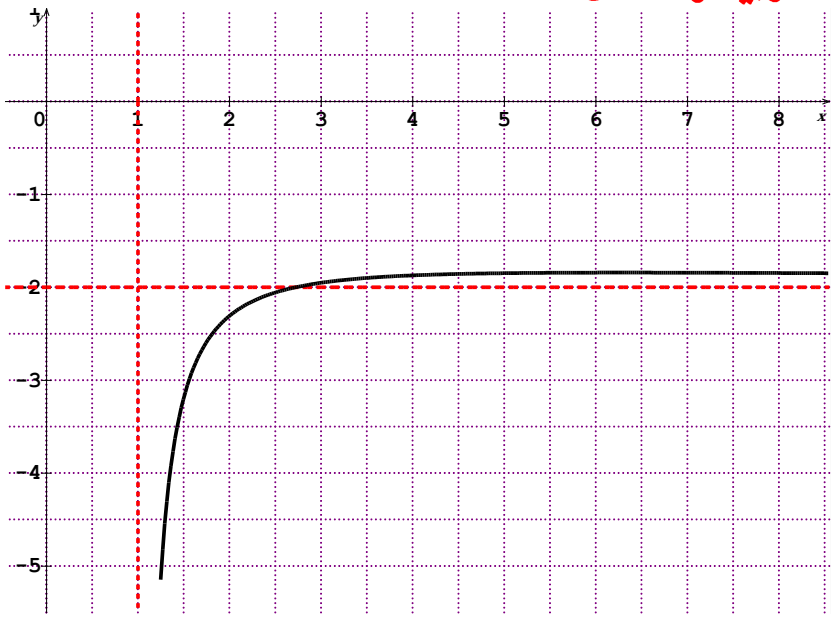
من العبارة السابقة نستنتج ان اشارة الفرق هي نفس اشارة $-1+\ln x$ وهي كما يلي

1) $-1+\ln x=0$ ومعناه $x=e$ ومعناه (C_f) يقطع (Δ) في نقطة احداثييها $(e;-2)$

2) $-1+\ln x>0$ ومعناه $x>e$ ومعناه (C_f) يقع فوق (Δ) في المجال $]e;+\infty[$

3) $-1+\ln x<0$ ومعناه $x<e$ ومعناه (C_f) يقع تحت (Δ) في المجال $]0;e[$.

4-رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f)



5-تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)|=m$ حليّن متمايزين.

حلول المعادلة $|f(x)|=m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y=m$ ومنحنى الدالة ذو المعادلة $y=|f(x)|$ وهو نظير المنحنى (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل

لدينا: المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين متمايزين معناه $-2<m<f(\frac{1}{\alpha})$

وعليه $|f(x)|=m$ تقبل حلين متمايزين معناه $-f(\frac{1}{\alpha})<m<2$

التمرين26:دورة 2017

1-أ)حساب النهايتين $\lim\limits_{x\to 2^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^{<}} f(x)$ **وتفسير النتيجتين بيانيا**

لدينا:الدالة f معرفة على المجال $]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=-2x+3+2\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$

* $\lim\limits_{x\to 1^{<}} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 1^{<}} \ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1^{<}}(-2x+3)=1$

$\lim\limits_{x\to 2^{>}} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 2^{>}} \ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^{>}}(-2x+3)=-1$.

* $\lim\limits_{x\to 1^{<}} f(x)=-\infty$ معناه للنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 2^{>}} f(x)=+\infty$ معناه للنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x=2$.

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)=\ln 1=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x+3)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)=\ln 1=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+3)=+\infty$

2)تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D : $f'(x)=-2-\dfrac{2}{(x-1)(x-2)}$.

لدينا: $f(x)=-2x+3+2\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ أي $f(x)=-2x+3+2[\ln(x-1)-\ln(x-2)]$

ومنه: $f'(x)=-2+2\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}\right]=-2-\dfrac{2}{(x-1)(x-2)}$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

لدينا: $f'(x)=-2\left[1+\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}\right]\prec 0$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ سالبة تماما:

وعليه الدالة f متناقصة تماما على مجالي تعريفها وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	−		‖		‖		−
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖	↗	‖	↘	$-\infty$

3) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، $(3-x)\in D_f$: $f(3-x)+f(x)=0$

أولا:من أجل كل $x\in D_f$ فإن $]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[$ $(-x)\in$ ومنه $(3-x)\in D_f$

ثانيا: $f(3-x)+f(x)=-2(3-x)+3+2\left[\ln\frac{(2-x)}{(1-x)}\right]-2x+3+2\left[\ln\frac{(x-1)}{(x-2)}\right]$

$=2\left[\ln\frac{(x-1)(2-x)}{(x-2)(1-x)}\right]=2\left[\ln\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-1)}\right]=2\ln 1=0$

ب) استنتاج ان المنحنى (C_f) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه

من العبارة $f(3-x)+f(x)=0$ والتي تكافئ $f(2.\frac{3}{2}-x)+f(x)=2(0)$

نستنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مركز تناظر احداثياها $\omega(\frac{3}{2};0)$.

4)تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,45;0,46[$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty;1[$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}+1}f(x)=-\infty$

لدينا: $f(0,45)=0.027\succ 0$ و $f(0,46)=-0,015\prec 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha)=0$ حيث $\alpha\in]0,45;0,46[$.

استنتاج ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا أخر β يطلب تعيين حصرا له

*بماأن المنحنى (C_f) يقبل النقطة ω كمركز تناظر له نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا أخر β على المجال $]2;+\infty[$ حيث $\alpha+\beta=2(\frac{3}{2})$

لأن النقطة التي احداثياها $(\alpha;0)$ نظيرة النقطة التي احداثياها $(\beta;0)$ بالنسبة للنقطة ω

لدينا: $\alpha+\beta=3$ ومنه $\beta=3-\alpha$

وبماأن $\alpha\in]0,45;0,46[$ فإن $\beta\in]3-0,46;3-0,45[$ أي $\beta\in]2,54;2,55[$.

5)تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=-2x+3$ مقارب مائلا للمنحنى (C_f) .

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=-2x+3$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-y]=0$

لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=\ln 1=0$.

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

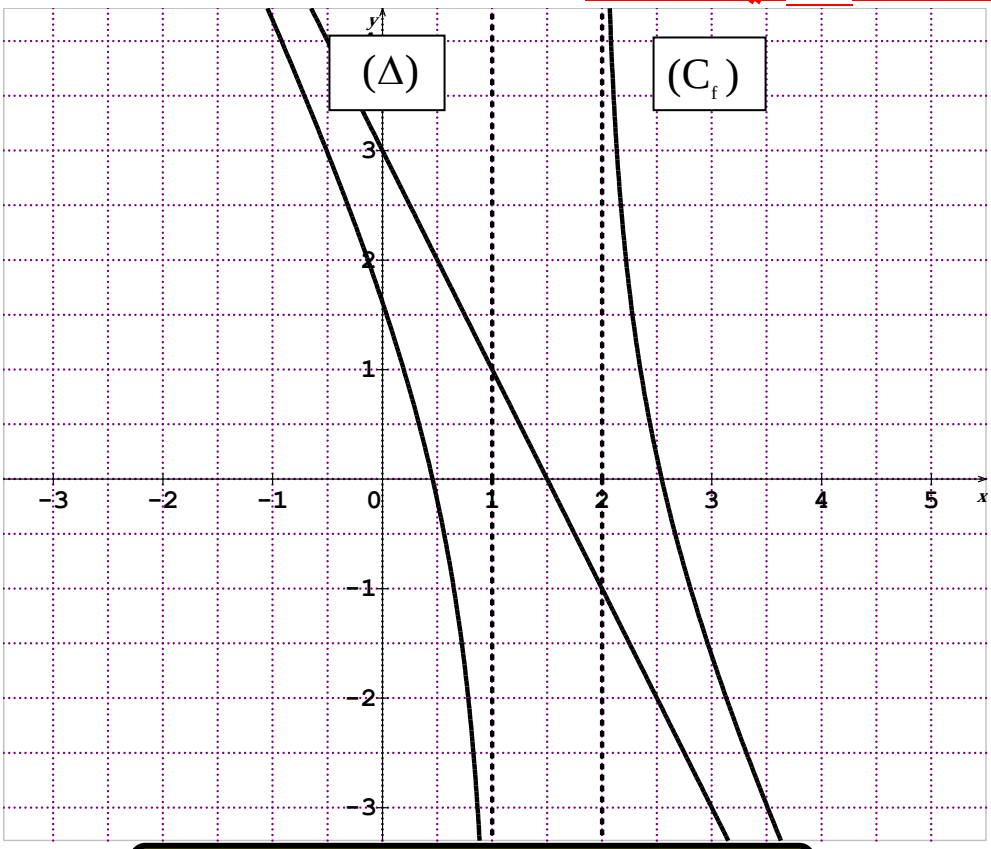
لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

لدينا: $f(x)-y\prec 0$ من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ لأن $\frac{x-1}{x-2}<1$

$f(x)-y\succ 0$: من أجل كل $x\in]2;+\infty[$ لأن $\frac{x-1}{x-2}>1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	‖	$+$	
الوضع	(Δ) تحت (C_f)	‖	(Δ) فوق (C_f)	

ب) رسم (Δ) والمنحنى (C) في أخر الحل



التمرين27:دورة 2017 الإستدراكية

I-1)حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

لدينا: الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2-\ln x}{x^2}$

* $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+} 2-\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0^+$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\frac{1}{2}$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ حيث $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ نهاية شهيرة

ب)دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها

حساب $g'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $g'(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}(x^2)-2x(2-\ln x)}{x^4}=\dfrac{-5+2\ln x}{x^3}$

إشارة $g'(x)$ هي حسب إشارة $-5+2\ln x$ لأن المقام موجب تماما

$-5+2\ln x=0$ معناه $x=e^{\frac{5}{2}}=e^2\sqrt{e}$

$-5+2\ln x\prec 0$ معناه $x\in\left]0;e^2\sqrt{e}\right[$ و $-5+2\ln x\succ 0$ معناه $x\in\left]e^2\sqrt{e};+\infty\right[$

وعليه جدول التغيرات يكون كما يلي

x	0		$e^2\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(e^2\sqrt{e})$	↗	$-\frac{1}{2}$

2-أ)تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,71\prec\alpha\prec 1,72$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\left]0;e^2\sqrt{e}\right[$ و $x\in$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}g(x)=+\infty$ و $g(e^2\sqrt{e})\prec 0$

لدينا: $g(1,71)=1,31$ و $g(1,72)=-0,07$ أي $g(1,71)\times g(1,72)\prec 0$

وعليه توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$ حيث $1,71\prec\alpha\prec 1,72$ حسب مبرهنة كوشي

ب) استنتاج إشارة $g(x)$

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)\succ 0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)\prec 0$

II-1) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

لدينا: الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=-\frac{1}{2}x+2+\frac{-1+\ln x}{x}$

ومنه: $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{-1+\ln x}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}(-\frac{1}{2}x+2)=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1+\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{2}x+2)=-\infty$

2-أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{(\frac{1}{x})(x)-1(-1+\ln x)}{x^2}=-\frac{1}{2}+\frac{2-\ln x}{x^2}=g(x)$

ومنه اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

2-أ) تبيّان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=-\frac{1}{2}x+2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=-\frac{1}{2}x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1+\ln x}{x}=0$

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) ينبغي دراسة اشارة الفرق $f(x)-y=\frac{-1+\ln x}{x}$

إشارة الفرق $f(x)-y$ هي حسب إشارة $-1+\ln x$ وهي كمايلي:

$-1+\ln x=0$ معناه $x=e$ ومعناه (C_f) يقطع (Δ) في نقطة إحداثييها $(e;f(e))$

$-1+\ln x\prec 0$ معناه $x\in]0;e[$ ومعناه (C_f) تحت (Δ) في هذا المجال

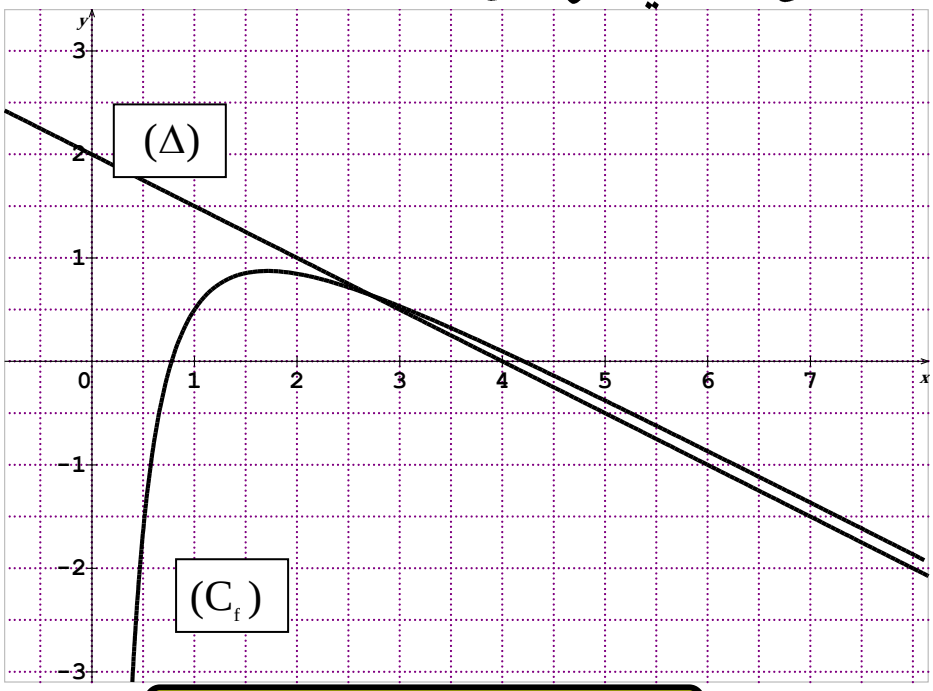
$-1+\ln x\succ 0$ معناه $x\in]e;+\infty[$ ومعناه (C_f) فوق (Δ) في هذا المجال

3) انشاء في المعلم السابق المستقيم (Δ) المنحنى (C_f).

من المعطيات لدينا: $f(\beta)=f(\gamma)=0$ حيث $0,76\prec\beta\prec 0,77$ و $4,19\prec\gamma\prec 4,22$

ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما β و γ.

رسم المستقيم (Δ) المنحنى (C_f) في آخر الحل.



التمرين28:دورة 2016 م1

I-1-أ)حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1^{+}}g(x)$

لدينا:الدالة g معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)$

* $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(x+1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$.

ب)دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها

حساب $g'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $g'(x) = (\frac{x-1}{x+1})' + (\ln(x+1))' = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+3}{(x+1)^2}$

نستنتج أن: $g'(x) \succ 0$ لان: $x \succ -1$ وعليه جدول التغيرات يكون كم يلي

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2-أ)تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,4 \prec \alpha \prec 0,5$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

لدينا: $g(0,4) = -\frac{3}{7} + \ln 1.4$ و $g(0,5) = -\frac{1}{3} + \ln 1.5$ أي $g(0,5) \times g(0,4) \prec 0$

وعليه: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha) = 0$ حيث $0,4 \prec \alpha \prec 0,5$.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x \in]-1;\alpha[$ فإن: $g(x) \prec 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x) \succ 0$

II-1) حساب $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ وتفسير النتيجة بيانيا ثم حساب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + (x-1)\ln(x+1)$

ومنه: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(x+1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to -1^+} (x-1) = -2$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ معناه للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته $x = -1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-1)\ln(x+1) = \lim\limits_{x\to +\infty} (x)\ln(x) = +\infty$

2-أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $]-1;+\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f'(x) = (x-1)'.(\ln(x+1))' = 1.\ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} = g(x)$

ومنه اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

ب) تبيان أن $f(\alpha)=-\alpha+4-\frac{4}{\alpha+1}$ **وإعطاء حصرا لـ** $f(\alpha)$

*لدينا: $f(\alpha)=1+(\alpha-1)\ln(\alpha+1)$ ولدينا أيضا: $g(\alpha)=0$ ومعناه $-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}=\ln(\alpha+1)$

ومنه: $f(\alpha)=1-(\alpha-1)\frac{(\alpha-1)}{(\alpha+1)}=\frac{(\alpha+1)-(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)}=\frac{-\alpha^2+3\alpha}{(\alpha+1)}=-\alpha+4-\frac{4}{(\alpha+1)}$

*الحصر لدينا: $0,4\prec\alpha\prec0,5$ تكافئ $3,5\prec-\alpha+4\prec3,6$.....(1)

ولدينا: $0,4\prec\alpha\prec0,5$ وتكافئ $1,4\prec\alpha+1\prec1,5$ وتكافئ $\frac{4}{1,5}\prec\frac{4}{\alpha+1}\prec\frac{4}{1,4}$...(2)

بطرح (2) من (1) نجد: $0,64\prec f(\alpha)\prec0,93$

3-أ) التحقق أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ $h'(x)=f'(x)-f'(a):$

لدينا: $h'(x)=f'(x)-\left[f'(a)(x-a)+f(a)\right]'=f'(x)-f'(a)$ لأن $(x-a)'=1$ و $f'(a)=0$

ب) تعيين إشارة $h'(x)$ **باستعمال اتجاه تغير الدالة g**

لدينا: $h'(x)=f'(x)-f'(a)=g(x)-g(a)<0$ من أجل $x<a$ لأن g متزايدة تماما

لدينا: $h'(x)=f'(x)-f'(a)=g(x)-g(a)>0$ من أجل $x>a$ لأن g متزايدة تماما

ومنه اشارة $h'(x)$ هي حسب الجدول التالي

x	-1		a		$+\infty$
اشارة $h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

استنتاج اتجاه تغير الدالة h

من الجدول السابق والذي يوضح اشارة $h'(x)$ نستنتج أن:

من أجل كل $x\in]-1;a[$ فإن: h متناقصة تماما ومن أجل كل $x\in]a;+\infty[$ فإن: h متزايدة تماما

والدالة h تقبل 0 كقيمة حدية صغرى من أجل a لأن: $h(a)=f(a)-f(a)=0$ وعليه $h(x)\geq0$

ج) تحديد الوضع النسبي للمنحنى (C) **والمماس** (T_a)

(T_a) له معادلة من الشكل: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

لتحديد الوضع النسبي للمنحنى (C) والمماس (T_a) ندرس اشارة الفرق $f(x)-y=h(x)$

بما أن $h(x)\geq0$ فإن المنحنى (C) يكون دائما فوق المماس (T_a) ويمسه في النقطة ذات الفاصلة a

4-أ) تبيان وجود مماسين (T_a) **يشملان النقطة** $A(1;0)$ **وتعيين معادلتيهما.**

لدينا: (T_a) له معادلة من الشكل

المماس (T_a) يشمل النقطة $A(1;0)$ معناه $0=f'(a)(1-a)+f(a)$

ولدينا: $0=f'(a)(1-a)+f(a)$ تكافئ $0=g(a)(1-a)+f(a)$

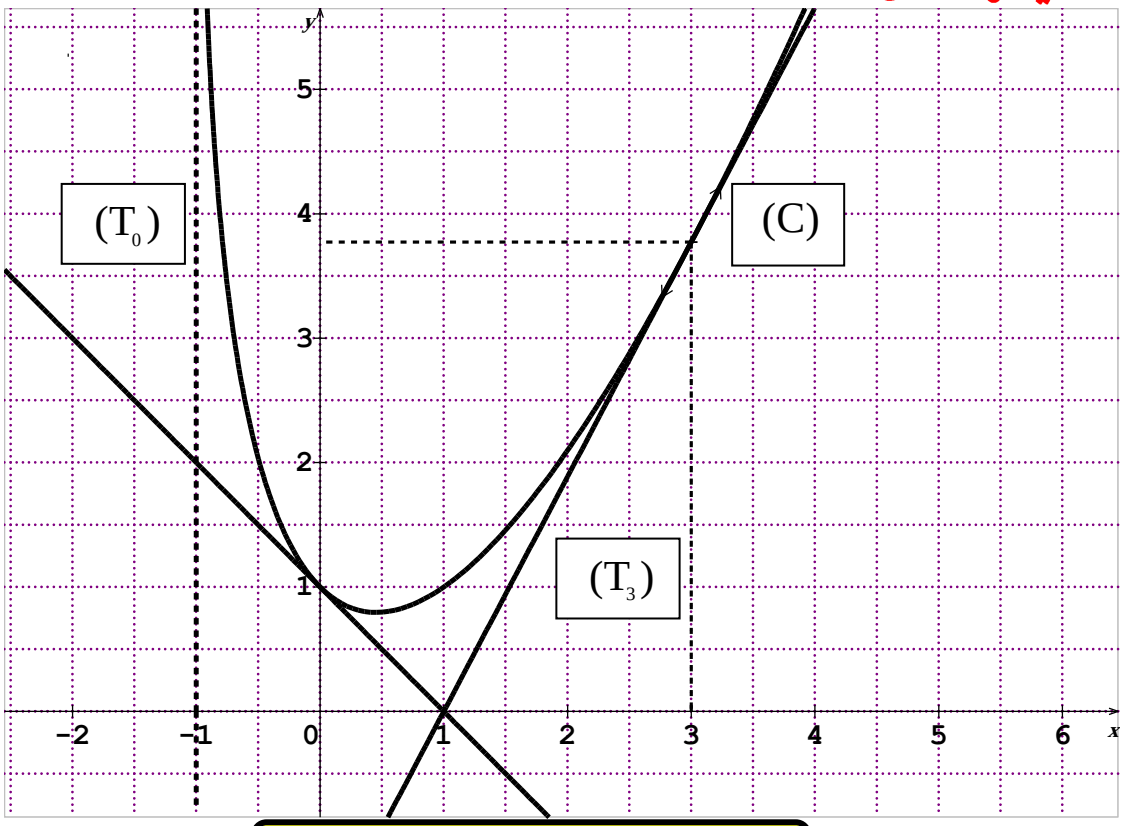
معناه $\frac{(1-a)(a-1)}{(a+1)}+1=0$ وعليه $(a-1)^2=a+1$ أي $a^2-3a=0$ ومنه $a=0$ أو $a=3$

ومنه يوجد مماسين (T_a) لـ (C) الأول عند النقطة $(0;1)$ والثاني عند النقطة $(3;2\ln 4)$

معادلة المماس الأول (T_0) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي: $y=-x+1$

معادلة المماس االثاني (T_3) هي: $y=f'(3)(x-3)+f(3)$ أي: $y=\left(\frac{1}{2}+\ln 4\right)x-\frac{1}{2}-\ln 4$

ب) رسم المماسين والمنحنى (C)



التمرين29:دورة 2016 م2

I) 1) –أ)حساب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$.

$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}(x-x\ln x)=0$ لأن $\lim_{x\xrightarrow{>}0} x\ln x=0$ نهاية شهيرة.

حالة عدم التعيين $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-x\ln x)$

إزالة حالة عدم التعيين $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x(1-\ln x)=-\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيرها.

من أجل كل $]0;+\infty[$ $g'(x)=1-(1.\ln x+x.\frac{1}{x})=-\ln x : x\in$

اشارة $g'(x)$ من اشارة $-\ln x$ على المجال

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

وعليه جدول تغيرات الدالة g يكون كتالي

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

2)تبيّان ان المعادلة $g(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3,5 \prec \alpha \prec 3,6$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]1;+\infty[$ و $\lim\limits_{x \to 1^{+}} g(x)=1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=-\infty$

لدينا: $g(3,5)=-0,88$ و $g(3,6)=-1,01$ أي $g(3,6) \prec -1 \prec g(3,5)$

حسب مبرهنة القيم التوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=-1$ حيث $3,5 \prec \alpha \prec 3,6$.

3) استنتاج إشارة العبارة $g(x)+1$ على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا: $g(x)+1=0$ تكافئ $g(\alpha)=-1$ ومن الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)+1$ هي:

من أجل كل $x \in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)+1 \succ 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)+1 \prec 0$

II-1)تبيّان أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x=0$ و $y=0$

* $\lim\limits_{x \to 0^{+}} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^{+}} \dfrac{\ln x}{x+1}=\lim\limits_{x \to 0^{+}} \ln x=-\infty$ ومعناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $x=0$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x+1}=\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{1}{x}}=0$ ومعناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=0$

2-أ)البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

لدينا: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x+1)-1.\ln x}{(x+1)^2}=\frac{x-x\ln x+1}{x(x+1)^2}=\frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$$

ب)تبيّان أن الدالة f متزايدة على $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيراتها

من العبارة $f'(x)=\dfrac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)+1$ لأن المقام موجب تماما

من أجل كل $x \in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)+1 \succ 0$ ومنه f متزايدة على $]0;\alpha]$

ومن أجل كل $x \in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)+1 \prec 0$ ومنه f ومتناقصة تماما على $]\alpha;+\infty[$
وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كتالي

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

جـ) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
(T) له معادلة من الشكل: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

ومنه $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

د) حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، تفسير النتيجة هندسيا.
بما أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند α لأنها قابلة للشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ فإن:
$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=0$ ومعناه المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذت الفاصلة α
المماس عند النقطة ذات الفاصلة α يوازي حامل محور الفواصل وله معادلة من الشكل $y=f(\alpha)$

3) أ-تبيّان أن : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$.

لدينا: $f(\alpha)=\frac{\ln\alpha}{\alpha+1}$...(1) ولدينا أيضا $g(\alpha)=-1$ ومعناه $\alpha-\alpha\ln\alpha=-1$ أي $\ln\alpha=\frac{1+\alpha}{\alpha}$

بعدتعويض قيمة $\ln\alpha$ في العبارة (1) نجد: $f(\alpha)=\frac{\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)}=\frac{1}{\alpha}$

ب- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (وتدوّير النتائج إلى 10^{-2})

لدينا: $f(\alpha)=\frac{\ln\alpha}{\alpha+1}$ ولدينا $3,5\prec\alpha\prec3,6$ وتكافئ $4,5\prec\alpha+1\prec4,6$...(1) و $1,25\prec\ln\alpha\prec1,28$....(2)
من المتباينتين (1) و(2) نجد: $0,27\prec f(\alpha)\prec0,28$

جـ-رسم (C_f). (في آخر الحل)

4- أ-التحقق أن المعادلة (E) يؤول حلّها إلى حل المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}x-m$

لدينا: $(E)..\ln(x^2)=x^2+x-2m(x+1)$ تكافئ $2\ln x=x(x+1)-2m(x+1)$

وبعد قسمة الطرفين على $\frac{1}{2}(x+1)$ نجد $\frac{\ln x}{x+1}=\frac{1}{2}x-m$ أي $f(x)=\frac{1}{2}x-m$

ب -تعيّن بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلّين متمايزين.

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x-m$ والمنحنى (C_f)

من البيان يكون للمعادلة (E) حلين متمايزين معناه $m \succ \frac{1}{2}$.

5-أ- تبيّان أن h زوجية.

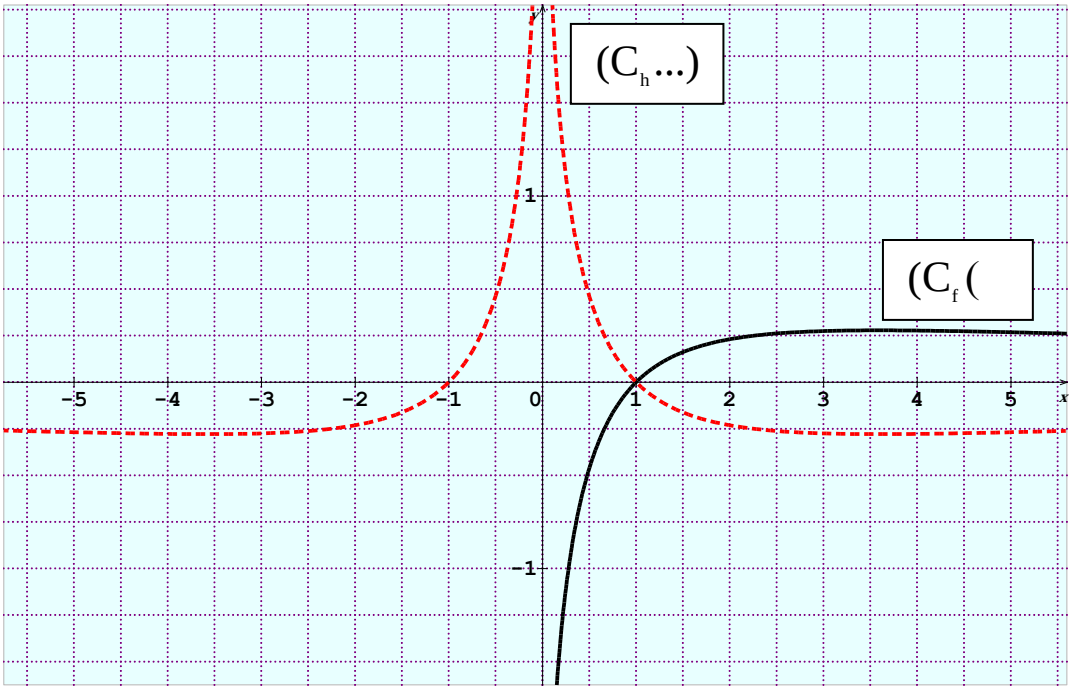
h دالة زوجية معناه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ و $-x \in \mathbb{R}^*$: $h(-x)=h(x)$

لدينا: $h(-x)=\frac{\ln|-x|}{-|-x|-1}=\frac{\ln|x|}{-|x|-1}=h(x)$ لأن $|-x|=|x|$ ومنه h زوجية.

ب- رسم في نفس المعلم المنحنى (C_f) و (C_h).

* (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل من أجل $x \in \mathbb{R}_+^*$

* (C_h) نظير (C_f) بالنسبة للمبدأ من أجل $x \in \mathbb{R}_-^*$ (أونتم الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب)



التمرين30:دورة 2015

I -1) حساب $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

لدينا: $h(x)=(x+2)^2+2-2hn(x+2)$ و المعرفة على $]-2;+\infty[$

$\lim\limits_{x \to -2^+}(-2\ln(x+2))=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x)=\lim\limits_{x \to -2^+}(x+2)^2+2-2\ln(x+2)=+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)=\lim\limits_{x \to +\infty}(x+2)^2+2-2\ln(x+2)$ حالة عدم التعيين.

$$\lim_{x \to +\infty} h(x)=\lim_{x \to +\infty}(x+2)\left[(x+2)+\frac{2}{x+2}-2\frac{\ln(x+2)}{(x+2)}\right]=+\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(x+2)}{(x+2)}\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x+2}\right]=0$

2)دراسة اتجاه تغير h وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $h(x)=(x+2)^2+2-2hn(x+2)$ و $D_h=]-2;+\infty[$.

ومنه: $h'(x)=2(x+2)-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{2(x+2)^2-2}{x+2}=\dfrac{2[(x+2)-1][(x+2)+1]}{(x+2)}$

أي: $h'(x)=\dfrac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)}$.

$h'(x)=0$ معناه $(x+1)(x+3)=0$ معناه $x=-1$ أو $x=-3\notin D_h$ مرفوض

$h'(x)\prec 0$ معناه $(x+1)(x+3)\prec 0$ معناه $x\in]-2;-1[$.

$h'(x)\succ 0$ معناه $(x+1)(x+3)\succ 0$ معناه $x\in]-1;+\infty[$

وعليه جدول تغيرات الدالة h كمايلي:

x	-2		-1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	−	0	+	
$h(x)$	‖ $+\infty$	↘	$h(-1)$	↗	$+\infty$

3)استنتاج أنه من أجل كل x من $]-2;+\infty[$: $h(x)>0$

من جدول التغيرات للدلة h لدينا: $h(-1)=3\succ 0$ ومنه $h(x)\succ 0$

I I -1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا ثم حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-2}f(x)$.

لدينا: $f(x)=x+1+\dfrac{2}{x+2}\ln(x+2)$ والمعرفة على $]-2;+\infty[$.

* $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-2}f(x)=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-2}\dfrac{2}{x+2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-2}\ln(x+2)=-\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-2}f(x)=-\infty$ معناه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-2$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln(x+2)}{x+2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$.

2) تبيان أنه من أجل كل x من $]-2;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+2)^2}$.

$$f'(x)=1-\frac{2}{(x+2)^2}\ln(x+2)+\frac{2}{(x+2)}\times\frac{1}{(x+2)}=\frac{(x+2)^2-2\ln(x+2)+2}{(x+2)^2}=\frac{h(x)}{(x+2)^2}$$

2)دراسة اتجاه تغير f على $]-2;+\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x)=\frac{h(x)}{(x+2)^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $h(x)$

وعليه تكون الدالة f متزايدة تماما على $]-2;+\infty[$ لأن : $h(x)\succ 0$

x	-2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ⟶ $+\infty$

3) أ) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$(\Delta): y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x+2)}{x+2}=0$ نهاية شهيرة

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) : ندرس إشارة الفرق: $f(x)-(x+1)$

من الجواب السابق لدينا: $f(x)-(x+1)=\frac{2\ln(x+2)}{(x+2)}$

إشارة الفرق هي من إشارة $\ln(x+2)$ لأن $(x+2)\succ 0$ من أجل كل $x\in]-2;+\infty[$

$*\ln(x+2)=0$ ومنه $x=-1$ معناه (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي احداثياها $(-1;0)$

$*\ln(x+2)\prec 0$ ومنه $x\prec -1$ معناه (C_f) تحت (Δ) في المجال $]-2;-1[$

$*\ln(x+2)\succ 0$ ومنه $x\succ -1$ معناه (C_f) فوق (Δ) في المجال $]-1;+\infty[$

4-أ) اثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعيين إحداثييها.

المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف معناه الدالة "f تنعدم وتغير إشارتها

لدينا: $f'(x)=\frac{h(x)}{(x+2)^2}$ ومنه $f''(x)=\frac{h'(x)(x+2)^2-2(x+2)h(x)}{(x+2)^4}$

ومنه: $f''(x)=\frac{h'(x)(x+2)-2h(x)}{(x+2)^3}=\frac{4\ln(x+2)-6}{(x+2)^3}$

$f''(x)=0$ معناه $\ln(x+2)=\frac{3}{2}$ أي $x+2=e^{\frac{3}{2}}$ ومنه $x=\sqrt{e^3}-2$

$f''(x)\prec 0$ معناه $x\prec\sqrt{e^3}-2$ و $f''(x)\succ 0$ معناه $x\succ\sqrt{e^3}-2$

ومنه (C_f) يقبل نقطة إنعطاف A إحداثياها $(\sqrt{e^3}-2;\sqrt{e^3}-1+\frac{3}{4\sqrt{e^3}})$

ب) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) (في آخر الحل)

III-1)حساب $\lim\limits_{x\to -1^{<}} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ **و** $\lim\limits_{x\to -1^{>}} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ **والإستنتاج بالنسبة لـ g**

كتابة العبارة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ، وذلك حسب قيم x

من أجل كل $]-2;-1[$ $g(x)=-\left[(x+1)+\dfrac{2}{x+2}\ln(x+2)\right]=-f(x):x\in]-2;-1[$

من أجل كل $]-1;+\infty[$ $g(x)=\left[(x+1)+\dfrac{2}{x+2}\ln(x+2)\right]=f(x):x\in]-1;+\infty[$

وعليه : $\lim\limits_{x\to -1^{<}} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^{<}} -\dfrac{f(x)}{x+1}=-1-\lim\limits_{y\to 0^{>}} \dfrac{2}{y}.\dfrac{\ln(y+1)}{(y+1)}=-3$

$$\lim_{x\to -1^{>}} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^{>}} \frac{f(x)}{x+1}=1+\lim_{y\to 0^{>}} \frac{2}{y}.\frac{\ln(y+1)}{(y+1)}=+3$$

نستنتج أن الدالة g غير قابلة للإشتقاق عند 1- لأن: $-3\neq +3$

2)إعطاء تفسيرا هندسيا للنتيجة

بمأن العدد المشتق من اليسار لايساوي العدد المشتق من اليمين للدالة g عند 1-

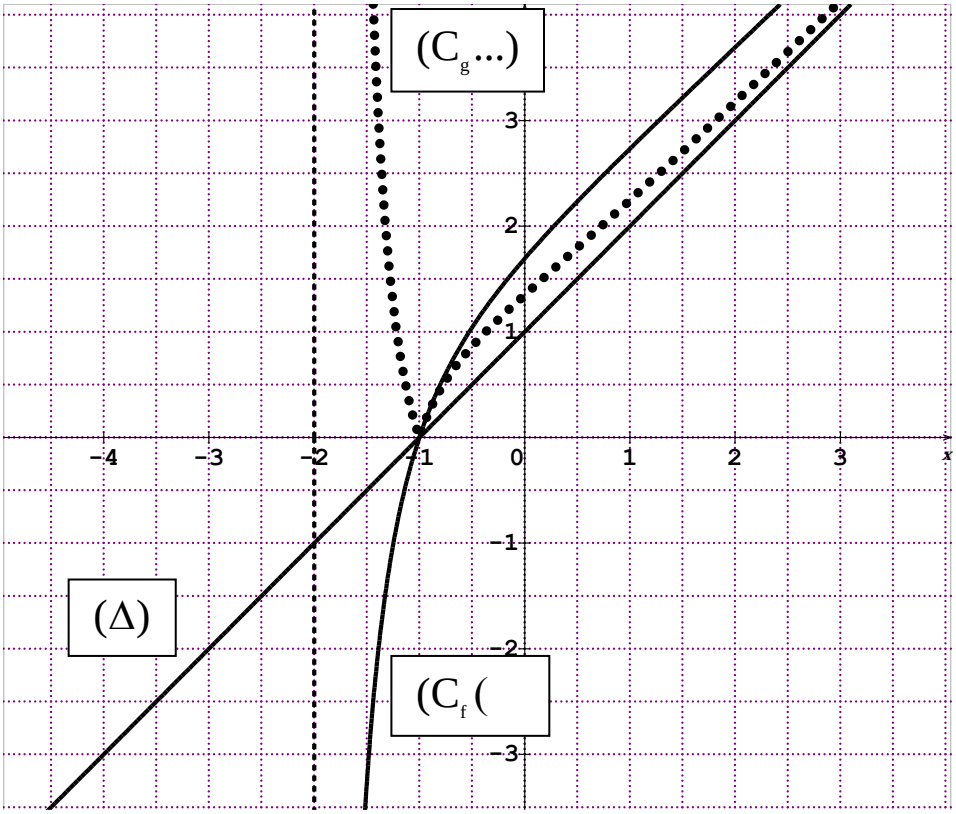
فإن منحنى الدالة (C_g) يقبل نصفي مماسين عند النقطة التي أحدثياها $(-1;0)$.

3)رسم المنحنى (C_g) **إنطلاقا من المنحنى** (C_f)

من الجواب السابق لدينا:

$g(x)=-f(x):x\in]-2;-1[$ ومعناه (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

$g(x)=f(x):x\in]-1;+\infty[$ ومعناه $(C_g)=(C_f)$



التمرين31:دورة 2014

I- 1) ادرس تغيرات الدالة g

لدينا: g دالة معرفة على $]0;3]$ بـ: $g(x)=x\ln x+x$.

النهايات

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x\ln x+x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x\ln x=0$ نهاية شهيرة و $g(3)=3\ln 3+3$

اتجاه التغير

$g'(x)=(x\ln x+x)'=1.\ln x+x.\frac{1}{x}+1=\ln x+2$

$g'(x)=0$ معناه $\ln x+2=0$ أي $x=e^{-2}$

$g'(x)\succ 0$ معناه $\ln x+2\succ 0$ أي $x\succ e^{-2}$ و $g'(x)\prec 0$ معناه $\ln x+2\prec 0$ أي $x\prec e^{-2}$

جدول التغيرات

x	2		e^{-2}		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	$g(e^{-2})$	↗	$g(3)$

2-أ) نبيّان أن المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلا وحيدا α على $]0;3]$ ثم تحقق أن $1,45\prec\alpha\prec 1,46$.

*المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلا وحيدا α على $]0;3]$ لأن:

f متزايدة على $]e^{-2};3]$ ولدينا: $g(e^{-2})=-e^{-2}$ و $g(3)=3\ln 3+3$ أي: $g(e^{-2})\prec 2\prec g(3)$

ومنه وحسب مبرهنة القيم التوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث: $g(\alpha)=2$

* لدينا: $g(1,45)=1,99$ و $g(1,46)=2,01$ ومنه $1,45\prec\alpha\prec 1,46$

ب)استنتج إشارة $g(x)-2$.

$g(\alpha)=2$ معناه $g(\alpha)-2=0$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن إشارة $g(x)-2$ هي حسب الجدول التالي

x	0		α		3
$g(x)-2$		$-$	0	$+$	

II-1)وضع تخمين حول قابلية اشتقاق للدالة f عند 2

باستعمال المنحنى (C_f) نخمن أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 2 لأنها تقبل نصفي مماسين

2) أثبات صحة تخمينك.

توضيح: $f(x)=|x-2|\ln x=\begin{cases}-(x-2)\ln x;x\in]0;2]\\(x-2)\ln x;x\in]2;3]\end{cases}$

لدينا: $\lim\limits_{x\prec 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\prec 2}\dfrac{-(x-2)\ln 2}{(x-2)}=-\ln 2=f'_g(2)$

$\lim\limits_{x\succ 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\succ 2}\dfrac{(x-2)\ln 2}{(x-2)}=\ln 2=f'_d(2)$

ومنه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 2 لأن: $f'_g(2)\neq f'_d(2)$.

3) دراسة تغيرات الدالة f

f والمعرفة على المجال $]0;3]$ بـ: $f(x)=|x-2|\ln x$

النهايات: $\lim\limits_{x\prec 0}\ln x=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\succ 0}f(x)=2\lim\limits_{x\prec 0}\ln x=-\infty$ نهاية شهيرة. و $f(3)=\ln 3$

اتجاه التغير: f قابلة للاشتقاق على كلا من المجالين $]0;2[$ و $]2;3]$ حيث:

$$f'(x)=\begin{cases}-\ln x-\dfrac{x-2}{x}=-\dfrac{g(x)-2}{x};x\in]0;2[\\ \ln x+\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{g(x)-2}{x};x\in]2;3]\end{cases}$$

من الجواب I-2 ب) نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي:

نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]2;3]$ و عكس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;2[$.

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

X	0		α		2		3
f'(x)		+	0	−	‖	+	
f (x)	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$f(3)$

III-1) تبيّان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $x=\dfrac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h).

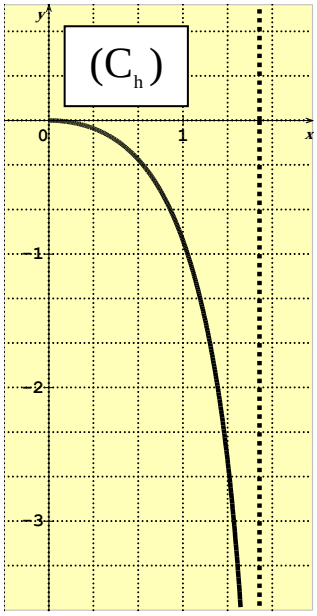
لدينا: h الدالة المعرفة على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ كمايلي: $h(x)=(2-\cos x)\ln(\cos x)$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $x=\dfrac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h) معناه $\lim\limits_{x\prec\frac{\pi}{2}}h(x)=\infty$.

لأن: $\lim\limits_{x\prec\frac{\pi}{2}}h(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\prec\frac{\pi}{2}}(\cos x)=0^+$ و $\lim\limits_{x\prec\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\prec\frac{\pi}{2}}(2-\cos x)=1$.

2) دراسة اتجاه تغير الدالة h ، ثم تشكيل جدول تغيراتها وارسم (Δ) و (C_h).

توضيح:الدالة h هي تركيب الدالة $x \to \cos x$ متبوعة بالدالة f أي: $h(x) = f(\cos x)$



نعلم أن الدالة $x \to \cos x$ متناقصة على المجال $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ و الدالة f متزايدة على المجال $[0;1]$ ومنه الدالة h متناقصة على المجال $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

لأنها تركيب دالتين مختلفتين في اتجاه التغير

وعليه جدول تغيرات الدالة h يكون كمايلي:

لدينا: $h(0) = f(\cos 0) = f(1) = 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
h(x)	0 ↘	$-\infty$

التمرين32:دورة 2013 م1

I-1) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.

g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$

من اجل كل $x \in]-1;+\infty[$ فإن: $g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$

نلاحظ أن : من اجل كل $x \in]-1;+\infty[$ فإن: $g'(x) \succ 0$ وعليه تكون g متزايدة تماما.

2)تبيّان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,31 \prec \alpha \prec 0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1) = 2-(\alpha+1)^2$

*g متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ولدينا: $g(0,32) = $ و $g(0,31)$ أي: $g(0,31) \prec 0 \prec g(0,32)$

ومنه وحسب مبرهنة القيم التوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث: $g(\alpha) = 0$

* $g(\alpha) = 0$ معناه $(\alpha+1)^2 - 2 + \ln(\alpha+1) = 0$ أي $\ln(\alpha+1) = 2-(\alpha+1)^2$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$.

الدالة g تماما على $]-1;+\infty[$ والمعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α فإن إشارة $g(x)$ حسب الجدول التالي:

x	−1	α	$+\infty$
g(x)	‖	− 0 +	

II-1- احسب $\lim\limits_{\substack{\succ \\ x \to -1}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x) = (x+1)^2 + [2 - \ln(x+1)]^2$

$\lim\limits_{\substack{\succ \\ x \to -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{\succ \\ x \to -1}} (x+1)^2 + [2-\ln(x+1)]^2 = 0 + \infty = +\infty$ لأن: $\lim\limits_{\substack{\succ \\ x \to -1}} -\ln(x+1) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)^2 + [2-\ln(x+1)]^2 = +\infty + \infty = +\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} [-\ln(x+1)]^2 = +\infty$.

2- تبيّان أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$

$$f'(x)=2(x+1)-2\left[2-\ln(x+1)\right]\frac{1}{x+1}=\frac{2\left[(x+1)^2-2+\ln(x+1)\right]}{x+1}=\frac{2g(x)}{x+1}$$

3-دراسة اتجاه تغير الدالة f، ثم تشكّيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$.

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	-1		α		$+\infty$
f'(x)	‖	$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4-تبيّان أن: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left[1+(\alpha+1)^2\right]$

ثم استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2+\left[2-\ln(\alpha+1)\right]^2$

ولدينا من جهة أخرى $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$ حسب I-2.

ومنه : $f(\alpha)=(\alpha+1)^2+\left[(\alpha+1)^2\right]^2=(\alpha+1)^2\left[1+(\alpha+1)^2\right]$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

نضع: $0,31\prec\alpha\prec0,32$ .....(1) و لدينا: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left[1+(\alpha+1)^2\right]$

(1) تكافئ $1,31\prec\alpha+1\prec1,32$ وتكافئ $(1,31)^2\prec(\alpha+1)^2\prec(1,32)^2$.....(2)

(2)تكافئ $1+(1,31)^2\prec1+(\alpha+1)^2\prec1+(1,32)^2$.....(3)

بضرب (2) و (3)لطرف لطرف نجد: $(1+(1,31)^2)(1,31)^2\prec f(\alpha)\prec(1+(1,32)^2)(1,32)^2$

بعد الحساب نجد: $\prec f(\alpha)\prec$

5-تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $[-1;2]$.

ملاحظة: $f(2)=3^2+(2-\ln(3))^2=9,$

III-1-أثبات أن المسافة $AM=\sqrt{f(x)}$

لدينا: $A(-1;2)$ و $M(x;h(x))$

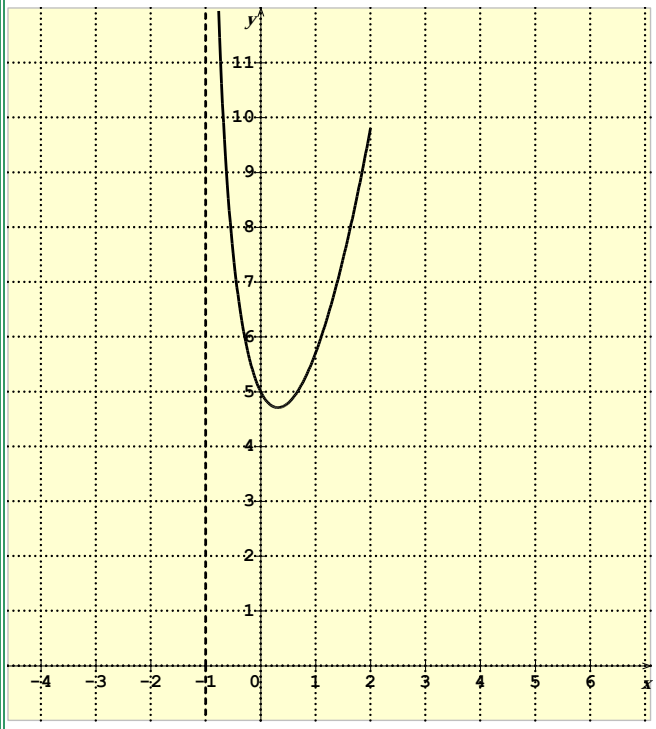
ومنه: $AM=\sqrt{(x+1)^2+(2-\ln(x+1)^2}=\sqrt{f(x)}$

k معرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

2-أ-تبيّان أن k و f نفس إتجاه التغير على $]-1;+\infty[$

الدالة k معرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة

$k(x)=\sqrt{f(x)}$: k قابلة للأشتقاق على $]-1;+\infty[$ حيث: $k'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$



من العبارة $k'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ نستنتج أن العبارتين $k'(x)$ و $f'(x)$ لهما نفس الإشارة

ومنه للدالتين k و f نفس إتجاه التغير على المجال $]-1;+\infty[$.

ب-تعيّين إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

لدينا: $AM=\sqrt{f(x)}=k(x)$

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن عندما تقبل الدالة k قيمة حدية محلية صغرى

الدالة k متناقصة على المجال $]-1;\alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و $k(\alpha)=\ln(\alpha+1)$

أي k قيمة حدية محلية صغرى هي $\ln(\alpha+1)$ عند α

ومنه احداثيي النقطة B هي $(\alpha;\ln(\alpha+1))$.

جـ-تبيّان أن : $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

نضع: $M=B$ في العلاقة $AM=\sqrt{(x+1)^2+(2-\ln(x+1)^2}$

نجد: $AB=\sqrt{(\alpha+1)^2+(2-\ln(\alpha+1)^2}=\sqrt{(\alpha+1)^2[1+(\alpha+1)^2]}=(\alpha+1)\sqrt{1+(\alpha+1)^2}$

التمرين33:دورة 2013 م2

1-دراسة تغيرات الدالة g.

لدينا: g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x-1)e^x$

النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ غاية شهيرة و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$.

دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $f'(x)=[(x-1)e^x]'=1.e^x+(x-1).e^x=xe^x$ وشارته هي حسب اشارة x

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	0	↘	-1	↗	$+\infty$

2- بيّن أنه ، من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $1+(x-1)e^x\geq 0$

من جدول التغيرات لدينا: $g(x)\geq -1$ لأن 1- قيمة حدّية صغرى للدالة g

ومنه: $g(x)+1\geq 0$ عليه $1+(x-1)e^x\geq 0$.

II-1) أ-تبيّان أن f مستمرة على $[0;+\infty[$.

لدينا: f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-1}{x};x\succ 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

نعلم أن f مستمرة على $]0;+\infty[$ معناه أن f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ ومستمرة عند 0

- f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ لأنها حاصل قسمة دالتين مستمرتين على هذا المجال.
- f مستمرة عند 0 معناه $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=f(0)=1$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ نهاية شهيرة.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ نهاية شهيرة و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

2-أ-التحقق أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}$

لدينا: $f'(x)=\dfrac{e^x(x)-1(e^x-1)}{x^2}=\dfrac{1+e^x(x-1)}{x^2}$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f، ثم تشكّيل جدول تغيراتها.

من الجواب I-2) لدينا: $1+(x-1)e^x\geq 0$

ومنه $f'(x)\geq 0$ وعليه تكون الدالة f متزايدة تماما وجدول تغيراتها يكون كمايلي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$

III-1-دراسة اتجاه تغير الدالة f_n على المجال $]0;+\infty[$.

f_n الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x$.

$f_n'(x)=\dfrac{1+e^x(x-1)}{x^2}+\dfrac{n}{x}$ لأن $(n\ln x)'=n\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$f'(x)\geq 0$ وعليه تكون الدالة f متزايدة تماما لأن: $\dfrac{n}{x}\succ 0$ و $\dfrac{1+e^x(x-1)}{x^2}\geq 0$.

2-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f_n(x)$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f_n(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} n\ln x=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x=+$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} n\ln x=+\infty$.

3- دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

لدراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) ندرس إشارة الفرق: $f_{n+1}(x)-f_n(x)$.

لدينا: $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{e^x-1}{x}+(n+1)\ln x-\frac{e^x-1}{x}-n\ln x=\ln x$

إشارة الفرق هي حسب إشارة $\ln x$ والجدول التالي يوضح إشارة $\ln x$ والوضع النسبي:

x	0		1		$+\infty$
إشارة الفرق		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(C_n)تحت(C_{n+1})			(C_n)فوق(C_{n+1})	
			(C_n)يقطع(C_{n+1})		

4-تبيّان أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين احداثيها.

النقطة B نقطة تقاطع جميع المنحنيات تكون مستقلة عن العدد الطبيعي n

من خلال الجواب 3 نستنتج أن $B(1;e-1)$ هي نقطة تقاطع (C_{n+1})و (C_n).

5-أ- تبيّان أنه ، يوجد عدد حقيقي وحيد من $]0,3;0,4[$ α_1 بحيث: $f_1(\alpha_1)=0$.

لتبيين وجود عدد حقيقي وحيد $\alpha_1\in]0,3;0,4[$ بحيث: $f_1(\alpha_1)=0$ نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة

لدينا: الدالة f_1 (هي الدالة f) مستمرة ومتزايدة تماما (انظر جدول تغيرات f)

ولدينا: $f_1(0,3)=-0,03$ و $f_1(0,4)=0,31$ أي $f_1(0,4)\times f_1(0,3)\prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_1\in]0,3;0,4[$ يحقق $f(\alpha_1)=0$.

ب-تبيّان أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1)\leq 0$

لتبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1)\leq 0$

من الجواب 3 لدينا: $f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$ من أجل كل $x\in]0;1[$

إذن $f_n(x)\leq f_1(x)$ **من أجل كل عدد طبيعي n حيث** $n\geq 1$.

ملاحظة: يمكن استعمل طريقة البرهان بالتراجع

البرهان أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]\alpha_1;1[$ بحيث: $f_n(\alpha_n)=0$.

لتبيين وجود عدد حقيقي وحيد $\alpha_n\in]\alpha_1;1[$ بحيث: $f_n(\alpha_n)=0$ نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة

لدينا: الدالة f_n مستمرة ومتزايدة تماما (أنظر الجواب III-1)

ولدينا: $f_n(\alpha_1)\prec 0$ و $f_n(1)=e-1\succ 0$ أي $f_n(\alpha_1)\times f_n(1)\prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n\in]\alpha_1;1[$ يحقق $f_n(\alpha_n)=0$.

6-أ- **تبيّان أنه ، من أجل كل x من** $]0;1[$: $\frac{e^x-1}{x}\leq e-1$.

المتراجحة $\frac{e^x-1}{x}\leq e-1$ تكافئ $f_1(x)\leq f_1(1)$ محققة لأن الدالة f متزايدة تماما على $]0;1[$.

التمرين34:دورة 2012

1-تعيّن العددين الحقيقيين a و b

التمثيل البياني للدالة g يقبل في النقطة $A(1;-1)$ مماسا معامل توجيهه 4 معناه $\begin{cases} g'(1)=4 \\ g(1)=-1 \end{cases}$

لدينا: $g(1)=1^2+a+b\ln(1)=1+a=-1$ ومنه $a=-2$.

لدينا: $g'(x)=2x+\frac{b}{x}$ ومنه $g'(1)=2+\frac{b}{1}=4$ ومنه $b=2$

أ) دراسة تغيرات الدالة g ، ثم تشكّيل جدول تغيراتها.

لدينا: $g(x)=x^2-2+2\ln(x)$ والمعرفة على $]0;+\infty[$

النهايات

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-2+\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-2-\infty=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ نهاية شهيرة.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2)+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty+\infty=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ نهاية شهيرة

اتجاه التغير

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث: $g'(x)=2x+\frac{2}{x}$

نلاحظ أن: $g'(x)\succ 0$ من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ وعليه الدالة g متزايدة تماما.

جدول تغيرات g

x	0	$+\infty$
g'(x)	+	
g(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

ب)تبيّان أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ g ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ومنه وحسب مبرهنة القيم التوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha\in]0;+\infty[$ بحيث: $g(\alpha)=0$

استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

لدينا: $g(]0;\alpha[)=]-\infty;0[$ معناه $g(x)\prec 0$ من أجل $x\in]0;\alpha[$.

$g(]\alpha;+\infty[)=]0;+\infty[$ معناه $g(x)\succ 0$ من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$.

II- 1- أ) حساب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-2-\frac{2\ln(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x-2-\frac{2\ln(x)}{x}=-2-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\ln(x)}{x}=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-2-\frac{2\ln(x)}{x}=+\infty$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ نهاية شهيرة.

ب) حساب $f'(x)$، ثم تحقق أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=1-2\frac{\left(\frac{1}{x}.x-1.\ln x\right)}{x^2}=\frac{x^2-2(1-\ln x)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

جـ)استنتاج إشارة $f'(x)$، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f

من العبارة $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$وعليه جدول التغيرات للدالة f يكون كمايلي:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

2-أ)بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x-2$مقارب لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f)بالنسبة لـ (Δ)

*المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x-2$مقارب لـ (C_f) معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=0$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2\ln(x)}{x}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ نهاية شهيرة.

*لدراسة وضعية (C_f)بالنسبة لـ (Δ) ندرس إشارة الفرق: $[f(x)-(x-2)]=-2\frac{\ln x}{x}$

نلخص إشارة الفرق والوضعية في الجدول التالي:

:

x	0	1	$+\infty$
اشارة الفرق	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

ب)تبيّان أن (C_f)يقبل مماسا (T)يوازي (Δ)ثم ايجاد معادلة له و كتابة معادلة للمماس (T)

(C_f)يقبل مماسا (T)يوازي (Δ) معناه معامل توجيه (T) يساوي 1 أي $f'(x_0)=1$

$f'(x_0)=1$ معناه $\frac{g(x_0)}{{x_0}^2}=1$ أي $g(x_0)=x_0^2$ أي $-2+2\ln(x_0)=0$ ومنه: $x_0=e$

(T) له معادلة من الشكل : $y = f'(e)(x-e)+f(e)$ ومنه $y = x-2-\frac{2}{e}$

ج) تبيّان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حليّن x_1 و x_2

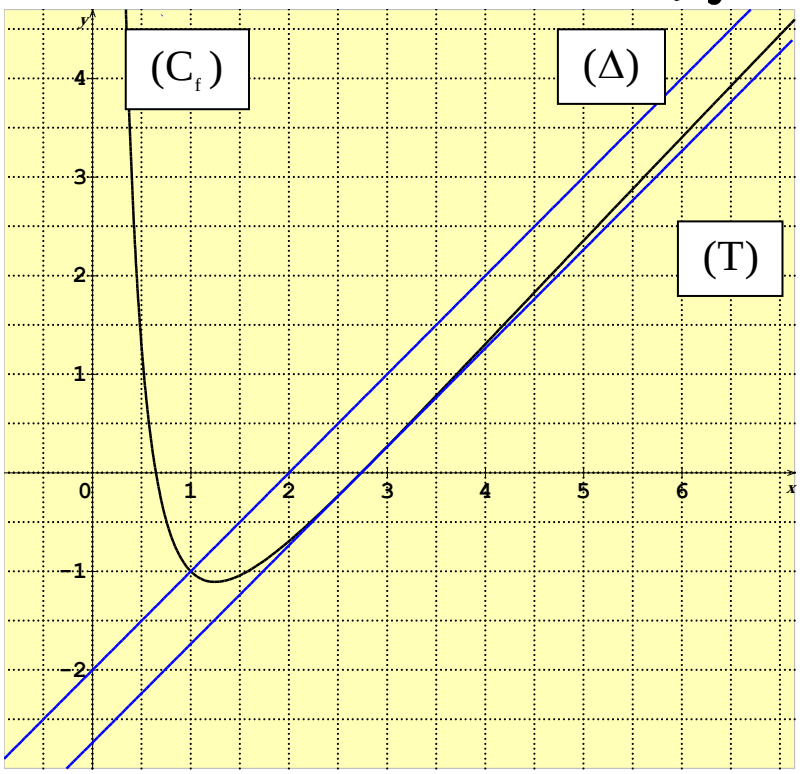
الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha[$ و $f(0,6)\times f(0,7)\prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α محصور بين $0,6$ و $0,7$ يحقق: $f(x_1)=0$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\alpha;+\infty[$ و $f(2,7)\times f(2,8)\prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد β محصور بين $2,8$ و $2,7$ يحقق: $f(x_2)=0$

*رسم كلا من (Δ) و (T) و (C_f).



3-المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة : $(m+2)x+2\ln(x)=0\ldots(1)$

(1) تكافئ $m=-2-\frac{2\ln(x)}{x}$ وتكافئ $x+m=f(x)$ وتكافئ الجملة: $\begin{cases} y=x+m \\ y=f(x) \end{cases}$

حلول الجملة السابقة هي فواصل نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$ والمنحنى (C_f)

من البيان نميز الحالات التالية:

1) $m\prec -2-\frac{2}{e}$ المعادلة (1) لا تقبل حلول ، 2) $m=-2-\frac{2}{e}$ المعادلة (1) تقبل حلا مضاعفا

3) $-2-\frac{2}{e}\prec m\prec -2$ المعادلة (1) تقبل حليّن ،4) $m\geq -2$ المعادلة (1) لا تقبل حلا واحدا

التمرين35:دورة 2011

1)تعيّين العددين a و b

المماس في النقطة $A(\frac{1}{2};1)$ لـ (C_f) موازيا لحامل محور الفواصل معناه $\begin{cases} f'(\frac{1}{2})=0 \\ f(\frac{1}{2})=-1 \end{cases}$

لدينا: $f(x)=\frac{a+b\ln(2x)}{4x^2}$ ومنه $f'(x)=\frac{\frac{b}{x}.4x^2-8x(a+b\ln(2x)}{(4x^2)^2}=\frac{b-2(a+b\ln(2x)}{4x^3}$

$f(\frac{1}{2})=-1$ معناه $f(\frac{1}{2})=\frac{a}{1}=1$ ومنه $a=1$

$f'(\frac{1}{2})=0$ معناه $b-2a=0$ ومنه : $b=2a$ أي $b=2$.

2-أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}g(x)$ وتفسير النتيجتين بيانيا

g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{1+2\ln(2x)}{4x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(2x)}{(2x)^2}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x)}{(2x)^2}=0$ نهاية شهيرة

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1+2\ln(2x)}{(2x)^2}=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}1+2\ln(2x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}4x^2=0^+$.

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g ،ثم تشكيل جدول تغيراتها.

حساب $g'(x)$ ودراسة إشارته

$g'(x)=\frac{\frac{2}{x}.4x^2-8x(1+2\ln(2x))}{(4x^2)^2}=\frac{8x(1-1-2\ln(2x))}{16x^4}=-\frac{-\ln(2x)}{x^3}$

إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(-\ln(2x))$

$g'(x)=0$ معناه $x=\frac{1}{2}$ ، $g'(x)<0$ معناه $x>\frac{1}{2}$ و $g'(x)>0$ معناه $x<\frac{1}{2}$

جدول تغيرات الدالة g يكون كمايلي:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	$f(\frac{1}{2})$	↘	0

ج) حل في $]0;+\infty[$ المعادلة : $g(x)=0$.

$g(x)=0$ معناه $(1+2\ln(2x))=0$

معناه $\ln(2x)=-\frac{1}{2}$ ومعناه $x=\frac{1}{2\sqrt{e}}$

من الجواب السابق نستنتج أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x=\frac{1}{2\sqrt{e}}$.

(C_f)

التمرين36:دورة 2010

أ) احساب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

لدينا:g دالة معرفة على $]1;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=2x+\ln x$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}2x+\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ نهاية شهيرة.

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g .

لدينا: $g'(x)=2+\frac{1}{x}$ ، نلاحظ أن $g'(x)\succ 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g يكون كمايلي:

x	1		$+\infty$
g'(x)		+	
g(x)	2	↗	$+\infty$

ج) تبيّان أنه من أجل كل $x \in [1;+\infty[$: $g(x) \neq 0$.

من جدول تغيرات g لدينا صورة المجال $[1;+\infty[$ بالدالة g هو المجال $[2;+\infty[$ أي $g(x) \geq 2$

ومنه من أجل كل $x \in [1;+\infty[$: $g(x) \neq 0$.

2-أ) تبيّان أن: $f(x) = \dfrac{\dfrac{6\ln x}{x}}{2+\dfrac{\ln x}{x}}$.

لدينا: $f(x) = \dfrac{\dfrac{6\ln x}{x}}{2+\dfrac{\ln x}{x}} = \dfrac{\dfrac{6\ln x}{x}}{\dfrac{2x+\ln x}{x}} = \dfrac{6\ln x}{x}.\dfrac{x}{2x+\ln x} = \dfrac{6\ln x}{2x+\ln x}$

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و الاستنتاج.**

باستعمال العبارة السابقة لـ $f(x)$ نجد: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{0}{2+0} = 0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ نهاية شهيرة

ج) دراسة اتجاه تغير الدالة f. ،وتشكيل جدول تغيرات f .

$$f'(x) = \frac{\frac{6}{x}(2x+\ln x)-(2+\frac{1}{x})(6\ln x)}{(2x+\ln x)^2} = \frac{12+\frac{6\ln x}{x}-\frac{12\ln x}{x}-\frac{6\ln x}{x}}{(2x+\ln x)^2} = \frac{12(1-\ln x)}{x(2+\ln x)^2}$$

من العبارة الأخيرة لـ $f'(x)$ نستنتج أن

اشارته هي حسب إشارة $1-\ln x$.

$f'(x) = 0$ معناه $x = e$ ، $f'(x) < 0$

معناه $x > e$ و $f'(x) > 0$ معناه $x < e$

x	1		e		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	0	↗	f(e)	↘	0

وعليه f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ وجدول تغيراتها هو كالآتي

د) تعيين قيمة k بحيث تقبل المعادلة $f(x) = k$ **حلين متمايزين**

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن: $f(e)$ ، $f(x)$ ، 0 أحاد في $x \in [1;+\infty[$

أي $0 \prec k \prec f(e)$ ومنه $k \in \left]0;\frac{6}{2e+1}\right]$ لاحظ: $f(e)=\frac{6}{2e+1}$.

هـ)ايجاد معادلة للمماس (Δ_1) لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 .

(Δ_1) له معادلة من الشكل : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=3(x-1)$ أي $y=3x-3$

3-أ) تشكل جدول تغيرات الدالة h.

لدينا: h دالة معرفة على $]-\infty;1]$ بـ: $h(x)=f(e^x)$

النهايات: $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} f(e^x)=0$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $h(1)=f(e)=\frac{6}{2e+1}$

اتجاه التغير: $h'(x)=e^x f'(e^x)=\frac{12(1-x)}{(2e^x+x)^2}$ واشارة $h'(x)$ من اشارة $(1-x)$ لأن $0 \prec 1-x$ على $]-\infty;1]$

ومنه الدالة h متناقصة تماما على $]-\infty;1]$

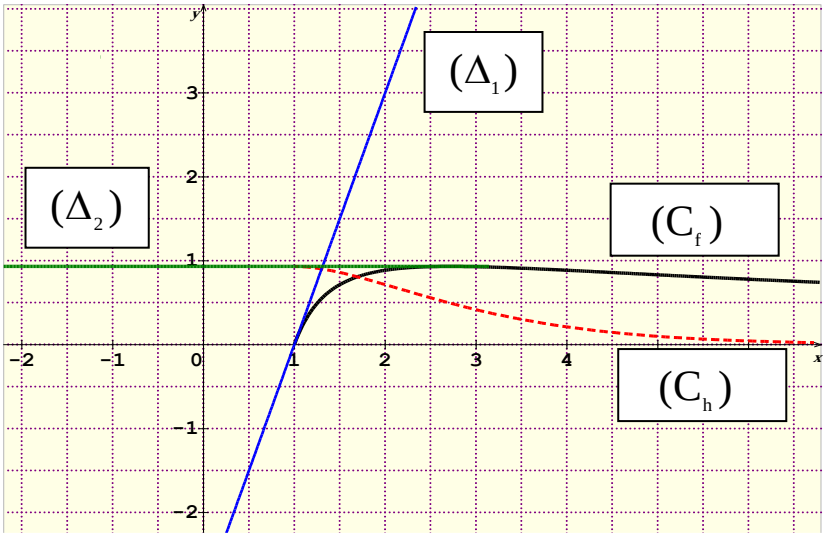
جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1
h'(x)	+	0	
h(x)	0	↘	h(1)

ب)ايجاد معادلة للمماس (Δ_2) لـ (C_h)

(Δ_2) له معادلة من الشكل : $y=h'(1)(x-1)+h(1)$ ومنه $y=0(x-1)+$ أي $y=\frac{6}{2e+1}$

ج) رسم كلا من (Δ_1)، (Δ_2)، (C_f) و (C_h) في المعلم السابق.



شعبة : الريـــــاضيات

التمرين37:دورة 2019

1)برهن أن:- إذا كان $x>1$ فإن: $1-x-2x\ln x<0$ و- إذا كان $0<x<1$ فإن: $1-x-2x\ln x>0$.

من أجل كل $x>1$ فإن $\ln x>0$ و منه $-2x\ln x<0$ و $1-x<0$ وعليه $1-x-2x\ln x<0$

من أجل كل $0<x<1$ فإن $\ln x<0$ و منه $-2x\ln x>0$ و $1-x>0$ وعليه $1-x-2x\ln x>0$

2-أ)أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0من اليمين .

لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(1-x\ln x)=1=f'_d(0)$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x\ln x=0$ ن. هـ

كتابة معادلة لنصف المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم.

معادلة معادلة المماس للمنحنى (C_f)في النقطة Oهي من الشكل: $y=f'_d(0)(x-0)+f(0)=x$

ب) دراسة الوضع النسبي للمماس (Δ) للمنحنى(C_f).

لدراسة الوضع النسبي ندرس اشارة الفرق $f(x)-x=-x^2\ln x$ و هي عكس اشارة $\ln x$ أي:

من أجل كل $0<x<1$ فإن $\ln x>0$ وعليه يكون (C_f) يقع فوق (Δ)

من أجل كل $x>1$ فإن $\ln x<0$ وعليه يكون (C_f) يقع تحت(Δ)

من أجل كل $x=1$ فإن $\ln x=0$ وعليه يكون (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي احداثييها$(1;1)$

من أجل كل $x=0$ فإن $x^2=0$ وعليه يكون (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي احداثييها$(0;0)$

جـ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-x\ln x)=-\infty$.

د) دراسة إتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ حيث: $f'(x)=1-2x\ln x-x$

حسب ما ورد في الجواب 1) نستنتج أن الدالة f:

من أجل كل $x>1$ فإن $1-x-2x\ln x<0$ وعليه تكون f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$

من أجل كل $0<x<1$ فإن $1-x-2x\ln x>0$ وعليه تكون f متزايدة تماما على المجال $]0;1[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

4-أ) كتابة معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) الموازي للمستقيم (Δ)

معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f)الموازي للمستقيم (Δ)من الشكل: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

حيث $f'(a)=1$ لان معامل توجيه (Δ) هو 1 حيث a فاصلة نقطة التماس .

$f'(a)=1$ معناه $a(-2\ln a-1)=0$ ومعناه $-2\ln a-1=0$ لأن $a=0$ مرفوض أي $a=\frac{1}{\sqrt{e}}$

وعليه: $y=f'(e^{-\frac{1}{2}})(x-e^{-\frac{1}{2}})+f(e^{-\frac{1}{2}})$ أي $y=x+\frac{1}{2e}$

ب)تبيّان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1;+\infty[$ حلا وحيدا α، ثم تحقق أن $1,76\prec\alpha\prec1,77$.

* الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $]1;+\infty[$ و $f(1)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ و $0\in]-\infty;1[$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha)=0$

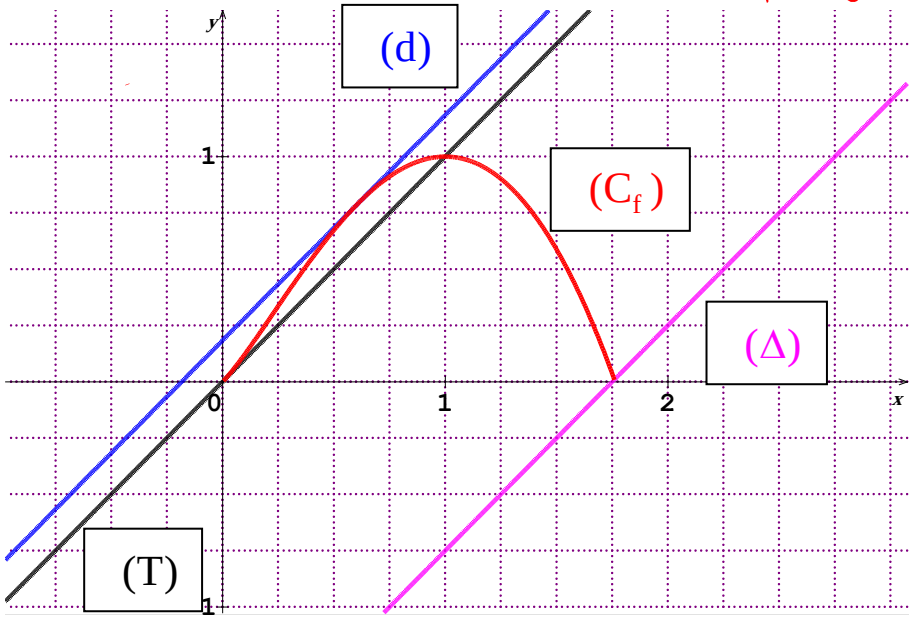
لدينا: $f(1,76).f(1,77)\prec0$ لأن : $f(1,76)=0,9$ و $f(1,77)=-0,01$ ومنه $1,76\prec\alpha\prec1,77$

ج)كتابة معادلة للمستقيم (d) الذي يوازي (Δ) ويشمل النقطة ذات الاحداثيين $(\alpha;0)$

المستقيم (d) الذي يوازي (Δ) ويشمل النقطة ذات الاحداثيين $(\alpha;0)$

له معادلة من الشكل: $y=1(x-\alpha)+f(\alpha)$ أي $y=x-\alpha$

رسم كلا من (T)، (d) و (Δ) ثم المنحنى (C_f).



5) تعيين عدد حلول المعادلة : $x^2\ln x+m=0$ في المجال $[0;\alpha]$

المعادلة $x^2\ln x+m=0$ تكافئ $x-x^2\ln x=x+m$ وتكافئ $f(x)=x+m$ تكافئ $\begin{cases}y=x+m\\y=f(x)\end{cases}$

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم الذي له معادلة من الشكل $y=x+m$ حيث $m\in[0;\alpha]$ من البيان نميز الحالات التالية:

1) $0\le m\le\alpha$ المعادلة تقبل حل واحد . 2) $0<m<\frac{1}{2e}$ المعادلة تقبل حلين موجبين

3) $m=\frac{1}{2e}$ المعادلة تقبل مضاعف موجب. 4) $m>\frac{1}{2e}$ المعادلة لا تقبل حلول

التمرين38:دورة 2018

1-أ) تبيّان أن f مستمرة عند 0 بقيم أكبر

f مستمرة عند 0 بقيم أكبر معناه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = f(0) = 1$

لدينا: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left[x+1-\frac{1}{\ln x}\right] = 1 - \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{1}{\ln x} = 1$ لأن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$

ب) حساب $\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ ، ثم تفسير النتيجة بيانيا.

$\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0}\frac{h+1-\frac{1}{\ln h}-1}{h} = -\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0}\frac{1}{\ln h} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0} \ln h = -\infty$

$\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$ معناه المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس يوازي محور الترتيب

2-أ) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}(x) - \lim\limits_{x \to +\infty}\frac{1}{\ln x} = +\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = 2 - \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1}\frac{1}{\ln x} = -\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \ln x = 0^+$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = 2 - \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1}\frac{1}{\ln x} = +\infty$ لأن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \ln x = 0^-$

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

الدالة f قابلة للاشتقاق على كلا من المجالين $]1;+\infty[$ و $]0;1[$ حيث: $f'(x) = 1 + \frac{1}{x(\ln x)}$

من هذه العبارة نستنتج أن f متزايدة تماما على مجالي تعريفها وجدول تغيرات f يكون كمايلي

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	+		+		
$f(x)$	1	↗	$+\infty$	↗	$+\infty$
			$-\infty$		

3) تبيّان أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائلا (Δ) و تعيين معادلة له

لدينا: $f(x) = x+1-\frac{1}{\ln x}$; ومنه: $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)-(x+1)] = -\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{1}{\ln x} = 0$

وعليه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مائل (Δ) له معادلة من الشكل: $y = x+1$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

لدراسة [illegible] (C) [illegible] (Δ) [illegible] $[f(x)-(x+1)]$.

إشارة الفرق $[f(x)-(x+1)]=\frac{-1}{\ln x}$ هي حسب إشارة $-\ln x$ حيث:

من أجل كل $x\in]0;1[$ يكون $-\ln x>0$ وعليه يكون (C_f) فوق (Δ)

من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ يكون $-\ln x<0$ وعليه يكون (C_f) تحت (Δ)

4)تبيان أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ω فاصلتها α حيث $1,49<\alpha<1,5$

لتبيان ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ω فاصلتها α نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $1,49<\alpha<1,5$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة

من جدول التغيرات الدالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

و لدينا $f(1,49).f(1,5)<0$ لأن $f(1,5)=0,03$ و $f(1,49)=-0,01$

وعليه وحسب باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $1,49<\alpha<1,5$ ومعناه المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ω فاصلتها α.

تبيّان أن معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ω هي من الشكل: $y=(\alpha+3+\frac{1}{\alpha})(x-\alpha)$

معادلة معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ω هي من الشكل:: $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$

ولدينا: $f(\alpha)=0$ و $f'(\alpha)=1+\frac{1}{\alpha(\ln\alpha)^2}=1+\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}=\alpha+3+\frac{1}{\alpha}$

وعليه المماس عند النقطة ω من الشكل: $y=(\alpha+3+\frac{1}{\alpha})(x-\alpha)$

5) رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) في أخر الحل

6- أ)تبيّان أن الدالة h متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ واشارة $h(x)$.

h الدالة العددية والمعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كمايلي: $h(x)=1-x+x\ln x$.

*من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$: $h'(x)=-1+\ln x+x.\frac{1}{x}=\ln x$

$h'(x)\geq 0$ من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$ وعليه الدالة h متزايدة تماما على $]1;+\infty[$.

**1) الدالة h متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{1}{x}-1+\ln x)=+\infty$ و $h(1)=0$

من 1) و 2) نستنتج أن $h(x)\geq 0$ من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$

ب) تبيّان أنه من أجل كل $x>1$: $f(x)-x+\frac{1}{x\ln x}=\frac{h(x)}{x\ln x}$

لدينا: من أجل كل $x>1$: $f(x)-x+\frac{1}{x\ln x}=1-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{x\ln x}=\frac{x\ln x-x+1}{x\ln x}=\frac{h(x)}{x\ln x}$

استنتاج أنه من أجل كل $x>1 : x+1<f(x)<x-\frac{1}{x\ln x}$.

من أجل كل $x>1 : x+1<f(x)<x-\frac{1}{x\ln x}$ **تكافئ** $f(x)<x+1$ **و** $f(x)>x-\frac{1}{x\ln x}$

لدينا: $f(x)-(x+1)=-\frac{1}{\ln x}<0$ **من أجل كل** $x>1$ **وعليه** $f(x)<x+1$

$f(x)-x+\frac{1}{x\ln x}=\frac{h(x)}{x\ln x}>0$ **من أجل كل** $x>1$ **وعليه** $f(x)>x-\frac{1}{x\ln x}$

7) تبيّان أن : $\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)-\ln(\alpha+1)<A<\frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)$

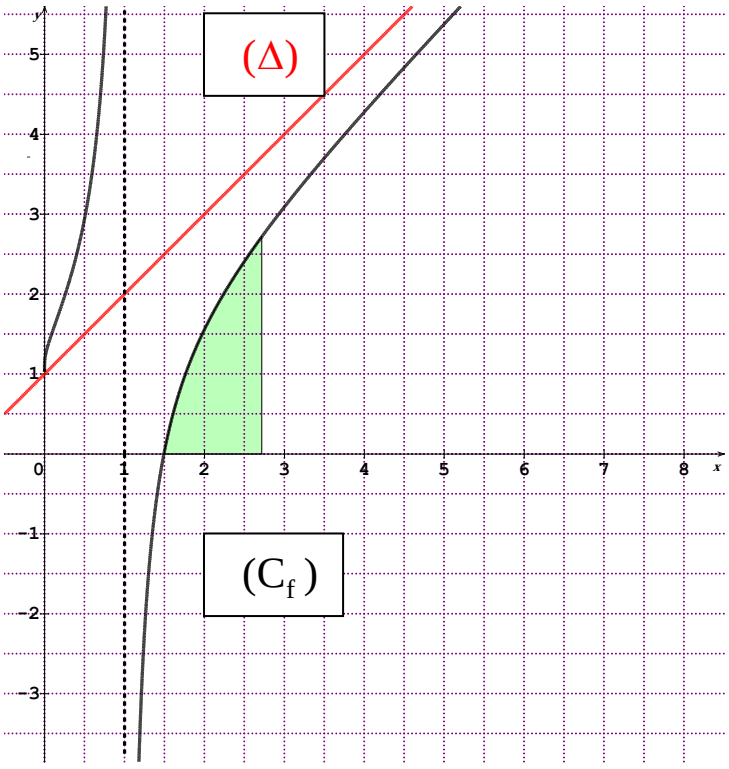
لدينا من أجل كل $x>1 : x+1<f(x)<x-\frac{1}{x\ln x}$ **حسب الجواب السابق**

وعليه: $\int_\alpha^e (x-\frac{1}{x\ln x})dx<\int_\alpha^e f(x)dx<\int_\alpha^e (x+1)dx$ **حسب خواص التكامل**

$$\int_\alpha^e (x-\frac{1}{x\ln x})dx=\int_\alpha^e (x-\frac{\frac{1}{x}}{\ln x})dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln(\ln x)\right]_\alpha^e=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\alpha^2+\ln(\ln\alpha)=\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)-\ln(\alpha+1)$$

$$\int_\alpha^e (x+1)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_\alpha^e=\frac{1}{2}e^2+e-\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha=\frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)$$

نستنتج مما سبق أن: $\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)-\ln(\alpha+1)<A<\frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)$



التمرين39:دورة 2017

I-1) أدرس إتجاه تغير الدالة g.

لدينا: $g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$ ونلاحظ أن $g'(x)\prec 0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$

وعليه تكون الدالة g متناقصة على المجال $]0;+\infty[$.

2 -أ) تبيّان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من $]1,76;1,77[$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]0;+\infty[$ و $g(1,76)=+0,0029$ و $g(1,77)=-0,006$

وعليه توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$ حيث $1,76\prec\alpha\prec 1,77$.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)\succ 0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)\prec 0$

II-1)اثبات أن الدالة f مستمرة عند العدد 0 من اليمين.

لدينا الدالة العددية f معرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{x-\ln x};x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

f مستمرة عند العدد 0 من اليمين معناه $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} f(x)=f(0)=0$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{x+1}{x-\ln x}=-\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{1}{\ln x}=0$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\ln x=-\infty$

حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{f(x)}{x}$ و تفسير النتيجة بيانيا

لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{x+1}{x^2-x\ln x}=1$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} x\ln x=0$ نهاية شهيرة.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{f(x)}{x}$ تكافئ $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1=f'(0)$

أي أن f قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين وأن (C_f) يقبل نصف مماسا ميله 1 عند المبدأ O.

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$.

لدينا : $f(x)=\frac{x+1}{x-\ln x}$ ومنه $f'(x)=\frac{(x-\ln x)-(1-\frac{1}{x})(x+1)}{x(x-\ln x)^2}=\frac{-\ln x+\frac{1}{x}}{(x-\ln x)^2}=\frac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$

3) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وتفسير ذلك بيانيا .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{\ln x}{x})}=1$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

مماسبق نستنتج أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ وعليه جدول تغيرات f يكون كمايلي

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	1

4)أ-تبيان أن: من أجل كل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $h(x)\succ 0$

h الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $h(x)=x-\ln x$.

من أجل كل عدد حقيقي $]0;+\infty[$ $h'(x)=\dfrac{x-1}{x}: x\in]0;+\infty[$

$h'(x)=0$ معناه $x=1$ ولدينا $h'(x)\prec 0$ معناه $x\in]0;1[$ و $h'(x)\succ 0$ معناه $x\in]1;+\infty[$

لدينا: $h(1)=1$ أي أنه من أجل كل $]0;+\infty[$ $h(x)\geq 1: x\in]0;+\infty[$ وعليه $h(x)\succ 0$

استنتاج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=1$.

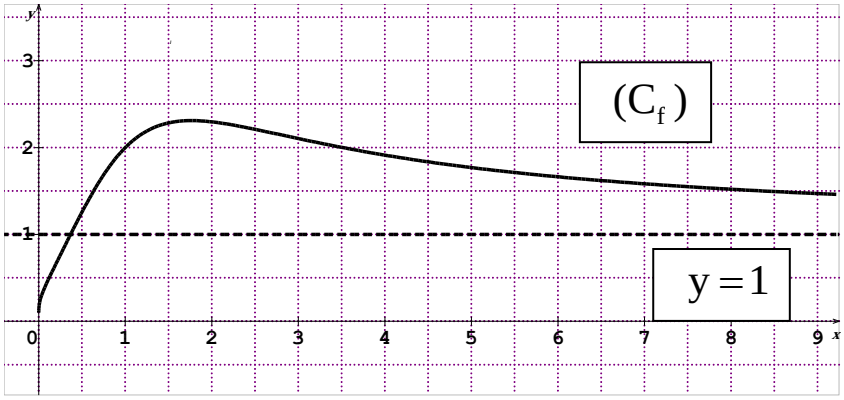
لتحديد وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=1$ ندرس اشارة الفرق: $f(x)-1$

لدينا: $f(x)-1=\dfrac{x+1}{x-\ln x}-1=\dfrac{1+\ln x}{x-\ln x}=\dfrac{1+\ln x}{h(x)}$

إشارة الفرق هي حسب إشارة البسط $1+\ln x$ لأن $h(x)\succ 0$ وهي حسب الجدول التالي

x	0		e^{-1}		$+\infty$
اشارة$(1+\ln x)$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية	‖	(C_f) تحت (T)	(T) يقطع (C_f)	(T) فوق (C_f)	

ب)رسم المنحنى (C_f) .



التمرين40:دورة 2017 الإستدراكية

I)دراسة إتجاه تغير الدالة g ثم استنتاج إشارة $g(x)$.

لدينا: الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=x+2-\ln x$

*حساب $g'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ واشارته هي حسب إشارة $x-1$

$g'(x)=0$ من أجل $x=1$

و $g'(x)\prec 0$ من أجل $x\in]0;1[$ وتكون الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;1[$.

$g'(x)\succ 0$ من أجل $x\in]1;+\infty[$ وتكون الدالة g متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

*لدينا: $g(1)=3$ ومنه نستنتج انه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ يكون لدينا: $g(x)\geq 3$

وعليه اشارة $g(x)$ تكون موجبة تماما من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

II- 1)تبيان أن: من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x)=\frac{-g(x^2)}{2x^2}$

الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x)=\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)$

لدينا : $f'(x)=\frac{1}{2}(-1-\frac{\frac{2x}{x}-1\ln(x^2)}{x^2})=-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2+2-\ln(x^2)}{x^2}\right]=\frac{-g(x^2)}{2x^2}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f.

من العبارة $f'(x)=\frac{-g(x^2)}{2x^2}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $-g(x^2)$ وهي كما يلي

$-g(x^2)\prec 0$ لأن $g(x^2)\succ 0$ انظر إشارة $g(x)$ في الجواب السابق

وعليه تكون الدالة f متناقصة تماما على مجالي تعريفها.

2-أ) حساب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x)+f(x)$ ثم تفسير النتيجة بيانيا

لدينا: $f(-x)+f(x)=\frac{1}{2}\left[\left(x+e+\frac{\ln(x^2)}{x}\right)+\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)\right]=e$

من العبارة $f(-x)+f(x)=e$ والتي تكافئ $f(2(0)-x)+f(x)=2(\frac{1}{2}e)$

نستنتج ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف إحداثيها $(0;\frac{1}{2}e)$

ب) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتاج $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+e)=-\infty$

لدينا: $f(-x)+f(x)=e$ وعليه $f(x)=e-f(-x)$

ومنه: $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=e-\lim\limits_{x\to-\infty}f(-x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=e-\lim\limits_{x\to 0^-}f(-x)=+\infty$

ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖	↘	$-\infty$

3) تبيّان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}$ مقارب لـ (C_f).

المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}$ مقارب مائل لـ معناه $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2})\right]=0$

لدينا $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2})\right]=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=0$ لان $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=0$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=-\frac{1}{2}\frac{\ln(x^2)}{x}$

$-\frac{\ln(x^2)}{x}=0$ معناه $x^2=1$ أي $x\in\{1;-1\}$ وعليه (C_f) يقطع (Δ) في نقطتين فاصلتاهما 1 و -1

الجدول التالي يلخص اشارة الفرق

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-\ln(x^2)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
x		$-$			‖		$+$		
اشارة الفرق	$+$		0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

$-\frac{\ln(x^2)}{x}\prec 0$ معناه $x\in]-1;0[\cup]1;+\infty[$ وعليه يكون (C_f) تحت (Δ) في هذا المجال

$-\frac{\ln(x^2)}{x}\succ 0$ معناه $x\in]-\infty;-1[\cup]0;1[$ وعليه يكون (C_f) فوق (Δ) في هذا المجال

4-أ) اثبات أنه يوجد مماسان لـ (C_f) معامل توجيه كل منهما $-\frac{1}{2}$ ثم جد معادلة لكل منهما.

نبين أن المعادلة $f'(x_0)=-\frac{1}{2}$ تقبل حلّين متمايزين

$f'(x_0)=-\frac{1}{2}$ تكافئ $\frac{-g(x^2)}{2x^2}=-\frac{1}{2}$ تكافئ $g(x_0^2)=x_0^2$ أي $\ln x_0^2=2$ أي $x_0=e$ أو $x_0=-e$

إيجاد معادلتي المماسين

أولا: معادلة المماس (T_1) عند النقطة ذات الفاصلة e

المماس (T_1) له معادلة من الشكل : $(T_1):y=-\frac{1}{2}(x-e)+f(e)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}e-\frac{1}{e}$

ثانيا: معادلة المماس (T_2) عند النقطة ذات الفاصلة -e

المماس (T_2) له معادلة من الشكل : $(T_2):y=-\frac{1}{2}(x+e)+f(e)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}e+\frac{1}{e}$

ب)تبيّان أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β

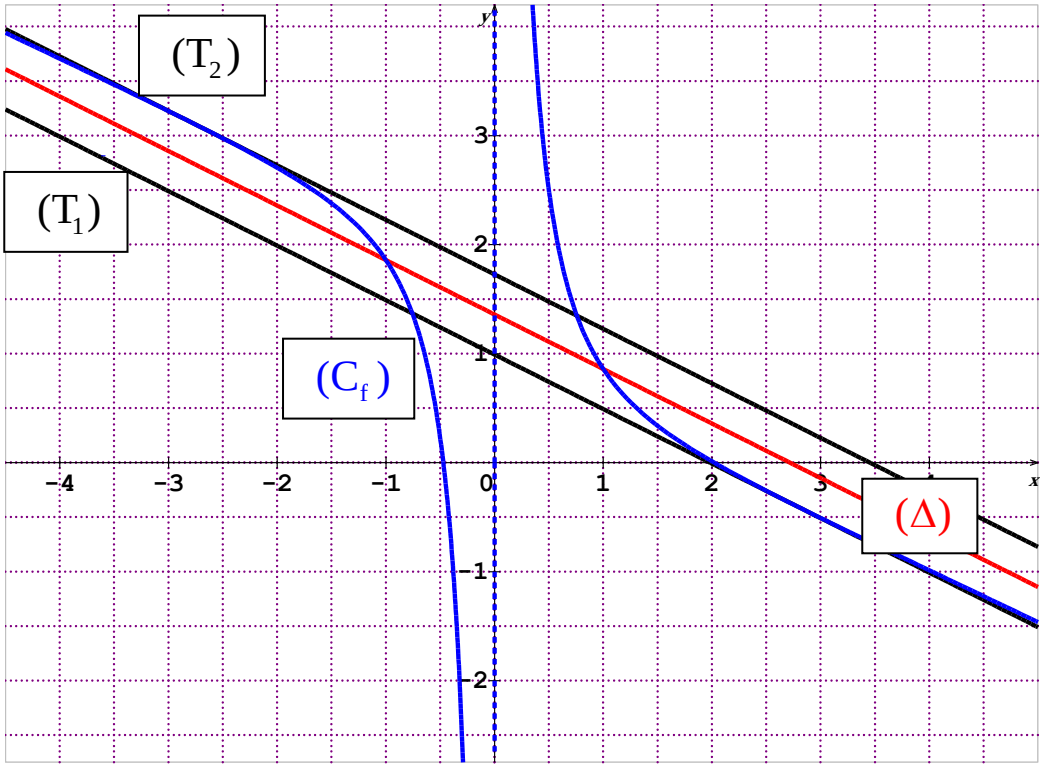
*الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty;0[$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\prec}0}f(x)=-\infty$

ولدينا: $f(-0,4)\times f(-0,5)\prec 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة β تحقق: $f(\beta)=0$ حيث $-0,5\prec\beta\prec-0,4$.

* الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $]0;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

ولدينا: $f(2)\times f(2,1)\prec 0$ وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α تحقق: $f(\alpha)=0$ حيث $2\prec\alpha\prec 2,1$.

5) رسم المماسين و المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).



6) تبيان حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $x(e-2m)=\ln(x^2)$

لدينا: $x(e-2m)=\ln(x^2)$ تكافئ $m=\frac{1}{2}(e-\frac{\ln(x^2)}{x})$ وتكافئ $-\frac{1}{2}x+m=f(x)$

المعادلة $-\frac{1}{2}x+m=f(x)$ هندسيا تكافئ الجملة التالية: $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+m....(1) \\ y=f(x).....(2) \end{cases}$

حلول الجملة السابقة هندسيا هي فواصل نقط تقاطع المستقيم (Δ_m) التي لها معادلة من الشكل $y=-\frac{1}{2}x+m$ والمنحنى (C_f).

من البيان نجد: $m\succ\frac{1}{2}e+\frac{1}{e}$ أو $m\prec\frac{1}{2}e-\frac{1}{e}$

التمرين41:دورة 2016

I-1) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال

حساب $g'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $g'(x)=(1+x^2)'+(2\ln x)'=2x+\frac{2}{x}$

نستنتج أن: $g'(x)\succ 0$ لان: $x\succ 0$ وعليه g تكون متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2)تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,52\prec\alpha\prec 0,53$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و: $g(0,52)=-0.037$ و $g(0,53)=0.011$

وعليه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة α تحقق: $g(\alpha)=0$

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

من الجواب السابق نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in]0;\alpha[$ فإن: $g(x)\prec 0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x)\succ 0$

II-1) حساب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا: الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+\frac{3+2\ln x}{x}$

ومنه: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+} 2\ln(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ نهاية شهيرة و $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

2-أ) تبيان أنه من أجل كل من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$

لدينا: $f'(x)=(-x)'+(\frac{3+2\ln x}{x})'=-1+\frac{\frac{2}{x}.x-1(3+2\ln x)}{x^2}=\frac{-x^2-1-2\ln x)}{x^2}=-\frac{g(x)}{x^2}$

ب)تشكيل جدول تغيراتها

لدينا: $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$ ومنه اشارة $f'(x)$ من نفس اشارة $-g(x)$ وعليه جدول تغيرات f هو

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

ب) تبيان أن $f(\alpha)=2(\frac{1}{\alpha}-\alpha)$ وإعطاء حصرا لـ $f(\alpha)$

*لدينا: $f(\alpha)=-\alpha+\frac{3+2\ln(\alpha)}{\alpha}$ ولدينا أيضا: $g(\alpha)=0$ ومعناه $2\ln(\alpha)=-1-\alpha^2$

ومنه: $f(\alpha)=-\alpha+\frac{3-1-\alpha^2}{\alpha}=-\alpha+\frac{2}{\alpha}-\alpha=2(\frac{1}{\alpha}-\alpha)$

*الحصر لدينا: $0,52\prec\alpha\prec0,53...(1)$ تكافئ $1.88\prec\frac{1}{\alpha}\prec1.92.....(2)$

بطرح (1) من (2) نجد: $1,39\prec\frac{1}{\alpha}-\alpha\prec1,40....(3)$ وتكافئ $2,71\prec f(\alpha)\prec2,80....(3)$

3-أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ وتفسير النتيجة بيانيا.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{x}+2\frac{\ln x}{x}\right]=0$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ نهاية شهيرة و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x)]=0$ ومعناه المستقيم $y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ب)دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب المائل $(\Delta):y=-x$

لدراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) ندرس اشارة الفرق $f(x)-(-x)=\frac{3+2\ln x}{x}$

$f(x)-(-x)=0$ معناه $3+2\ln x=0$ ومعناه $x_0=\frac{1}{e\sqrt{e}}$

اشارة الفرق هي حسب إشارة $3+2\ln x$ والموضحة في الجدول التالي

x	0	x_0	$+\infty$
اشارة الفرق	‖	− 0 +	
الوضعية	‖ (C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)
	‖	(C_f) يقطع (Δ)	

ج)تبيان وجود مماس (T) لـ (C_f) يوازي (Δ) وتعيين معادلة له

(T) يوازي (Δ) معناه (T) و (Δ) لهما نفس الميل ومعناه $f'(a)=-1$

$f'(a)=-1$ معناه $-\frac{g(a)}{a^2}=-1$ ومعناه $g(a)=a^2$ ومنه : $a=\frac{1}{\sqrt{e}}$

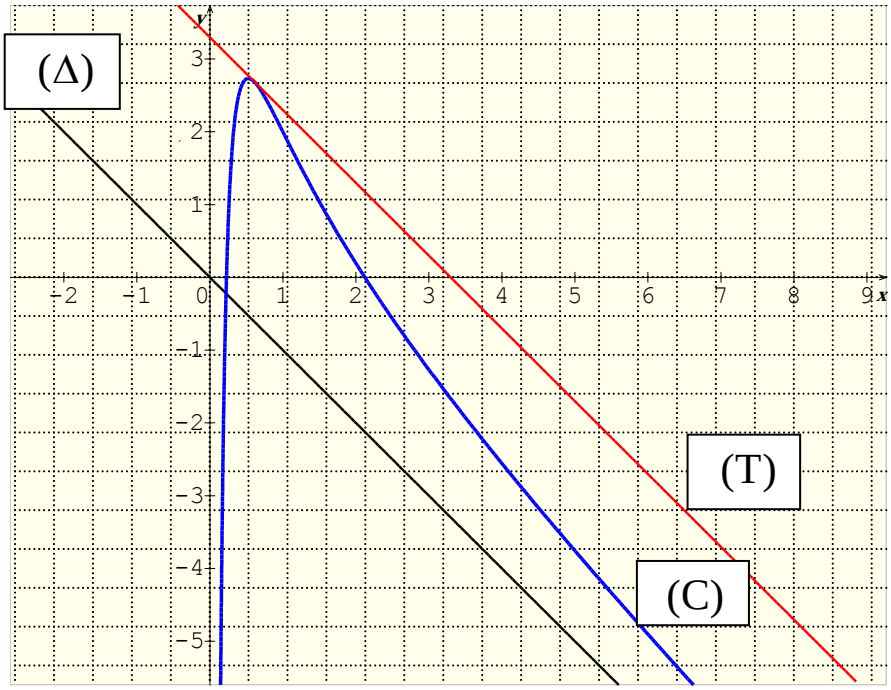
(T) ذوا المعادلة: $y=-1(x-\frac{1}{\sqrt{e}})+f(\frac{1}{\sqrt{e}})$ وعليه: $y=-x+2\sqrt{e}$ حيث $f(\frac{1}{\sqrt{e}})=-\frac{1}{\sqrt{e}}+2\sqrt{e}$

4)تبيان أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_0 و x_1

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha[$ ولدينا: $f(0,22)\times f(0,23)\prec 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد x_0 محصور بين $0,22$ و $0,23$ يحقق $f(x_0)=0$

الدالة f متناقصة على $]\alpha;+\infty[$ ولدينا $f(2,11)\times f(2,13)\prec 0$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد x_1 محصور بين $2,11$ و $2,11$ يحقق: $f(x_1)=0$

انشاء (Δ) و (T) و (C_f)



5)المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $3+2\ln x-mx=0$.

نضع: $3+2\ln x-mx=0...(1)$

لدينا (1) تكافئ $m=\frac{3+2\ln x}{x}$ وتكافئ $-x+m=f(x)$ وتكافئ $\begin{cases}y=-x+m\\y=f(x)\end{cases}$

حلول المعادلة (1)هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y=-x+m$

من البيان نميز الحالات التالية :

1) $m\le 0$ المعادلة(1)تقبل حلا وحيدا 2) $0\le m\le 2\sqrt{e}$ المعادلة(1) تقبل حلان.

3) $m=2\sqrt{e}$ المعادلة(1) تقبل حلا مضاعفا 4) $m\succ 2\sqrt{e}$ المعادلة(1) لا تقبل حلول

التمرين42:دورة 2015

I- 1) دراسة استمرارية الدالة f عند0 من اليمين.

لدينا: $f(x)=1-x^2\ln(x)$ و المعرفة على $]0;+\infty[$ و $f(0)=1$

f مستمرة عند 0 من اليمين معناه $\lim\limits_{x\succ 0} f(x)=f(0)=1$

لدينا: $\lim\limits_{x\succ 0} f(x)=\lim\limits_{x\succ 0}(1-x^2\ln x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\succ 0} x^2\ln x=0$ نهاية شهيرة.

ومنه الدالة f مستمرة عند 0 من اليمين.

2)حساب $\lim\limits_{x\succ 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ وتفسير النتيجة هندسيا.

لدينا: $\lim\limits_{x\succ 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\succ 0}\dfrac{-x^2\ln x}{x}=-\lim\limits_{x\succ 0} x\ln x=0$

$\lim\limits_{x\succ 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$ معناه $\lim\limits_{x\succ 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$

ومنه f قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين أي (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة التي فاصلتها 0.

2) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^2\ln x)=-\infty$

2)دراسة اتجاه تغير f وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا: $f(x)=1-x^2\ln(x)$ و المعرفة على $]0;+\infty[$

ومنه: $f'(x)=-2x\ln-x^2.\dfrac{1}{x}=-x(1+2\ln x)$

$f'(x)=0$ معناه $-x(1+2\ln x)=0$ معناه $x_1=0$ أو $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

$f'(x)\prec 0$ معناه $-x(1+2\ln x)\prec 0$ معناه $x\in\left]\dfrac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right[$

$f'(x)\succ 0$ معناه $-x(1+2\ln x)\succ 0$ معناه $x\in\left]0;\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$

وعليه جدول تغيرات الدالة f كمايلي:

x	0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$f(x_2)$	↘	$-\infty$

3-أ)تبيان ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$.

f مستمرة و متناقصة على المجال $]x_2;+\infty[$ $f(x_2)=1,183$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث:

يحقق $f(\alpha)=0$ أي α حلا وحيد للمعادلة $f(x)=0$.

ب) التحقق أن $1,531 \prec \alpha \prec 1,532$.

$f(1,531)=0,00012$ و $f(1,532)=$ ومنه $1,531 \prec \alpha \prec 1,532$.

4)أ) دراسة شفعية الدالة g

لدينا g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=f(|x|)$

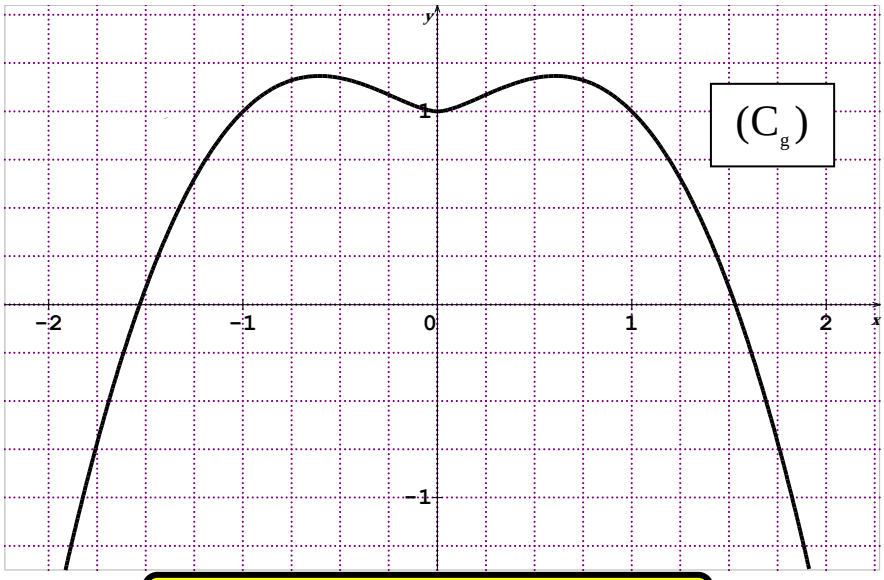
من اجل كل $x\in\mathbb{R}$ و $-x\in\mathbb{R}$: $g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$

ومنه نقول أن الدالة g زوجية.

ب)إنشاء المنحنى (C_g) على المجال $[-2;+2]$

من أجل كل $x\in]0;+2[$ فإن $g(x)=f(x)$ أي $(C_g)=(C_f)$

من أجل كل $x\in[-2;0[$ فإن $g(x)=f(-x)$ أي (C_g)نظير (C_f)**بالنسبة لحامل محور الفواصل**



التمرين43:دورة 2014

1- أ) دراسة تغيرات الدالة f.

f الدالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)$.

النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(\ln x)=-\infty$

اتجاه التغير وجدول تغيرات f:

لدينا: $f'(x)=(\frac{2}{x})(-1+\ln x)+(\frac{1}{x})(1+2\ln x)=\frac{1}{x}(-1+4\ln x)$

x	0	$e^{\frac{1}{4}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{9}{4}$	↗ $+\infty$

اشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $-1+4\ln x$

ومنه: $f'(x)=0$ معناه $x=e^{\frac{1}{4}}$

$f'(x)\succ 0$ معناه $x\succ e^{\frac{1}{4}}$

و $f'(x)\prec 0$ معناه $0\prec x\prec e^{\frac{1}{4}}$

ب) كتابة معادلة المماس (Δ)

(T) له معادلة من الشكل: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ أي $y=f'(e)(x-e)+f(e)$

ومنه: $y=\frac{3}{e}(x-e)+0$ وعليه: $y=\frac{3}{e}x-\frac{3}{e}$

جـ) تعيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

لتعيين نقط تقاطع (C_f) نحل المعادلة $f(x)=0$

$f(x)=0$ معناه $(1+2\ln x)(-1+\ln x)=0$ ومعناه $(1+2\ln x)=0$ أو $(-1+\ln x)=0$

لدينا: $(1+2\ln x)=0$ معناه $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ و $(-1+\ln x)=0$ معناه $x=e$

ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين اللتين احداثياهما: $(e;0)$ و $(\frac{1}{\sqrt{e}};0)$.

2-أ) دراسة تغيرات الدالة g.

g الدالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-\ln x$

النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\ln x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}(1-\ln x)=+\infty$

اتجاه التغير وجدول تغيرات f:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

لدينا: $g'(x)=-\frac{1}{x}$ ونلاحظ ان $g'(x)\prec 0$

وعليه جدول تغيرات g يكون كمايلي:

ب)تعيين الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g) ثم رسم كلا من (C_f) و (C_g) على المجال $]0;e^2]$.

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g) ندرس إشارة الفرق: $f(x)-g(x)$

لدينا: $f(x)-g(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)-(1-\ln x)=-2(1+\ln x)(1-\ln x)$

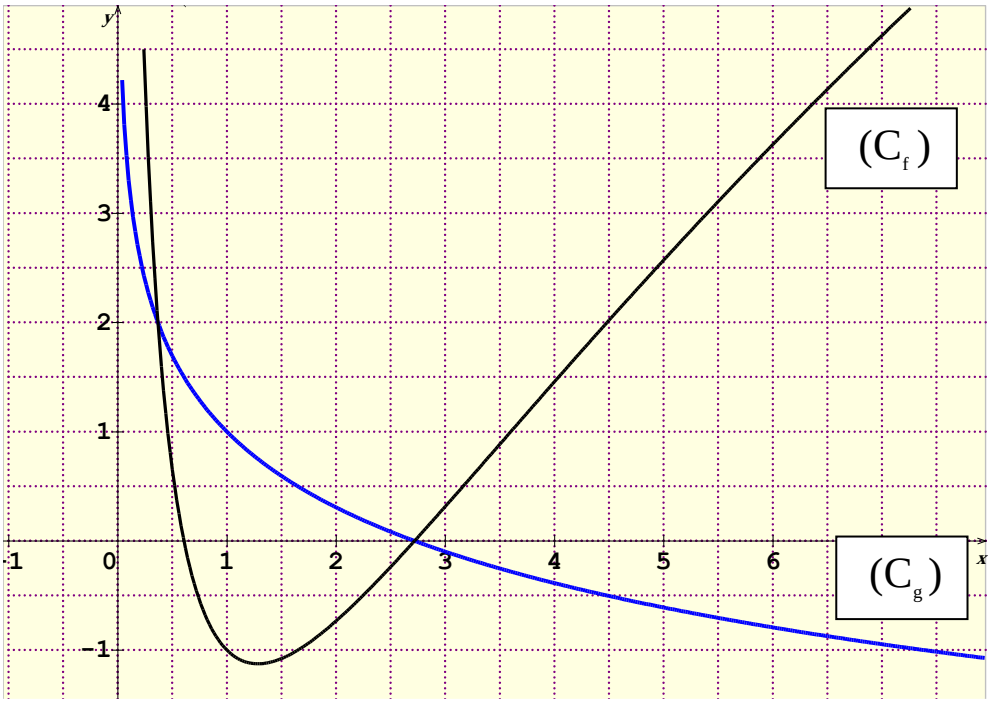
ومنه: $f(x)-g(x)=0$ معناه $(1+\ln x)(1-\ln x)=0$ ومعناه $x=e$ أو $x=\frac{1}{e}$

والجدول التالي يوضع الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g).

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$(1+\ln x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$(1-\ln x)$	‖	$-$		$-$		$+$	
اشارة الفرق	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية	‖ (C_f) فوق (C_g).			(C_f) تحت (C_g).		(C_f) فوق (C_g).	

نلاحظ أن: (C_f) و (C_g) يتقاطعان في النقطتين اللتين فاصلتاهما $x=e$ أو $x=\frac{1}{e}$

رسم كلا من (C_f) و (C_g) على المجال $]0;e^2]$.



التمرين44:دورة 2013

I-1- أ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة u .

الدالة u معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $u(x)=e^x-3x+4-e$

لدينا: $u'(x)=e^x-3$

$u'(x)=0$ ومعناه $e^x=\ln 3$ ، $u'(x)\succ 0$ ومعناه $x\succ \ln 3$ و $u'(x)\prec 0$ ومعناه $0\prec x\prec \ln 3$

ومنه: الدالة u متزايدة تماما على المجال $]\ln 3;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0;\ln 3[$

ب-تبيّان أنه ، من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $e^x-e\succ 3x-4$

من الجواب السابق الدالة u تقبل قيمة حدّية محلية صغرى موجبة هي $u(\ln 3)=7-3\ln 3-e$

أي من أجل كل $]0;+\infty[$ $u(x)\succ 0$ أي $e^x-3x+4-e\succ 0$ ومنه $e^x-e\succ 3x-4$.

2- أ-تبيّان أن: $v'(1)=0$

الدالة v معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$

لدينا: $v'(x)=-9x^2+8x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-9x^3+8x^2+1}{x}$ ومنه $v'(1)=0$

ب-اثبات أنه ،من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $v(x)\le 0$

لدينا: اشارة $v'(x)$ هي حسب اشارة $-9x^3+8x^2+1=-(x-1)(9x^2+8x+1)$ لأن $v'(1)=0$

ومنه:اشارة $v'(x)$ هي حسب اشارة $-(x-1)$ لأن $(9x^2+8x+1)\succ 0$ من أجل $x\in]0;+\infty[$

وعليه: $v'(x)\succ 0$ معناه $x\prec 1$ و $v'(x)\prec 0$ معناه $x\succ 1$

ومنه: الدالة v تقبل قيمة حدية محلية كبرى هي : $v(1)=0$ أي $v(x)\le 0$

جـ-اثبات أنه ،من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $\dfrac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$

من الجواب I-ب-2) لدينا: $v(x)\le 0$ أي: $-3x^3+4x^2-1+\ln x\le 0$ أي $\dfrac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$

3-اثبات أنه ،من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $e^x-e+\dfrac{1-\ln x}{x^2}\ge 0$

لدينا: $e^x-e\succ 3x-4...(1)$ ولدينا: $\dfrac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$ أي $\dfrac{1-\ln x}{x^2}\ge -3x+4...(2)$

بجمع (1) و (2) طرف لطرف نجد: $e^x - e + \frac{1-\ln x}{x^2} \geq 0$.

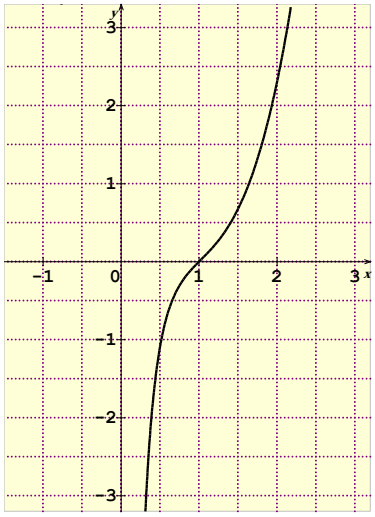
II-1- حساب $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^x - ex + \frac{\ln x}{x} = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1$ و $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x - ex + \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - e + \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

2-تبيّان أن f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وتشكّيل جدول تغيراتها



لدينا: $f'(x) = e^x - e + \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = e^x - e + \frac{1-\ln x}{x^2}$

نستنتج أن $f'(x) \geq 0$ حسب نتيجة الجواب I-3).

3-حساب $f(1)$، ثم تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $]0;2,5[$

$f(1) = 0$ أي (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $A(1;0)$

التمرين45: دورة 2012

I-1) دراسة تغيرات الدالة g ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

g دالة معرفة على $]-1;3]$ بـ: $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$

التهايات: $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{2(x+1)\ln(x+1) - x}{(x+1)} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{-x}{x+1} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -1^+} (x+1)\ln(x+1) = 0$

اتجاه التغير:

$g'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$

$g'(x) = 0$ معناه $2x+1=0$ أي $x = -\frac{1}{2}$

واشارة $g'(x)$ هي حسب اشارة $2x+1$

وعليه جدول تغيرات g يكون كمايلي:

x	-1		$-\frac{1}{2}$		3
$g'(x)$		−	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(-\frac{1}{2})$	↗	$g(3)$

2) تبيّان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبلا حلين احدهما معدوم والآخر α يحقق: $-0,8 \prec \alpha \prec -0,7$.

*الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ و: $g(-0,8)\times g(-0,7)\prec 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة α حيث $-0,8 \prec \alpha \prec -0,7$ تحقق: $g(\alpha)=0$

*المعادلة $g(x)=0$ تقبلا حل معدوم لأن $g(0)=0$

3)تعيّن ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

من الجواب السابق وجدول التغيرات نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي:

من أجل كل $x\in]-1;\alpha[\cup]0;3[$ فإن: $g(x)\succ 0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;0[$ فإن: $g(x)\succ 0$

4) أ) حساب $h'(x)$ بدلالة كلا من $g(x)$ و $g'(x)$.

h دالة عددية معرفة على $[-1;3]$ بـ: $h(x)=[g(x)]^2$

لحساب $h'(x)$ نستعمل مشتق دالة مركبة لأن الدالة h هي تركيب الدالة g متبوعة بالدالة مربع

ومنه: $h'(x)=2g(x).g'(x)$.

ب)تعيّن إشارة $h'(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة h .

من العبارة $h'(x)=2g(x).g'(x)$ نستنتج أن اشارة $h'(x)$ هي نفس اشارة الجداء $g(x).g'(x)$ والموضحة في الجدول المقابل

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
g(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
g'(x)		−	‖	−	0	+	‖	+	
h'(x)		−	0	+	0	−	0	+	

لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-1} h(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}-1}[g(x)]^2=+\infty$

وعليه جدول تغيرات الدالة h يكون كمايلي

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
h'(x)		−	0	+	0	−	0	+	
h(x)	$+\infty$	↘	$h(\alpha)$	↗	$h(-\frac{1}{2})$	↘	$h(0)$	↗	$h(3)$

II-1)تبيّان أن f تقبل الاشتقاق عند 0ثم أكتب معادلة لـ(T) مماس (C_f)في النقطة ذات الفاصلة 0

f دالة عددية معرفة على$]-1;3[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(x+1)} \;;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

*الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0معناه $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=L$ حيث L عدد حقيقي ثابت

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x}{\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=1$ لأن $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ نهاية شهيرة

* معادلة لـ(T) مماس (C_f)في النقطة ذات الفاصلة 0 من الشكل: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

ولدينا: $f'(0)=1$ من الجواب السابق ، $f(0)=0$ ومنه(T) له معادلة من الشكل: $y=x$

2)أ-تبيّان أنه من أجل كل $x\in]-1;0[\cup]0;3]$ ، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$.و استنتاج أتجاه تغير f

لدينا: $f'(x)=\dfrac{2x.\ln(x+1)-\frac{x^2}{x+1}}{[\ln(x+1)]^2}=\dfrac{x(2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1})}{[\ln(x+1)]^2}=\dfrac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$

من العبارة $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$هي من اشارة $xg(x)$

والموضحة في الجدول المقابل

x	-1		α		0		3
g(x)	+	0		−		+	
x	−	0		−		+	
f '(x)	-	0	+		+		

ومنه f متناقصة على المجال $]-1;\alpha]$

ومتزايدة على المجال $[\alpha;3]$

ب- تبيّان أن: $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$،ثم تعين حصرا لـ $f(\alpha)$

*لدينا: $g(\alpha)=0$ أي $\ln(\alpha+1)=\dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}$ ومنه $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{\ln(\alpha+1)}=\dfrac{2\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha}=2\alpha(\alpha+1)$

*لدينا: $-0,8\prec\alpha\prec-0,7$ ومنه: $0,2\prec\alpha+1\prec 0,3$

وعليه: $0,2\times0,7\prec-\alpha(\alpha+1)\prec0,3\times0,8$

وأخيرا $-2.0,3\times0,8\prec2\alpha(\alpha+1)\prec-2.0,2\times0,7$ أي $-0,48\prec f(\alpha)\prec-0,28$

جـ-حساب $f(3)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات f

لدينا: $f(3)=\dfrac{9}{\ln 4}$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}=0$ لأن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\ln(x+1)=-\infty$

جدول تغيرات f يكون كمايلي:

x	-1		α		0		3
$f'(x)$	‖	−	0	+	0	+	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	0	↗	$f(3)$

3)أ-تبيّان أنه من أجل كل $x\in]-1;3]$ فإن: $x-\ln(x+1)\geq0$.

نضع: $h(x)=x-\ln(x+1)$ من أجل كل $x\in]-1;3]$ ونبيّن أن: $h(x)\geq0$

لدينا: $h'(x)=\dfrac{x}{x+1}$ واشارته هي حسب إشارة x أي الدالة h تقبل 0 كقيمة حدية صغرى

ومنه: $h(x)\geq0$ وعليه $x-\ln(x+1)\geq0$.

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس(T).

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ(T) ندرس اشارة الفرق: $f(x)-x=\dfrac{x(x-\ln(x+1))}{\ln(x+1)}=\dfrac{xh(x)}{\ln(x+1)}$

بما أن $h'(x)$ اشارته هي حسب إشارة x من أجل كل $x\in]-1;3]$ فإن: $f(x)-x\geq0$

وعليه يكون (C_f) فوق (T) ويمسه في المبدأ.

4) تعيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي لـ (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3

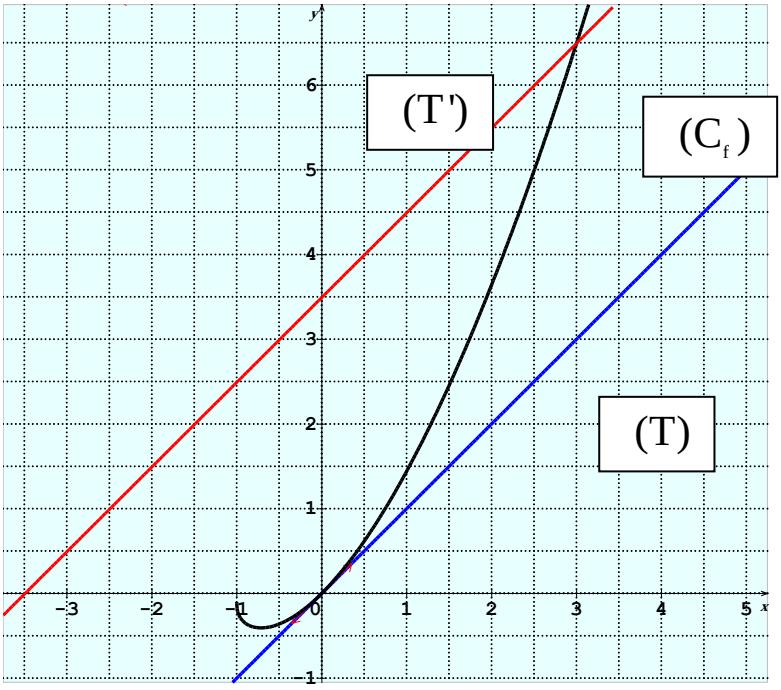
المستقيم (T') له معادلة من الشكل: $y=ax+b$

ولدينا: (T') الموازي لـ (T) معناه لهما نفس الميل أي $a=1$

ولدينا: (T') يشمل النقطة التي احداثياها $(3;f(3))$ ومنه $b=f(3)-3=\frac{9}{\ln 4}-3$

ومنه: (T') له معادلة من الشكل : $y=x-3+\frac{9}{\ln 4}$

5) رسم (T) ، (T') و (C_f).



6)المناقشة البيانية ، لعدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$

لدينا: $f(x)=x+m$ تكافئ $\begin{cases} y=x+m \\ y=f(x) \end{cases}$

وعليه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من المستقيمين (T) ، (T') ومن البيان نميز الحالات التالية:

1) $m<0$ المعادلة لاتقبل حلول. 2) $m=0$ المعادلة تقبل حل مضاعف.

3) $0<m\leq 1$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة .

4) $1<m\leq f(3)$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب.

التمرين46:دورة 2011

1 - أ) دراسة اتجاه تغير الدالة g ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+\ln(x^2)-1$

التهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\ln(x^2)-1=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x^2+\ln x^2-1=-\infty$

اتجاه التغير: $g'(x)=2x+\frac{2}{x}$

$g'(x)\succ 0$ وعليه جدول تغيرات g يكون كمايلي:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+			
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

ب) حساب $g(1)$ ثم استنتاج اشارة $g(x)$.

$g(1)=0$ وعليه اشارة $g(x)$ تكون حسب الجدول التالي

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	−	0	+	

2- أ) تبيّان ان الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وأن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

لدينا f الدالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=(1-\frac{1}{x^2})(\ln x)$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}\ln x+\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x^2})=\frac{2}{x^3}\ln x+\frac{x^2-1}{x^3}=\frac{x^2-1+\ln^2}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

من العبارة $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ نستنتج ان

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

ملاحظة: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى للمنحنى (δ) ثم ايجاد $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x$ ، ماذاتستنتج ؟.

*لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (δ) ندرس اشارة الفرق $f(x)-\ln x=-\frac{\ln x}{x^2}$

*اشارة الفرق هي عكس اشارة $\ln x$

وهي حسب الجدول التالي:

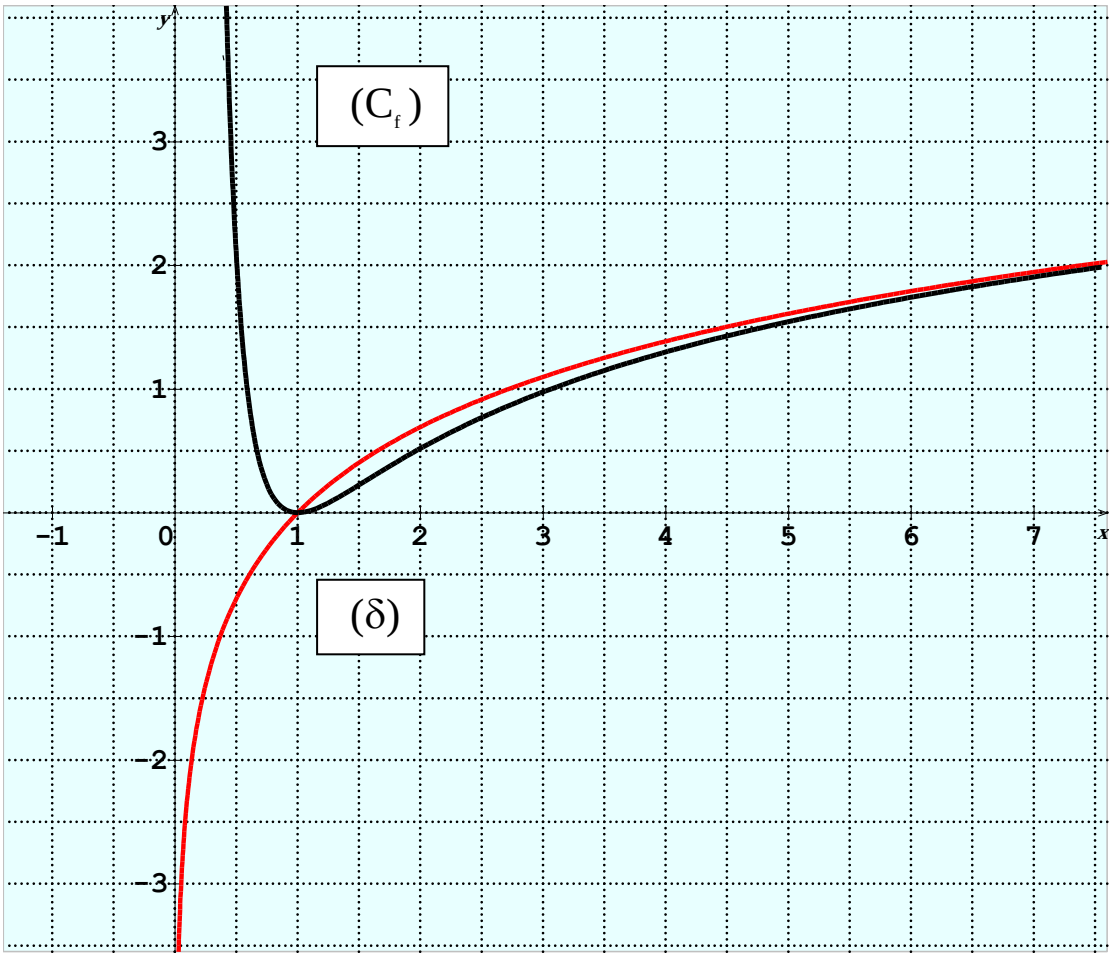
x	0	1	$+\infty$
الفرق	+	0	−
الوضع	(δ) تحت (C_f)	(C_f) يقطع (δ)	(δ) تحت (C_f)

$$*\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\right)^2=0$$

نلاحظ ان $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x=0$ تكافئ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=0$

ومنه (δ) منحنى مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

- رسم (δ) و (C_f).



التمرين47:دورة 2010

1-حساب $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ **وتفسير النتيجة بيانيا.**

g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x) = x - 1 - 2\ln x$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} x - 1 - 2\ln x = +\infty$ ومعناه المستقيم ذوالمعادلة $x = 0$ مقارب لـ (C_g).

2- أ) تبيّان أن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1 - 2\ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

ب) دراسة تغيرات الدالة g.

لدينا: $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$ واشارته هي حسب اشارة $x - 2$

x	0		1		2		α		+∞
g'(x)	‖	−		−	0	+		+	
g(x)	‖ +∞	↘	0	↘	g(2)	↗	0	↗	+∞

جـ) حساب $g(1)$ لدينا: $g(1) = 0$

د) البرهان ان المعادلة $g(x) = 0$ **تقبلا حلين مختلفين احدهما** α **حيث** $3,5 \prec \alpha \prec 3,6$.

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين احدهما 1 لأن $g(1) = 0$ وتقبل حل آخرهو α حيث $3,5 \prec \alpha \prec 3,6$ لأن g مستمرة ومتزايدة تماما على $]2;+\infty[$ و: $g(3,6) \times g(3,5) \prec 0$ ،

حسب مبرهنة القيم المتوسطة: توجد قيمة وحيدة α حيث $3,5 \prec \alpha \prec 3,6$ تحقق: $g(\alpha) = 0$

هـ) استنتاج اشارة $g(x)$ **ثم اشارة** $g(\frac{1}{x})$.

x	0		1		α		+∞
g(x)	‖ +	0	−	0	+		

*مماسبق نستنتج أن اشارة $g(x)$

*$g(\frac{1}{x}) = 0$ معناه $x = 1$ أو $x = \frac{1}{\alpha}$

واشارة $g(\frac{1}{x})$ هي حسب الجدول التالي

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1		+∞
$g(\frac{1}{x})$	‖ +	0	−	0	+		

3-أ-حساب α وتفسير النتيجة هندسيا.

f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x \ ; x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

* $\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} (-x + 1 + x \ln x) = 1$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} (x \ln x) = 0$ نهاية شهيرة

*تفسير النتيجة هندسيا

$\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ معناه $\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$ منحنى الدالة f يقبل مماسا معامل توجيهه 1

ب-حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^2 + x + x^2 \ln x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^2)(1 - \frac{1}{x} - \ln x) = +\infty$$

جـ- تبيّان أنه من أجل x من $]0;+\infty[$ فإن $f'(x) = xg(\frac{1}{x})$ و استنتاج اتجاه تغير الدالة f.

لدينا: $f'(x) = -2x + 1 + 2x \ln x + x = -x + 1 + 2x \ln x = x(-1 + \frac{1}{x} - 2\ln\frac{1}{x}) = xg(\frac{1}{x})$

من العبارة $f'(x) = xg(\frac{1}{x})$ نستنتج ان اشارة $f'(x)$ هي حسب اشارة $g(\frac{1}{x})$ والموضحة في هـ)

د-تشكيل جدول تغيرات الدالة f وتبيّان أن $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2}$ و استنتاج حصرا للعدد $f(\frac{1}{\alpha})$

$$f(\frac{1}{\alpha}) = -\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\ln\frac{1}{\alpha} = \frac{-1 + \alpha - \ln\alpha}{\alpha^2}$$

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	+	0		−	0	+	
$f(x)$	0		1		$f(\alpha)$		$+\infty$

ولدينا: $g(\alpha) = 0$ أي $-\ln\alpha = \frac{1-\alpha}{2}$ ومنه: $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{-1 + \alpha + \frac{1-\alpha}{2}}{\alpha^2} = \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2}$

لدينا: 3,6 ؛ α ؛ 3,5 تكافي كلا من (1)....2,6 ؛ $\alpha - 1$ ؛ 2,5 و(2)...25,92 ؛ $2\alpha^2$ ؛ 24,5

من (1) و(2) نستنتج أن: $\frac{2,5}{25,92} \prec \frac{\alpha-1}{2\alpha^2} \prec \frac{2,6}{24,5}$ أي $0,10 \prec f(\alpha) \prec 0,11$

4-رسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f على المجال $[0;3]$

