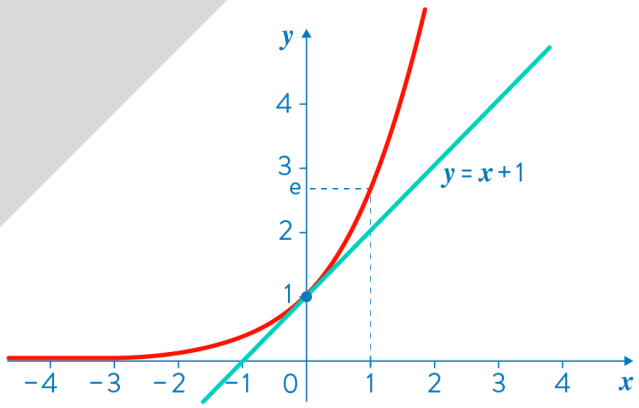
مجلة الدالة الأسية

الأستاذ سوايسية هشام



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(\exp)'(x)$		$+$	1	$+$	e	$+$	
$\exp(x)$	0	↗	1	↗	e	↗	$+\infty$

© SCHOOLMOUV

17 تمرين شامل في الدالة الأسية مرفقة بالحل

شعبة علوم تجريبية+تقني+رياضيات

تمرين 01

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = -x + 2 + e^x$

❶ ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

❶ احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = e^{-x}g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

❸ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$.

❹ ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ)

❺ تحقق أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.3 < \alpha < 0.5$

❻ أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياها.

ب) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة A.

❼ أنشئ (C_f) و (Δ).

تمرين 02

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - (x^2+1)e^{-x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

❶ أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$

جـ) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

❷ أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته $y = x$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ)

❸ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$

❹ أ) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

ب) بين أن (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثياها.

❻ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$

تمرين 03

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

❶ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يقبل المنحنى (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 والعدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x)=0$

❷ نضع $a=1$ ، $b=0$ ، $c=-3$

أ) احسب كلّا من $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

جـ) اكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0. ثم عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

❸ أرسم (T) و (C_f).

❹ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$

تمرين 04

نعتبر في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $(E)\ldots y'+3y=2e^{-x}$

❶ عين قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=a\times e^{-x}$ حل للمعادلة (E)

❷ نعتبر المعادلة التفاضلية $(E')\ldots y'+3y=0$

✯ حل المعادلة (E')

❸ بين أن الدالة f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $f-g$ حلا للمعادلة (E')

❹ استنتج حلول المعادلة (E).

❺ عين حلا خاصا f للمعادلة (E) بحيث يكون معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f في النقطة ذات الفاصلة 0 يساوي -4.

أفراس

تمرين 05

✯ لكل سؤال مما يلي إجابة واحدة حددها مع التعليل.

إذا كان $\lim\limits_{x\to 1} v(x) = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} v\left(e^{-3x}+1\right)$ تساوي:	$+\infty$	1	0
إذا كانت h دالة تحقق من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $e^{-x} \leq h(x) \leq 2e^{-x}$ دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = xe^x h(x)$ فإن:	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند 2 فإن $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2)-f(2-2h)}{2h}$ تساوي:	$f'(2)$	$-f'(2)$	$+\infty$
حل المعادلة التفاضلية $y' + 2y - 2 = 0$ والذي يحقق $f(0) = 0$ هو f حيث:	$f(x) = e^{-2x} - 1$	$f(x) = -e^{-2x} - 1$	$f(x) = -e^{-2x} + 1$
مجموعة حلول المتراجحة $e^x - e^{-x}$ هي:	$]-\infty;0]$	$[1;+\infty[$	$\mathbb{R}$

تمرين 06

✯ لكل سؤال مما يلي إجابة واحدة حددها مع التعليل.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{e^x}\right)$ تساوي:	$+\infty$	$-\infty$	0
إذا كانت h دالة تحقق من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $x \leq f(x) \leq x^2$ و g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ فإن:	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند 1 فإن $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1)-f(1+2h)}{2h}$ تساوي:	$f'(1)$	$-f'(1)$	$+\infty$
حل المعادلة التفاضلية $y' = 2y - 2$ والذي يحقق $u(0) = 0$ هو u حيث:	$u(x) = -e^{-2x} - 1$	$u(x) = -e^{-2x} + 1$	$u(x) = e^{-2x} + 1$
مجموعة حلول المتراجحة $e^{-3x+2} \leq 1$ هي:	$]-\infty;\frac{2}{3}]$	$[\frac{2}{3};+\infty[$	$\mathbb{R}$

تمرين 07

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = 2x + 1 + e^{2x}$

❶ ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.7;-0.6[$ $-0.7 < \alpha < -0.6$

❸ استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

أهراس

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

❶ أ) احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

جـ) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ)

❷ أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = -g(x)\,e^{-2x}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

جـ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $-1.2 < x_1 < -1.1$ و $1.1 < x_2 < 1.2$

❸ عين دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، ثم فسر النتيجة بيانيا.

❹ أنشئ (C_f) و (Δ) (يعطى $f(\alpha) = 2.9$).

تمرين 08

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = 1 - x + e^x$

❶ ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

❶ احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x + 1$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ)

❸ أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = -g(x)\,e^{-x}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

جـ) بين أن منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-0.5 < \alpha < -0.4$

❹ اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (T)

❺ أنشئ (T)، (Δ) و (C_f).

❻ عين حسب قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = mx + 1$ حلين متمايزين.

أهراس

تمرين 09

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=(x+1)e^x-e$

1. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
2. بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $0.5<\alpha<0.6$
3. استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^x-ex+e-2$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
2. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-ex+e-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

   ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).

   جـ) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ)، يطلب تعيين معادلته.
4. أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) يعطى $f(\alpha)\approx0.2$.
5. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(m+2-e)e^{-x}=x$.

III) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=e\left[(x+1)e^x-x\right]$

(C_h) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x: $h(x)=f(x+a)+b$
2. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

تمرين 10

I) k دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $k(x)=(-x+1)e^x-1$

جدول تغيراتها موضح في الشكل المقابل:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
$k(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$

1. شكل جدول تغيرات الدالة k.
2. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x $k(x)\leq0$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(-x+2)(e^x+1)$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ل تغيراتها.

أطراس

❸ أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)-(-x+2)=(-x+2)e^x$

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذي $y=-x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ (يعطى $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$).

ج) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).

❹ أ) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) معامل توجيهه -1

ب) اكتب معادلة للمماسين (T) و (T') للمنحنى (C_f) عند النقطتين ذواتي الفاصلتين 0 و 1 على الترتيب.

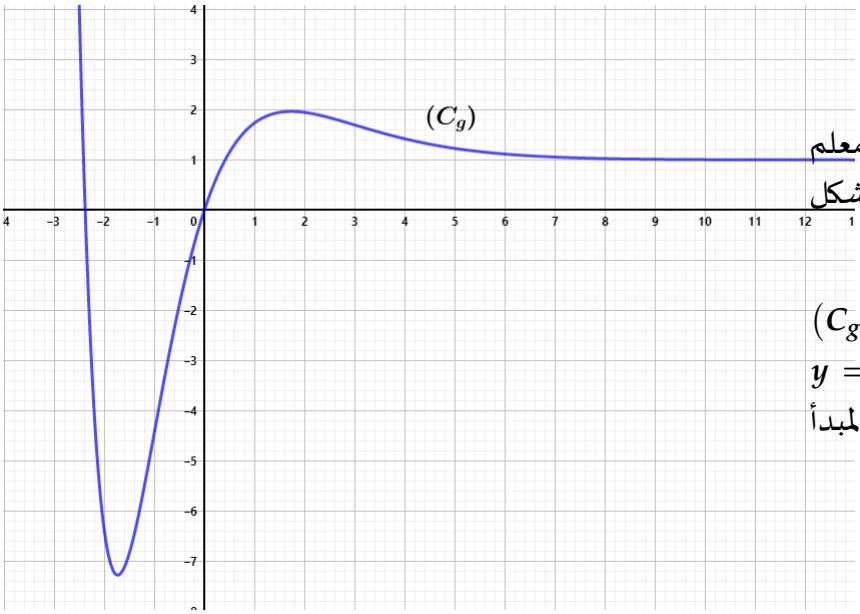
❻ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

❻ ارسم (Δ) ، (T) ، (T') و (C_f) يعطى.

❺ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المعادلة $f(x)=-x+m$.

تمرين 11

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=a+(x^2+2x-b)e^{-x}$



(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (الشكل المقابل):

❶ عين كلا من a و b إذا علمت أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=1$ بجوار $(+\infty)$ ويقبل مماسا عند المبدأ معامل توجيهه 3.

❷ فيما يلي نضع: $a=b=1$

أ) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $-2<\alpha<-2.5$.

ب) استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\ldots$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

❶ احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷

أهراس

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ بين ان منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في ثلاث نقاط يطلب تعيينها.

❹ أ) بين أن المستقيم (Δ) ذي $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).

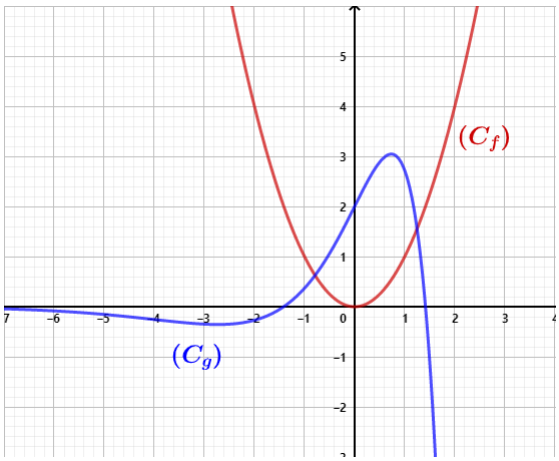
❻ ارسم (Δ) و (C_f)

تمرين 12

I) g و h دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ بـ

$$\begin{cases} g(x)=(2-x^2)\,e^x \\ h(x)=x^2 \end{cases}$$

(C_g) و (C_h) تمثيلهما البيانيين في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (الشكل المقابل).



نقبل أن المعادلة $g(x)=h(x)$ تقبل حلين متمايزين α ، β بحيث: $-0.8<\alpha<-0.7$ ، $1.2<\beta<1.3$،
اعتمادا على الشكل المقابل:

❶ ادرس الوضع النسبي لـ (C_g) و (C_h).

❷ استنتج إشارة $g(x)-h(x)$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{e^x+x^2+x}{e^x-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

❶ احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا.

❷ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{g(x)-h(x)}{(e^x-x)^2}$

❸ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❹ أنشئ (C_f) يعطى $f(\alpha)\approx 0.23$، $f(\beta)\approx 2.81$.

❺ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المعادلة $f(x)=-x+m$.

أهراس

تمرين 13

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=(2x+1)e^x-1$

1. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
2. احسب $g(0)=0$ ثم استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x(e^x-1)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
2. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=(e^x-1)g(x)$
   ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
   جـ) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) المار بميدأ المعلم.
3. أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.
   ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).
4. أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f).
5. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=mx$.

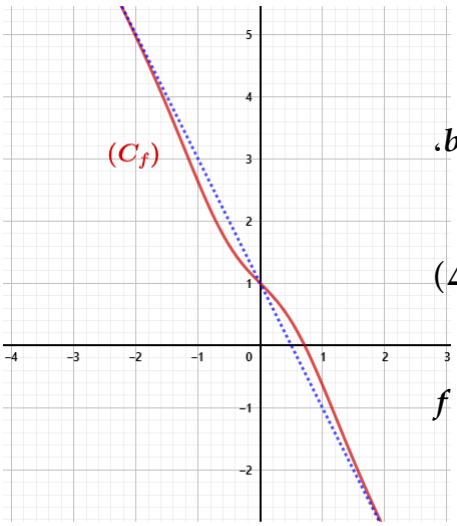
III) h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

(C_h) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. دون حساب عبارة $h(x)$ حدد اتجاه تغير الدالة h على مجموعة تعريفها.

تمرين 14

I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=xe^{-x^2}+ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان مع $a\neq 0$ و (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) (الشكل المقابل).



1. اكتب معادلة للمستقيم (Δ) ثم استنتج أن $a=-2$ و $b=1$،
   إذا علمت أن $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x^2}=0$
2. اثبت أن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين للمستقيم (Δ)
   يطلب تعيين معادلة لكل منهما.
3. عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=-2x+m$ حلين سالبين.

أهراس

II) h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

(C_h) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

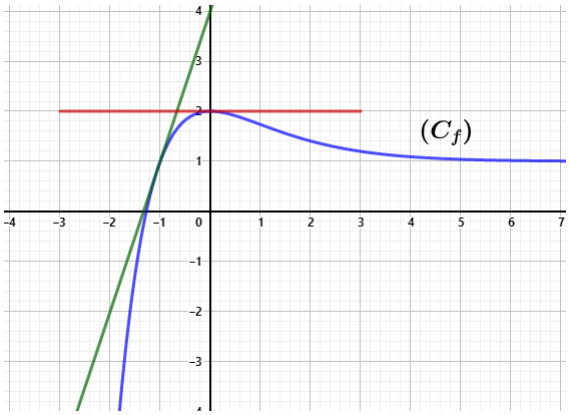
❶ احسب نهايات الدالة h عند أطراف مجموعة تعريفها.

❷ احسب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h على مجموعة تعريفها.

تمرين 15

I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$ حيث a و b عددان حقيقيان، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (الشكل المقابل).

❶ بقراءة بيانية



أ) عين كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر هذه الأخيرة بيانيا.

ب) عين كلا من $f(0)$ ، $f(-1)$ ، $f'(0)$ ، $f'(-1)$

ج) اعتمادا على ما سبق جد قيمة كلا من a و b ثم استنتج عبارة $f(x)$

❷ أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.4<\alpha<-1.2$.

ب) استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

❸ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=f(|x|+1)e^{-x}+1$

أ) احسب كلّا من: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{h(x)-2}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{h(x)-2}{x}$ ثم فسر النتيجة بيانيا، (نقبل أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}=-1$)

II) نضع فيما يلي: $f(x)=(x+1)e^{-x}+1$ ونعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x-\frac{x+2}{e^x}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ $\left(\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1cm\right)$

❶ أ) احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $+\infty$

❷ أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $g'(x)=f(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_g) في النقطة التي فاصلتها -1.

❹ بين أنّ $g(\alpha)=\alpha+1+\frac{1}{\alpha+1}$ ثم استنتج إشارة $g(\alpha)$.

❹ احسب $g(0)$ ثم أنشئ كلا من (Δ) ، (C_f) والمنحنى (C_g).

أهراس

تمرين 16

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$، (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

1. احسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم عبر عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ حيث g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$

2. دراسة إشارة $g(x)$

   أ) احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

   ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

   جـ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تأكد أن: $0.20 < \alpha < 0.21$

   د) عين إشارة $g(x) = 0$ على $\mathbb{R}$.

3. احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5. بين أنّ: $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

6. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $h(x) = \frac{-x^3}{2(x+2)}$

   أ) احسب $h'(x)$ ثم عين اتجاه تغير الدالة h على المجال $[0;1]$

   ب) استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

7. عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات.

تمرين 17

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = (x+a)e^x + b$ حيث a و b عددان حقيقيان، (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

1. عين قيميتي كلا من a و b علما أن (C_g) يقبل مماسيا في النقطة التي فاصلتها 1 موازيا لحامل محور الفواصل ويشمل $A(0;-1)$.

2. نضع فيما يلي: $g(x) = (x-2)e^x + 1$

   أ) احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

   ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $-1.3 < \alpha < -1.2$ و $1.8 < \beta < 1.9$

   ب) استنتج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$.

II) f دالة مع

أهراس

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

❶ احسب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ احسب كلا من $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا.

❸ أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(1-e^x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

❸ أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $-\infty$ معادلته $y = x - 1$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).

❺ بين أن $f(\alpha) = \alpha - 2$ ، $f(\beta) = \beta - 2$ ثم عين حصرا لكل من $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

❻ احسب $f(1)$ أنشئ (C_f) و (Δ).

أهراس

تمرين 01

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = -x + 2 + e^x$

❶ دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها.

$g'(x) = -1 + e^x$ ومنه $g'(x) < 0$ تعني أن $-1 + e^x < 0$ ومنه $e^x < 1$ ومنه $x < 0$.

إذن g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

ومنه:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -x + 2 + e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} -x + 2 + e^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(-1 + \frac{2}{x} + \frac{e^x}{x}\right) = +\infty$$

❷ استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات $g(x) > 0$

II) ❶ حساب كلا من $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❷ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = e^{-x}g(x)$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

ومنه:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

$f'(x) = 1 + 1 \times e^{-x} + (e^{-x}(x-1))$

ومنه $f'(x) = 1(-x+2)e^{-x}$ نضرب ونقسم على e^x

نجد: $f'(x) = \frac{e^x - x + 2}{e^x}$

ومنه: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x} = e^{-x}g(x) > 0$

✯ الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

❸ لإثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} (x-1)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{-x}} - \frac{1}{e^{-x}} = 0$$

❹ دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):

$f(x)-y=(x-1)e^{-x}$ إشارته من إشارة $(x-1)$ ومنه:

✯ (C_f) تحت (Δ) لما $x\in\,]-\infty;1[$

✯ (C_f) يقطع (Δ) لما $x=1$

✯ (C_f) فوق (Δ) لما $x\in\,]1;+\infty[$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

❺ التحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.3<\alpha<0.5$:

✯ الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0.3;0.5[$ و $f(0.3)=-0.22$ ، $f(0.5)=0.2$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.3<\alpha<0.5$

❻ أ) إثبات أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياها:

$f'(x)=e^{-x}(e^x-x+2)$ ومنه:

$$f''(x)=-e^{-x}(-x+2+e^x)+(-1+e^x)e^{-x}=e^{-x}(x-2-e^x-1+e^x)=(x-3)e^{-x}$$

إشارته من إشارة $(x-3)$ ومنه:

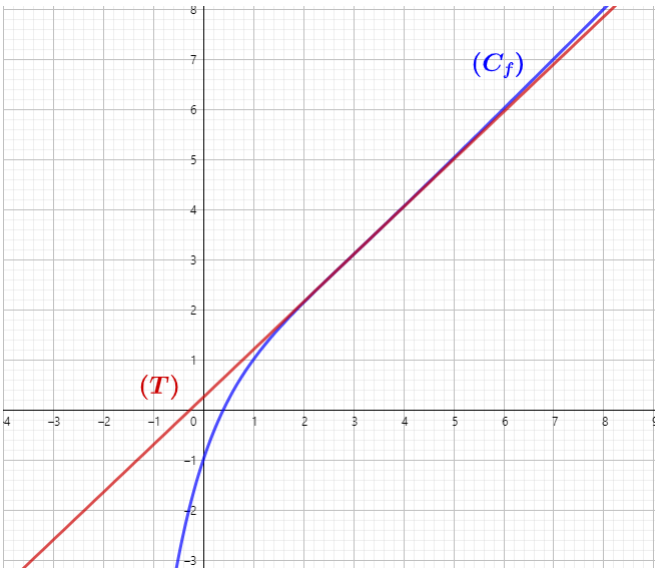
x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

إذن نقطة الانعطاف إحداثياها: $A(3;3+2e^{-3})$

ب) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة A:

$$(T):y=f'(3)(x-3)+f(3)=(1-e^{-3})(x-3)+3+2e^{-3}=(1-e^{-3})x+5e^{-3}$$

❼ إنشاء (C_f) و (Δ).



تمرين 02

❶ أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم إثبات أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لأنّ: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} -x+1=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty\end{cases}$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-\frac{x^2}{e^x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^{1}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}}=0$

ب) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=1+(x-1)e^{-x+1}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$f'(x)=1-2e^{-x+1}+(x^2+1)e^{-x+1}=1+(x^2-2x+1)e^{-x+1}=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

جـ) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

✯ جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

من أجل كل x لدينا:

$e^{-x+1}>0$ و $(x-1)^2\geq 0$ وبالتالي $f'(x)>0$ أي

أن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

❷ أ) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته $y=x$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x^2}{e^x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^{1}=0$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):

لدينا: $f(x)-x=-(x^2+1)e^{-x+1}<0$ لأن $e^{-x+1}>0$ و $(x^2+1)\geq 0$ وبالتالي (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على $\mathbb{R}$

❸ إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8<\alpha<1.9$:

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وبما أن $f(1.8)\approx -0.11$ و $f(1.9)\approx 0.03$ أي أن $f(1.8)\times f(1.9)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8<\alpha<1.9$

❹ أ) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه: $(T); y=x-2$

ب) تبيين أن (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثياها:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$	$+$			$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

من أجل كل عدد حقيقي x الدالة f تقبل الإشتقاق ولدينا:

$f''(x)=2(x-1)e^{-x+1}-(x-1)^2e^{-x+1}=(x-1)e^{-x+1}(-x+3)$

حسب جدول الإشارة المقابل نقطتي الإنعطاف هما:

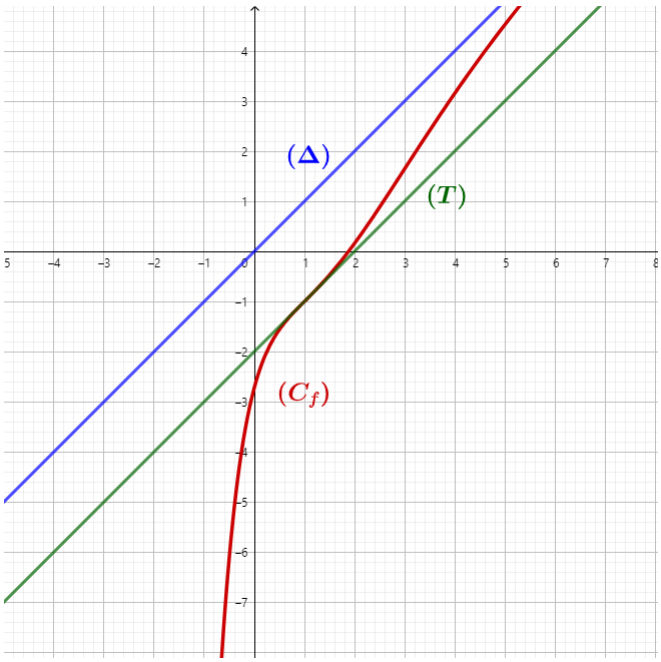
$(1;-1)$ ، $(3;3-10e^{-2})$

❺ حساب $f(3)$ ، $f(0)$:

$f(3)=3-8e^{-2}$ ، $f(0)=e$

التمثيل الـ

أهراس



❻ المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$

الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلات $y = x + m$.

قيم m	عدد وإشارة الحلول
$]-\infty; -e[$	حل سالب تماما
$-e$	حل معدوم
$]-e; 0[$	حل موجب تماما
$[0; +\infty[$	لا توجد حلول

تمرين 03

❶ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يقبل المنحنى (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 والعدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$:

✯ $f(0) = -3$ وهذا معناه $c = -3$

✯ لدينا $f'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$ و $f'(0) = 3$ ومنه $b - c = 3$ أي $b = 0$.

✯ $f(\sqrt{3}) = 0$ معناه: $f(\sqrt{3}) = (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0$ ومنه $a = 1$

❷ نضع $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -3$

أ) حساب كلّا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها:

المشتقة $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 ومنه

أهراس

جدول تغيراتها

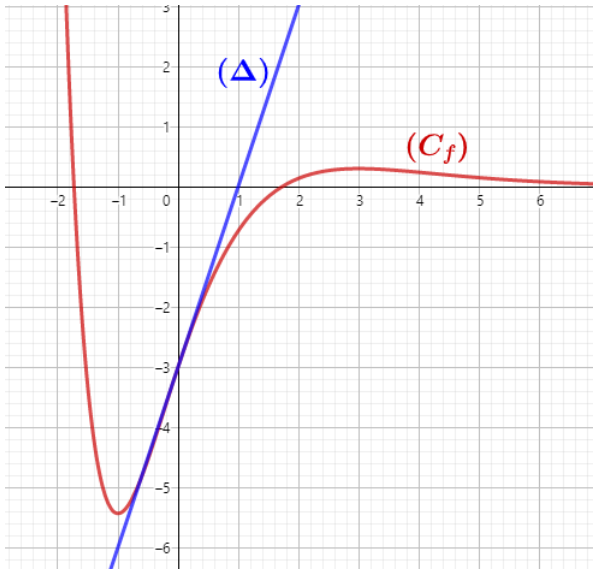
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2e$	↗	$\frac{6}{e^3}$	↘	0

ج) كتابة معادلة للمماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$(T): y = 3x - 3$

✯ تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل:

$f(x) = 0$ معناه $x^2 - 3 = 0$ أي أن: $x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$ أي نقاط التقاطع هما: $A(\sqrt{3};0)$ ، $B(-\sqrt{3};0)$



❸ رسم (T) و (C_f).

❹ المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$:

المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$ تكافئ $me^x = -(x^2 - 3)$ أي أن $-m = -(x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ $-m = f(x)$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$.

✯ **المناقشة البيانية:**

- ✾ لما $-m < -2e$ أي أن $m > 2e$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان ومنه ليس للمعادلة حلول.
- ✾ لما $-m = -2e$ أي أن $m = 2e$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب
- ✾ لما $-2e < -m < -3$ أي أن $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبتين ومنه للمعادلة حلين سالبين
- ✾ لما $-m = -3$ أي أن $m = 3$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة والأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين أحدهما معدوم والآخر سالب
- ✾ لما $-3 < -m \geq 0$ أي أن $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفتين في ا

أهراس

- لما $0 < -m < \frac{6}{e^3}$ أي أن $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في ثلاث نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتين ونقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة ثلاثة حلول حلين موجبين وحل سالب.
- لما $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفتين في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة
- لما $-m > \frac{6}{e^3}$ أي أن $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

تمرين 04

❶ تعيين قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = a \times e^{-x}$ حل للمعادلة (E):

g حل للمعادلة (E) معناه $g'(x) - 3g(x) = 2e^{-x}$ أي $-ae^{-x} + 3ae^{-x} = 2e^{-x}$ ومنه $2ae^{-x} = 2e^{-x}$ بالمطابقة نجد: $a = 1$

❷ ✯ حل المعادلة (E'):

$y' + 3y = 0$ معناه $y' = -3y$ مجموعة حلول المعادلة هي مجموعة الدوال من الشكل $y = Ce^{-3x}$ حيث $C \in \mathbb{R}$

❸ إثبات أن الدالة f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $f - g$ حلا للمعادلة (E'):

الدالة f حل للمعادلة (E) معناه $f'(x) + 3f(x) = 2e^{-x}$ ومنه $f'(x) + 3f(x) = g'(x) + 3g(x)$ لأن g حل للمعادلة (E) وبالتالي: $f'(x) + 3f(x) - g'(x) - 3g(x) = 0$ أي: $(f-g)'(x) + 3(f-g)'(x) = 0$ ومنه الدالة $f - g$ حل للمعادلة (E')

✯ الدالة $f - g$ حل للمعادلة (E') معناه $(f-g)'(x) + 3(f-g)'(x) = 0$ ومنه $f'(x) + 3f(x) = g'(x) + 3g(x)$ وبالتالي $f'(x) + 3f(x) = 2e^{-x}$ لأن g حل للمعادلة (E) إذن f حل للمعادلة (E)

❹ استنتاج حلول المعادلة (E):

لدينا $f - g$ حل للمعادلة (E') معناه $f(x) - g(x) = Ce^{-3x}$ ومنه $f(x) = Ce^{-3x} + g(x) = Ce^{-3x} + e^{-x}$ مع $C \in \mathbb{R}$

❺ تعيين حلا خاصا f للمعادلة (E) بحيث يكون معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f في النقطة ذات الفاصلة 0 يساوي -4:

✯ (C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا معامل توجيهه يساوي -4 معناه: $f'(0) = -4$

✯ لدينا: $f'(x) = -3Ce^{-3x} - e^{-x}$

$f'(0) = -4$ معناه: $-3Ce^0 - e^0 = -4$ أي $-3C = -3$ ومنه $C = 1$ أي: $f(x) = e^{-3x} + e^{-x}$

أهراس

تمرين 05

✯ لكل سؤال مما يلي إجابة واحدة حددها مع التعليل.

إذا كان $\lim\limits_{x\to 1} v(x) = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} v\left(e^{-3x}+1\right)$ تساوي:	0	(نهاية مركب دالتين) لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = 1$ و $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$
إذا كانت h دالة تحقق من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $e^{-x} \le h(x) \le 2e^{-x}$ دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = xe^x h(x)$ فإن:	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	(النهاية بالحصر) لأن $e^{-x} \le h(x) \le 2e^{-x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$
إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند 2 فإن $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2)-f(2-2h)}{2h}$ تساوي:	$-f'(2)$	$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2)-f(2+2h)}{2h} =$ $-\lim\limits_{k\to 0} \frac{f(2+k)-f(2)}{k} = -f'(2)$
حل المعادلة التفاضلية $y'+2y-2=0$ والذي يحقق $f(0)=0$ هو f حيث:	$f(x) = -e^{-2x}+1$	لأن $f(0)$ و $f'(x)+2f(x)-2=0$
مجموعة حلول المتراجحة $e^x - e^{-x} \le 0$ هي:	$]-\infty;0]$	لأن $e^x - e^{-x} \le 0$ تكافئ أن $e^{2x}-1 \le 0$ تكافئ $x \le 0$

تمرين 06

✯ لكل سؤال مما يلي إجابة واحدة حددها مع التعليل.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{e^x}\right)$ تساوي:	0	نهاية مركب دالتين لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
إذا كانت h دالة تحقق من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $x \le f(x) \le x^2$ و g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ فإن:	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	النهاية بالحصر لأن $x \le f(x) \le x^2$ ومنه $\frac{x}{e^x} \le \frac{f(x)}{e^x} \le \frac{x^2}{e^x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \le \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x} \le \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$ أي $0 \le \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \le 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$
إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند 1 فإن $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1)-f(1+2h)}{2h}$ تساوي:	$-f'(1)$	$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1)-f(1+2h)}{2h} = -\lim\limits_{k\to 0} \frac{f(1+k)-f(1)}{k} = -f'(1)$
حل المعادلة التفاضلية $y'=2y-2$ والذي يحقق $u(0)=0$ هو u حيث:	$u(x) = -e^{2x}+1$	لأن حلول المعادلة التفاضلية $y'=2y-2$ هي الدوال $f_C(x) = Ce^{2x}+1$ و $f(0)=0$ معناه $C=-1$.
مجموعة حلول المتراجحة $e^{-3x+2} \le 1$ هي	$\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$	لأن $e^{-3x+2} \le 1$ تكافئ $e^{-3x+2} \le e^0$ ومنه $-3x+2 \le 0$ $x \ge \frac{2}{}$

I) ❶ دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها.

✯ النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1+e^{2x}) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1+e^{2x}) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$

✯ الدالة المشتقة: g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x) = 2+2e^{2x} = 2(1+e^{2x})$

✯ اتجاه التغير: لدينا $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

❷ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.7;-0.6[$: $0.3 < \alpha < 0.5$

✯ الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0.7;0.6[$ ولدينا $f(-0.7) \times f(-0.6) < 0$

لأن $f(-0.7) \approx -0.15$ و $f(-0.6) \approx 0.1$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.7;0.6[$.

❸ استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) ❶ أ) حساب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x+(1+x)e^{-2x}) = \lim_{x\to-\infty} e^{-2x}\left(\tfrac{1}{e^{-2x}} - \tfrac{x}{e^{-2x}} + (1+x)\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-x+(1+x)e^{-2x}) = \lim_{x\to+\infty} (1-x+e^{-2x} - \tfrac{1}{2}(-2xe^{-2x})) = -\infty$$

ب) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x\to+\infty} (x+1)e^{-2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} xe^{-2x} + e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{1}{2}(-2xe^{-2x}) + e^{-2x}\right] = 0$$

إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ معادلته $y = -x+1$

ج) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):

لدينا: $f(x) - y_\Delta$ نضع $(x+1)e^{-2x} = 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $x+1$ لأن $e^{-2x} > 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

نستنتج الوضع النسبي:

✯ من أجل $x<-1$: (C_f) تحت (Δ).

✯ من أجل $x>-1$: (C_f) فوق (Δ).

✯ من أجل $x=-1$: (C_f) يقطع (Δ).

❷ أ) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=-g(x)e^{-2x}$:

$f'(x)=-1-e^{-2x}-2xe^{-2x}$ أي $f'(x)=-1+e^{-2x}-2e^{-2x}(x+1)$ وعليه $f'(x)=-(1+e^{-2x}+2xe^{-2x})$ ومنه $f'(x)=-e^{-2x}(e^{2x}+1+2x)$ نجد $f'(x)=-g(x)e^{-2x}$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

ج) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $-1.2<x_1<-1.1$ و $1.1<x_2<1.2$:

✯ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومنه مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1.2;-1.1]$ ولدينا: $f(-1.2)\times f(-1.1)<0$ لأن $f(-1.2)\approx 1.197$ و $f(-1.1)\approx -4.64\times 10^{-3}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_1 في المجال $]-1.2;-1.1[$.

✯ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ ومنه مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1.1;1.2]$ ولدينا: $f(1.1)\times f(1.2)<0$ لأن $f(1.2)\approx 0.13$ و $f(1.2)\approx -4.2\times 10^{-4}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_2 في المجال $]1.1;1.2[$

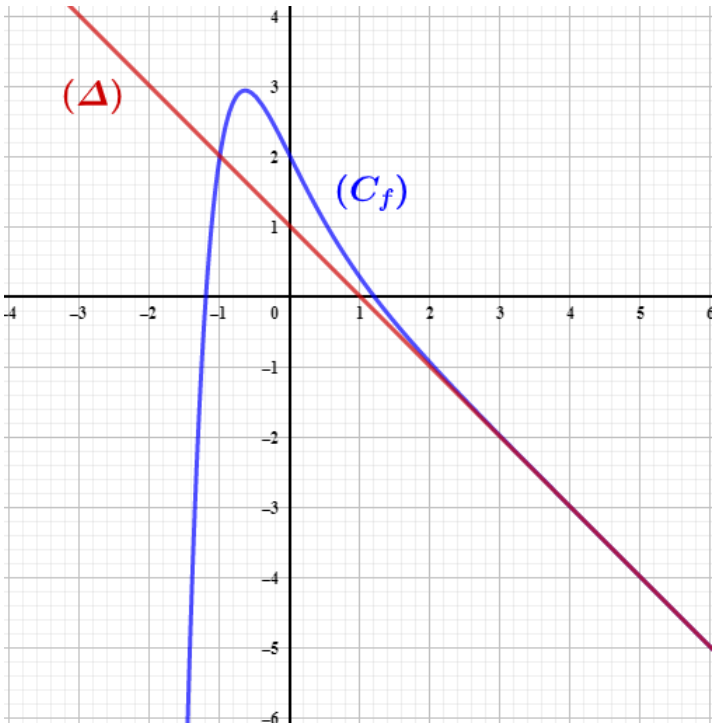
❸ تعيين دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، ثم تفسير النتيجة بيانيا:

حسب تعريف العدد المشتق: $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$ ونعلم مما سبق أن $f'(\alpha)=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=0$.

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل معادلته $y=f(\alpha)$ عند النقطة $(\alpha;f(\alpha))$

❹ إنشاء (C_f) و (Δ) (يعطى $f(\alpha)=2.9$).

أهراس



تمرين 08

I) ❶ دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها:

✯ **النهايات:** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1-x+e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{1}{x}-1+\frac{e^x}{x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1-x+e^x = -\infty$

✯ **اتجاه التغير:** الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و $g'(x) = -1+e^x$ ومنه $g'(x) = 0$ أي $-1+e^x = 0$ وبالتالي $x = 0$ ولدينا $g'(x) > 0$ يكافئ $x > 0$ ، ولدينا $g'(x) < 0$ يكافئ $x < 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(0)=2$	↗	$+\infty$

❷ استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$:

لدينا من أجدول التغيرات من أجل كل عدد حقيقي $g(x) > 0$

II) ❶ حساب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x+1+xe^{-x} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x+1+xe^{-x} = +\infty$

❷ أ) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x+1$:

أهراس

إذن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x + 1$.

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):

لدينا: $f(x) - x - 1 = xe^{-x} = 0$ ومنه: $x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
xe^{-x}		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ)		(C_f) يقع فوق (Δ)

❸ أ) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = -g(x)e^{-x}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(e^x + 1 - x) = e^{-x}g(x)$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا e^{-x} ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وبالتالي: $f'(x) > 0$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

ج) تبيان أن منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-0.5 < \alpha < -0.4$:

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0.5; -0.4[$ ولدينا $f(-0.5) \times f(-0.4) < 0$

لأن $f(-0.5) = -0.32$ و $f(-0.4) = 0.003$ ومن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة، فاصلتها α حيث: $-0.5 < \alpha < -0.4$

❹ ✯ كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$(T) : y = f'(0)x + f(0)$ ومنه $(T) : y = 2x + 1$ ✯ دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (T):

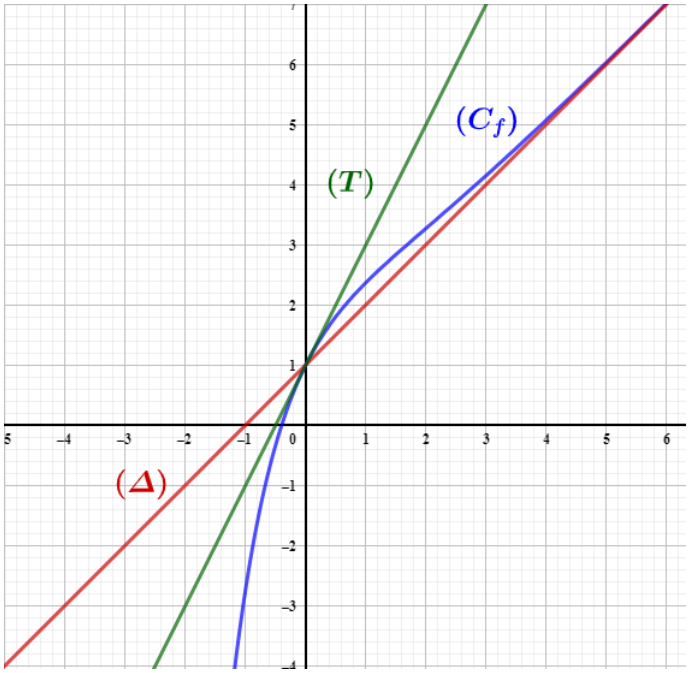
$f(x) - 2x - 1 = xe^{-x} - x = x(e^{-x} - 1)$

$x(e^{-x} - 1) = 0$ يكافئ $x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{-x} - 1$		$+$	0	$-$	
$x(e^{-x} - 1)$		$-$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ)		(C_f) يقع تحت (Δ)

❺ إنشـ

أهراس



❻ تعيين حسب قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = mx + 1$ حلين متمايزين.

الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حزمة المستقيمات ذوات المعادلات $y = mx + 1$ التي تشمل نقطة ثابتة $(0;1)$

قيم m	عدد الحلول
$]-\infty;1]$	حل وحيد
$]1;2[$	حلان
$m = 2$	حل وحيد
$]2;+\infty[$	حلان

تمرين 09

I) ❶ دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها.

✯ **النهايات:**

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)e^x - e = +\infty \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+1)e^x - e = -e$$

✯ **اتجاه التغير:** الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $g'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

$g'(x) = 0$ يكافئ $(x+2)e^x = 0$ يكافئ $x = -2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-2;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2]$

جدول التغيرات:

أهراس

x	$-\infty$		-2		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-e$	↘	$g(-2)$	↗	0	↗	$+\infty$

❷ تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $0.5<\alpha<0.6$:

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-2;+\infty[$

ولدينا $0\in[g(-2);+\infty[$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ولدينا:

$g(0.5)\times g(0.6)<0$ وبالتالي $0.5<\alpha<0.6$

❸ استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) ❶ حساب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}xe^x-ex+e-2=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}xe^x-ex+e-2=+\infty$$

❷ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $f'(x)=e^x+xe^x-e=e^x(1+x)-e=g(x)$

استنتاج اتجاه التغير: إشارة $f(x)$ من إشارة $g(x)$ وبالتالي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

❸ أ) تبيان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-ex+e-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f):

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-ex+e-2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

(

أهراس

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ $f(x) - (-ex + e - 2) = xe^x = 0$ معناه $x = 0$ و $e^x > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
xe^x	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

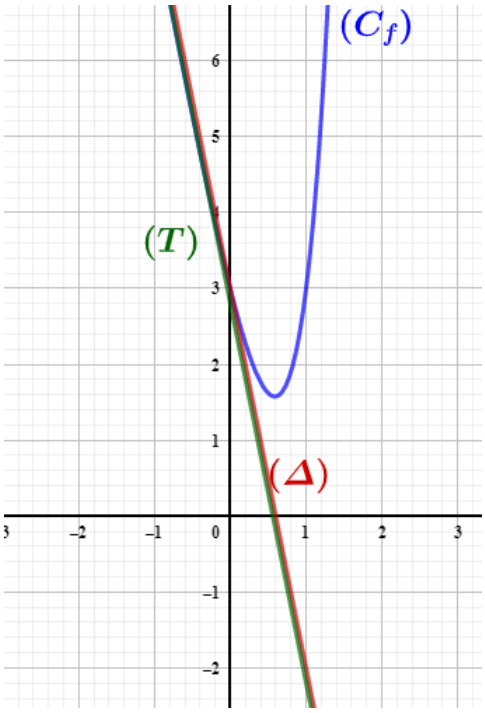
ج) تبيان أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ)، يطلب تعيين معادلته:

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x) = -e$ أي $g(x) = -e$ ومنه $(x+1)e^x - e = -e$ أي $(x+1)e^x = 0$

وعليه بالتالي يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = -1$ ومنه:

إذن: $(T) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ $(T) : y = -ex + e - 2 - e^{-1}$

❹ إنشاء (T) ، (Δ) و (C_f) يعطى $f(\alpha) \approx 0.2$.



❺ المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(m+2-e)e^{-x} = x$:

لدينا: $(m+2-e)e^{-x} = x$ تكافئ $(m+2-e) = xe^x$

ومنه $m = xe^x + e - 2$ وعليه:

$f(x) = -ex + m$ إذن هي مناقشة مائلة، الحلول هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = -ex + m$ ومنه:

- $m \in]-\infty; e - 2 - e^{-1}[$ لا توجد حلول.
- $m = e - 2 - e^{-1}$ يوجد حل وحيد سالب.
- $m \in]e - 2 - e^{-1}; e - 2[$ يوجد حلان سالبان.
- $m = e - 2$ يوجد حل وحيد معدوم
- $m > e - 2$ يوجد حل وحيد موجب

III

❶ نعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x، $h(x) = f(x+a) + b$

لدينا: $h(x) = e[(x+1)e^x - x] = (x+1)e^{x+1} - ex$

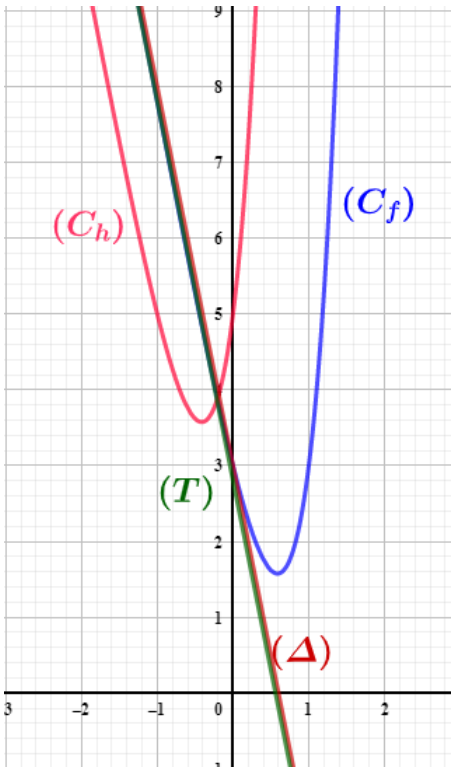
ومنه $f(x+a) + b = (x+a)e^{x+a} - e(x+a) + e - 2 + b = (x+a)e^{x+a} - ex - ea + e - 2 + b$

بالمطابقة نجد: $a = 1$ و $-ea + e - 2 + b = 0$ ومنه $b = 2$ وبالتالي: $h(x) = f(x+1) + 2$

❷ شرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم رسمه في نفس المعلم السابق:

(C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

أهراس



تمرين 10

I) الدالة k معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x)=(-x+1)e^x-1$

❶ شكل جدول إشارة الدالة k:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k(x)$		$-$	0	$-$	

❷ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x $k(x)\leq 0$.

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $k(x)\in]-\infty;0]$ ومنه $k(x)\leq 0$

II) ❶ حساب كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x+2)(e^x+1)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x+2)(e^x+1)=-\infty$$

❷ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=k(x)$:

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $f'(x)=-(e^x+1)+(-x+2)e^x=-e^x-1+(-x+2)e^x-1$

وبالتالي $f'(x)=k(x)$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f: بما أن $f'(x)=k(x)$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $k(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	

أهراس

الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	4	$-\infty$

❸ أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)-(-x+2)=(-x+2)e^x$:

$f(x)-(-x+2)=(-x+2)(e^x+1)-(-x+2)=(-x+2)(e^x+1-1)=(-x+2)e^x=(-x+2)e^x$

ب) تبيان أن المستقيم (Δ) ذي $y=-x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ (يعطى $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$):

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}(-xe^x+2e^x)=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذي $y=-x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ج) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x+2)$

لدينا $f(x)-(-x+2)=(-x+2)e^x=0$ ومنه $-x+2=0$ أي $x=2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x+2$		$+$	0	$-$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	

❹ أ) إثبات أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) معامل توجيهه -1:

معناه $f'(x)=-1$ أي $(-x+1)e^x-1=-1$ ومنه $(-x+1)e^x=0$ وبالتالي: $x=1$

إذن (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه يساوي -1 في النقطة $A(1;f(1))$

ب) كتابة معادلة للمماسين (T) و (T') للمنحنى (C_f) عند النقطتين ذواتي الفاصلتين 0 و 1 على الترتيب:

✯ لدينا $(T):y=f'(0)x+f(0)$ ومنه $(T):y=4$.

✯ لدينا $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $(T):y=-x+e+2$

❻ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتاج نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل:

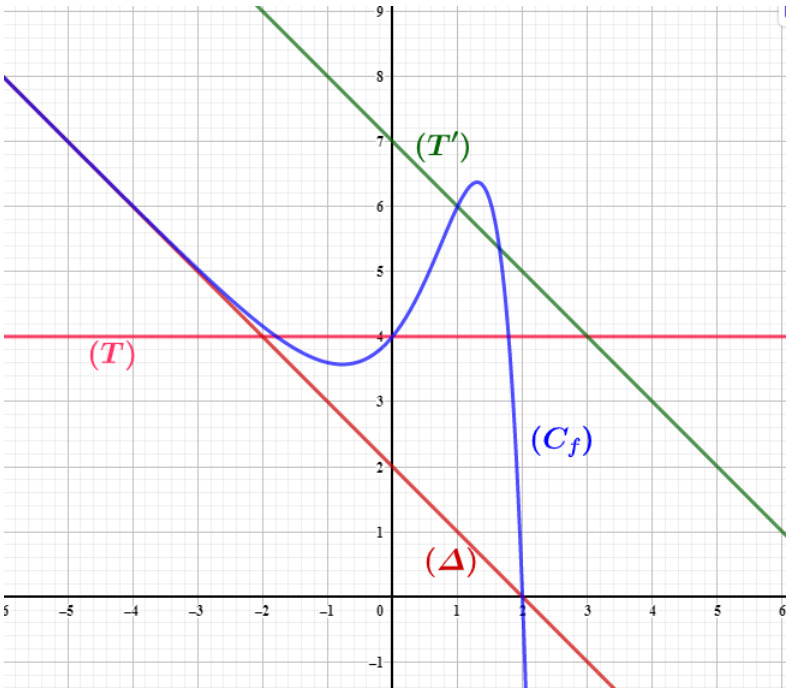
لدينا: $f(x)=0$ معناه $(-x+2)(e^x+1)=0$ إما $x=2$ لأن $e^x+1>0$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي $S=\{2\}$

✯ إحداثي نقط تقاطع (C_f) مع xx' هي $B(2;0)$

❻ رسم

أهراس



❺ المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المعادلة $f(x) = -x + m$:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = -x + m$

- إذا كان $m \in]-\infty; 2[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا.
- إذا كان $m \in]2; 4[$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب تماما والآخر موجب تماما.
- إذا كان $m = 4$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر موجب تماما.
- إذا كان $m \in]4; 2 + e[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين.
- إذا كان $m = e + 2$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا $x = 1$.
- إذا كان $m \in]e + 2; +\infty[$ فإن المعادلة ليس لها حل

تمرين 11

I) ❶ تعيين كلا من a و b

✯ (C_g) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 1$ بجوار $(+\infty)$ معناه: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ أي أن $a = 1$.

✯ (C_g) يقبل مماسا عند المبدأ معامل توجيهه 3 معناه $g'(0) = 3$ أي أن $g'(0) = 2e^0 + be^0 = 3$ إذن $b = 1$

❷ أ) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $-2.5 < \alpha < -2$:

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-2.5; -2[$ ولدينا: $g(-2) \times g(-2.5) < 0$ ومن حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-2.5; -2[$

ولدينا من البيان $g(0) = 0$

ب) استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

أهراس

II) ❶ حساب النهايات:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❷ أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = g(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $f'(x) = \ldots$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;0]$

✯ جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

❸ تبيان أن منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في ثلاث نقاط يطلب تعيينها:

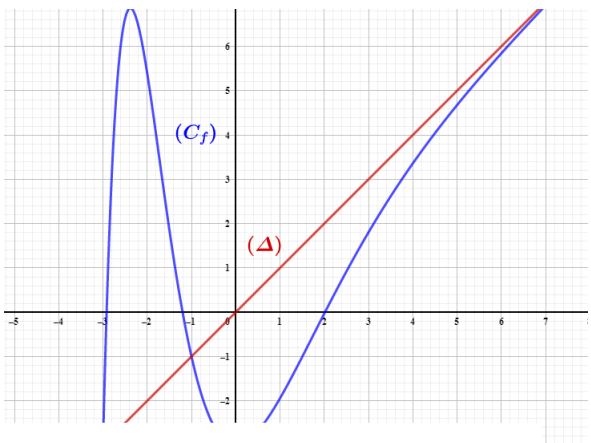
❹ أ) تبيان أن المستقيم (Δ) ذي $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y] = 0$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).

x	$-\infty$		-5		-3		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)		(C_f) يقع تحت (Δ)

❻ رسم (Δ) و (C_f):



أهراس

تمرين 12

I) ❶ دراسة الوضع النسبي لـ (C_g) و (C_h).

✯ (C_g) فوق (C_h) على المجال $]\alpha;\beta[$ وتحت (C_h) على كل من المجالين $]-\infty;\beta[$ و $]\beta;+\infty[$

❷ استنتاج إشارة $g(x)-h(x)$:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)-h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II) ❶ احسب النهايات $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

تفسير النتائج بيانيا: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=1$

❷ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{g(x)-h(x)}{(e^x-x)^2}$

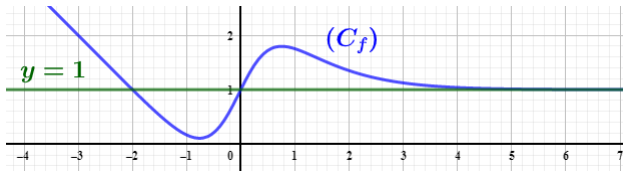
❸ استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين: $]-\infty;\alpha]$ $[\beta;+\infty[$

✯ جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘	1

❹ إنشاء (C_f) يعطى $f(\alpha)\approx 0.23$، $f(\beta)\approx 2.81$.



تمرين 13

I) $g(x)=(2x+1)e^x-1$

❶ دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها:

✯ النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x+1)e^x-1=-1$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x+1)e^x-1=+\infty$$

✯ ا

أهراس

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x+3$ أي $2x+3=0$ معناه $x=\frac{-3}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ ومتناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ ✯ **جدول التغيرات:**

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	-1	↘	$g(\frac{-3}{2})$	↗	$+\infty$

❷ حساب $g(0)=0$ واستنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $g(0)=0$ وبالتالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

II) ❶ حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x(e^x-1)^2=+\infty \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x(e^x-1)^2=-\infty$$

❷ أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=(e^x-1)g(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$f'(x)=(e^x-1)^2+2xe^x(e^x-1)=(e^x-1)(e^x-1+2xe^x)$ وبالتالي: $f'(x)=(e^x-1)g(x)$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f:

✯ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ و (e^x-1):

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

أهراس

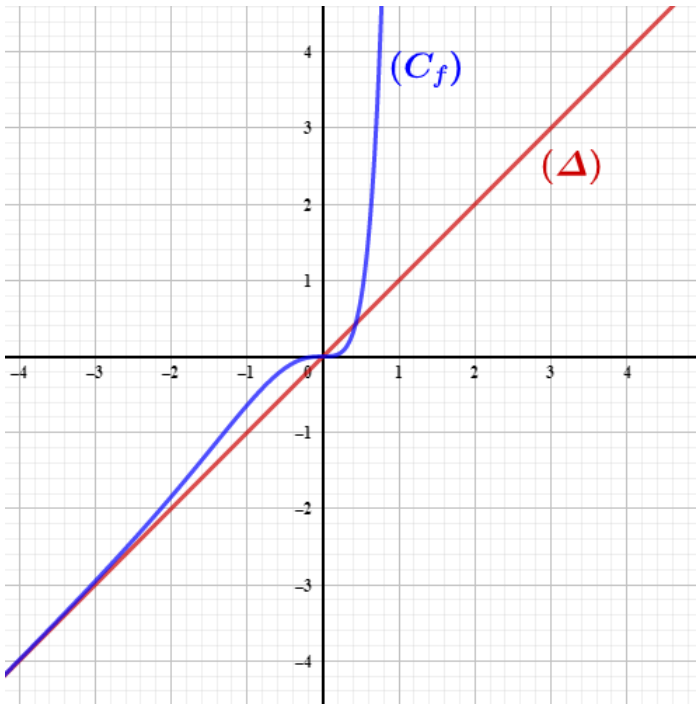
لدينا: $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ علما أن المماس يمر من المبدأ معناه: $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0$ ومنه $-x_0(e^{x_0} - 1)g(x_0) + x_0(e^{x_0} - 1)^2 = 0$ وبالتالي: $-2x_0^2(e^{x_0} - 1)e^{x_0} = 0$
ومنه: $x_0 = 0$ إذن معادلة المماس هي: $(T): y = 0$

❸ أ) تبيان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:
$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x(e^x - 1)^2 - x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[xe^{2x} + x - 2xe^x - x\right] =$
إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[xe^{2x} - 2xe^x\right] = 0$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ):
$f(x) - x = xe^x(e^x - 2) = 0$ تكافئ $xe^x = 0$ أو $e^x = 2$ وبالتالي: $x = 0$ أو $x = ln2$.

x	$-\infty$		0		$ln2$		$+\infty$
xe^x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

❹ إنشاء (T) ، (Δ) و (C_f).



❺ المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = mx$.
حلول المعادلة $f(x) = mx$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = mx$
إذن:

- لما $m \in]-\infty; 0]$ المعادلة تقبل حلا وحيدا
- لما $m \in]0; 1[$ المعادلة تقبل ثلاثة حلول
- لما $m \in]1; +\infty[$ المعادلة تقبل حلان

أهراس

المشتقة: k قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها ودالتها المشتقة:

$k'(x) = -\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$ إشارة $k'(x)$

لدينا: $f'(x) = 0$ لما $x = 0$ و $f'(x) > 0$ لما $x > 0$ أو $x < 0$ ولدينا $\frac{-1}{x^2} < 0$

وعليه $f'(\frac{1}{x}) = 0$ لما $\frac{1}{x} = 0$ وهذا مستحيل و $f'(\frac{1}{x}) > 0$ لما $\frac{1}{x} > 0$ أو $\frac{1}{x} < 0$ أي لما $x > 0$ أو $x < 0$

إذن الدالة k متناقصة تماما على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$

تمرين 14

I) ❶ كتابة معادلة للمماس (T):

معادلة المماس (T) من الشكل $y = a'x + b'$ ونلاحظ أن (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ومنه $b' = 1$ ويشمل أيضا النقطة $B(-1;3)$ ومنه $-a' + 1 = 3$ أي $a' = -2$ إذن $y = -2x + 1$.

✯ لدينا: $f(x) = xe^{-x^2} + ax + b$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0$ وبالتالي المستقيم ذي المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) وبالمطابقة مع المستقيم (T) نجد $a = -2$ و $b = 1$

❷ إثبات أن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة لكل منهما:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} - 2 = e^{-x^2}(1 - 2x^2) - 2$

إذن $f'(x) = -2$ تكافئ $e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} - 2 = e^{-x^2}(1-2x^2) - 2 = -2$ ومنه $e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = 0$ أي $1 - 2x^2 = 0$ لأن $e^{-x^2} \neq 2$ وبالتالي $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه يوجد مماسين موازيان لـ (T) أحدهما عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{\sqrt{2}}$ والآخر عند النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

✯ كتابة معادلة للماسين (T') و (T''):

$$\begin{cases} (T') : y = -2(x - \frac{1}{\sqrt{2}}) + f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2x + \frac{e^{\frac{-1}{2}} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ (T'') : y = -2(x + \frac{1}{\sqrt{2}}) + f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2x - \frac{e^{\frac{-1}{2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

❸ المناقشة بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x) = -2x + m$:

$$\left]-\frac{e^{\frac{-1}{2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}; 1\right[$$

II) ❶ حساب نهايات الدالة h عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 1$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} h(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0} h(x) = \lim_{x\overset{<}{\to}0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = +\infty$$

❷ حساب $h'(x)$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة h على مجموعة تعريفها.

الدالة h قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها و $h'(x) = \frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$

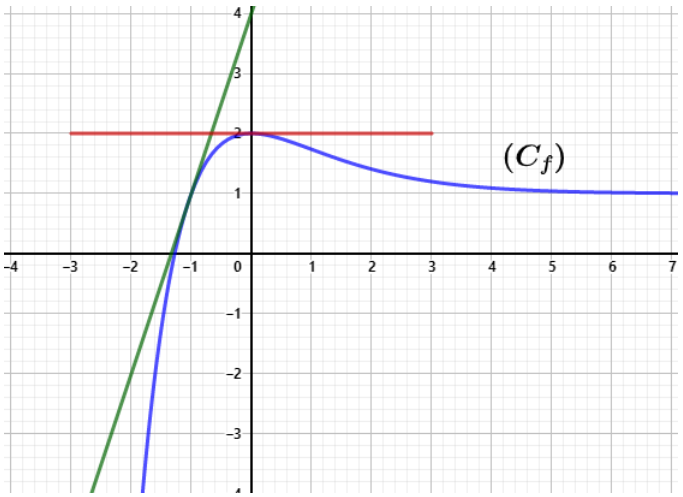
من $\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x}) >$ ' $\frac{1}{}$ /

أهراس

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	$+$	
$h(x)$	1 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	

تمرين 15

I) ❶ بقراءة بيانية:



أ) تعيين كلا من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر هذه الأخيرة بيانيا:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$.

ب) تعيين كلا من $f(0)$ ، $f(-1)$ ، $f'(0)$ ، $f'(-1)$:

$f(0) = 2$ ، $f(-1) = 1$

✯ $f'(0)$ معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها 0 والموازي لمحور الفواصل وعليه $f'(0) = 0$

✯ $f'(-1)$ معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها -1 وبما أن $(0;4)$ و $(-2;2)$ هما إحداثي نقطتين منهفإن: $f'(-1) = \frac{4-(-2)}{0-(-2)} = 3$

جـ) اعتمادا على ما سبق إيجاد قيمة كلا من a و b:

لدينا: $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} a(0) + be^0 + 1 = 2 \\ a(-1) + be^1 + 1 = 1 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} b + 1 = 2 \\ (-a+b)e + 1 = 1 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} b = 1 \\ (-a+1)e = 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

✯ استنتاج عبارة $f(x)$:

$f(x) = (x+1)e^{-x} + 1$

❷ أ) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.2 < \alpha < -1.4$:

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]-1.4;-1.2[$ ولدينا $f(-1.4) \times f(-1.2) < 0$ إذن

ب) استنتاج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

❸ أ) حساب كلّا من: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{h(x)-2}{x}$ و $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{h(x)-2}{x}$ ثم تفسير النتيجة بيانيا، (نقبل أن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1$)

لدينا:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x)-2}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(|x|+1)e^{-x}+1-2}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+1)e^{-x}-1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{xe^{-x}+e^{-x}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{xe^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}-1}{x}\right] = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{h(x)-2}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(|x|+1)e^{-x}+1-2}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(-x+1)e^{-x}-1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-xe^{-x}+e^{-x}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \left[\frac{-xe^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}-1}{x}\right] = -2$$

التفسير البياني: الدالة h غير قابلة للاشتقاق في النقطة التي فاصلتها 0 ومنحناها يقبل نصف مماس على يمين الصفر معامل توجيهه 0 ونصف مماس على يسار الصفر معامل توجيهه -2

II) ❶ أ) حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[x - \frac{x+2}{e^x}\right] = \lim_{x \to -\infty} x\left[1 - \frac{1+\frac{2}{x}}{e^x}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{x+2}{e^x}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right] = +\infty$$

ب) تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{x+2}{e^x} - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right] = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $+\infty$.

❷ أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $g'(x) = f(x)$:

✯ الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x) = 1 - \left(e^{-x} - (x+2)e^{-x}\right) = 1 - \left((1-x-2)e^{-x}\right)$

ومنه: $g'(x) = 1 + (x+1)e^{-x} = f(x)$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f:

إشارة $g'(x)$ من إشارة $f(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

✯ جدول التغيرات:

أهراس

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_g) في النقطة التي فاصلتها -1:

لدينا $(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ ومنه: $(T): y = x - e$

❹ تبيان أنّ $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1}$ ثم استنتاج إشارة $g(\alpha)$:

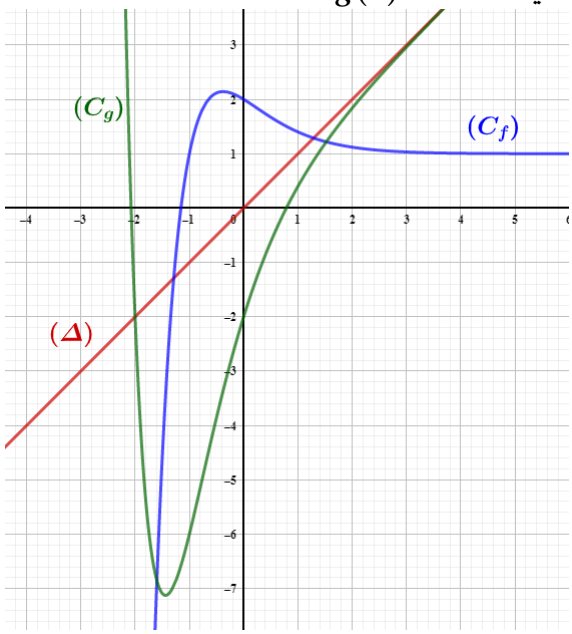
لدينا: $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1}$ ومن جهة أخرى لدينا: $f(\alpha) = 0$ تكافئ $(\alpha+1)e^{-\alpha} + 1 = 0$ ومنه:

$e^{-\alpha} = \frac{-1}{\alpha+1}$ وبالتعويض بقيمة $e^{-\alpha}$ في عبارة $g(\alpha)$ نجد: $g(\alpha) = \alpha - (\alpha+2)(\frac{-1}{\alpha+1}) = \alpha + \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$

$\alpha + \frac{\alpha+1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1}$

❹ أ) حساب $g(0)$ ثم إنشاء كلا من (Δ) ، (C_f) والمنحنى (C_g).

لدينا: $g(0) = -2$



ب) المناقسة بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x) = x + m$، حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + m$

- من أجل $m \in]-\infty; -e[$ المعادلة ليس لها حلول.
- من أجل $m = -e$ المعادلة لها حل مضاعف سالب تماما.
- من أجل $m \in]-e; -2[$ المعادلة لها حلان سالبان تماما.
- من أجل $m = -2$ المعادلة لها حلان أحدهما سالب والآخر معدوم.
- من أجل $m \in]-2; 0[$ المعادلة لها حلان مختلفان في الإشارة.
- من أجل $m \in [0; +\infty[$ المعادلة لها حل واحد سالب.

أهراس

❶ حساب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم التعبير عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ حيث g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f'(x) = 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x = x((x+2)e^{x-1} - 1) = xg(x)$

❷ دراسة تغيرات الدالة g

أ) حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)e^{x-1} + 1 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)e^{x-1} + 1 = +\infty .$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $g'(x) = e^{x-1} + (x+2)e^{x-1} = e^{x-1}(x+3)$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $x+3$ ومنه: $x+3=0$ أي $x=-3$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-3;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-3]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	$-e^{-4}-1$	↗	$+\infty$

ج) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ والتأكد أن: $0.20 < \alpha < 0.21$

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[-3;+\infty[$ ولدينا: $g(0.20) \times g(0.21) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.2 < \alpha < 0.21$

د) تعيين إشارة $g(x) = 0$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

❸ حسابات النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left[e^{x-1} - \frac{1}{2}\right] = +\infty$$

أهراس

❹ دراسة اتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $xg(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[0;\alpha]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

❺ إثبات أنّ: $f(\alpha)=\frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $e^{\alpha-1}(\alpha+2)-1=0$ أي: $e^{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha+2}$

ولدينا من جهة أخرى: $f(\alpha)=\alpha^2e^{\alpha-1}-\frac{\alpha^2}{2}=\frac{\alpha^2}{\alpha+2}-\frac{\alpha^2}{2}=\frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$

❻ أ) حساب $h'(x)$ ثم تعيين اتجاه تغير الدالة h على المجال $[0;1]$:

الدالة h قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ ولدينا: $h'(x)=\frac{-6x^2(x+2)+2x^3}{(2(x+2))^2}=\frac{-x^3-6x^2}{2(x+2)^2}=\frac{-x^2(x+6)}{2(x+2)^2}$

وبما أنه من أجل كل $x\in[0;1]$: $-x^2<0$ و $x+6>0$ و $2(x+2)^2>0$ فإن $h'(x)<0$ أي أن h متناقصة تماما على المجال $[0;1]$

ب) استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا: $0.2<\alpha<0.21$ وبما أن h متناقصة تماما على المجال $[0;1]$ فإن: $h(0.21)<h(\alpha)<h(0.2)$

أي $-0.0018<\frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}<-0.002$ وبالتالي: $-0.002<f(\alpha)<-0.0018$

❼ تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات، وهذا يعني أن $f(x)=0$ ومنه: $x^2(e^{x-1}-\frac{1}{2})=0$ يكافئ $x^2=0$ أو $e^{x-1}-\frac{1}{2}=0$ يكافئ $x=0$ أو $x=1-ln(2)$ ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطتين $(0;0)$ ، $(1-ln2;0)$

أهراس

I) ❶ تعيين قيميتي كلا من a و b

✯ (C_g) يقبل مماسيا في النقطة التي فاصلتها 1 موازيا لحامل محور الفواصل ويشمل $A(0;-1)$ معناه:

$$\begin{cases} g'(1)=0 \\ g(0)=-1 \end{cases}$$

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $g'(x)=(x+a+1)e^x$

$$\begin{cases} g'(1)=0 \\ g(0)=-1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} (a+2)e=0 \\ a+b=-1 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

وعليه: $g(x)=(x-2)e^x+1$

❷ أ) حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-2)e^x+1=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-2)e^x+1 \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x-2e^x+1=1$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $g'(x)=(x-1)e^x$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-1$

✯ $g'(x)=0$ تكافئ $x-1=0$ يكافئ $x=1$

✯ $g'(x)>0$ تكافئ $x-1>0$ يكافئ $x>1$

✯ $g'(x)>0$ تكافئ $x-1<0$ يكافئ $x<1$

✯ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

✯ الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$

❸ أ) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $-1.3<\alpha<-1.2$ و $1.9<\beta<1.8$:

✯ على المجال $[-1.3;-1]$:

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-1.3;-1]$ ولدينا: $g(-1)\times g(-1.3)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال: $[-1.3;-1]$.

✯ على المجال $[1.8;1.9]$:

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1.8;1.9]$ ولدينا: $g(1.9)\times g(1.8)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال: $[1.8;1.9]$.

ب) استنتاج من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) ❶ حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{1-e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-\frac{e^x}{x}\right)} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{1-e^x} = -\infty$$

❷ حساب كلا من $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ وتفسير النتائج بيانيا:

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{x-1}{1-e^x} = +\infty$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = \lim_{x\overset{<}{\to}0} \frac{x-1}{1-e^x} = -\infty$$

ومنه (C_f) يقبل محور التراتيب مستقيما مقاربا عموديا.

❸ أ) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(1-e^x)^2}$:
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{(1-e^x)-(x-1)(-e^x)}{(1-e^x)^2} = \frac{1+xe^x-2e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{1+(x-2)e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{g(x)}{(1-e^x)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f
لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{(1-e^x)^2}$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين: $]-\infty;\alpha[$ و $]\beta;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالين $[\alpha;0[$ و $]0;\beta]$

✯ جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\beta)$	↗	$+\infty$

❸ أ) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $-\infty$ معادلته $y = x-1$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x-1}{1-e^x}-(x-1)\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x-1)-(x-xe^x-1+e^x)}{1-e^x}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{xe^x-e^x}{1-e^x}\right] = 0$$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ).

أهراس

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$1-e^x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(x-1)$		$-$	‖	$+$		$-$	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

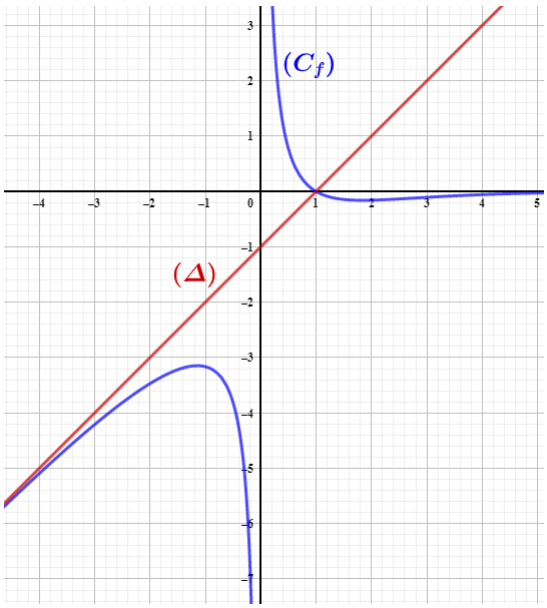
❺ تبيان أن $f(\alpha)=\alpha-2$ و $f(\beta)=\beta-2$ ثم تعيين حصرا لكل من $f(\alpha)$ و $f(\beta)$:

$f(\alpha)=\frac{\alpha-1}{1-e^{\alpha}}$ و $g(\alpha)=0$ ومنه $\begin{cases} f(\alpha)=\frac{\alpha-1}{1-e^{\alpha}} \\ (\alpha-2)e^{\alpha}+1=0 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} f(\alpha)=\frac{\alpha-1}{1-e^{\alpha}} \\ e^{\alpha}=\frac{-1}{(\alpha-2)} \end{cases}$ وعليه:

$f(\alpha)=\frac{\alpha-1}{1-\frac{-1}{\alpha-2}}=\frac{\alpha-1}{\frac{\alpha-1}{\alpha-2}}$ وبالتالي: $f(\alpha)=\alpha-2$ وبنفس الطريقة نجد: $f(\beta)=\beta-2$

❻ حساب $f(1)$ وإنشاء (C_f) و (Δ)

لدينا: $f(1)=0$



أهراس