

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

سلسلة الخليل

في

الأعداد المركبة

- ملخص شامل
- تمارينات مقترحة
- تمارين البكالوريات السابقة جميع الشعب من 2008 إلى 2020.

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:



ملخص شامل حول الأعداد المركبة:

تعاريف وخواص هامة في الأعداد المركبة

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ: $\mathbb{C}$
- **الشكل الجبري:** نسمي العبارة $z = x + iy$ بالشكل الجبري للعدد المركب z حيث: x و y عددان حقيقيان و i عنصر غير حقيقي ينتمي إلى $\mathbb{C}$ يحقق: $i^2 = -1$.
- يسمى x **بالجزء الحقيقي** لـ z ويرمز له بالرمز $Re(z)$.
- يسمى y **بالجزء التخيلي** لـ z ويرمز له بالرمز $Img(z)$.
- يسمى $\overline{z}$ **مرافق** العدد المركب z، حيث: $z = z - i(y)$.
- **بعض العمليات في $\mathbb{C}$:**

ليكن $z_n = x_n + iy_n$ أعداد مركبة، وليكن α عدد حقيقي، لدينا مايلي:

- $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2$
  $= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+uy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2-(iy)^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$; $z \neq 0$

- **خواص عدد مركب:**

- $z\overline{z} = \left(Re(z)\right)^2 + \left(Img(z)\right)^2 = x^2 + y^2$
- $z - \overline{z} = 2iIm(z) = 2iy$
- $z + \overline{z} = 2Re(z) = 2x$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ مع $z \neq 0$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ مع $w \neq 0$

- **ملاحظات:**

- اذا كان $y = 0$ نقول أن العدد z حقيقي.
- اذا كان $x = 0$ نقول أن العد z تخيلي صرف.
- يكون العدد المركب z معدوما اذا وفقط اذا كان $Re(z) = 0$ و $Im(z) = 0$

- **التفسير الهندسي للعدد المركب:**

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

لكل نقطة $M(x; y)$ من المستوي نرفق العدد المركب $z = x + iy$.

- نقول أن النقطة M هي صورة العدد المركب z ، والشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة العدد المركب z.

- كل نقطة M هي صورة العدد لعدد مركب وحيد $z = x + iy$ ، ونقول أن z **لاحقة** النقطة M.
- محور الفواصل يسمى **المحور الحقيقي** ومحور التراتيب يسمى **المحور التخيلي** والمستوي يسمى **المستوي المركب**.

لاحقة شعاع: A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي: $z_B - z_A$.

طويلة عدد مركب: نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بـ: $|z|$ حيث:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

خواص طويلة عدد مركب:

من أجل كل عددين مركبين z و w. A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب: $AB = |z_B - z_A|$

- $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
- $|z| \geq 0$
- $-|z| \leq Re(z) \leq |z|$
- $-|z| \leq Im(z) \leq |z|$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|-z| = |z|$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$
- $|z|^n = |z^n|$
- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ مع $w \neq 0$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $|z - w| \leq |z| - |w|$

التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب:

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{AB}{AC}$$

عمدة عدد مركب:

- نسمي عمدة العدد المركب z كل قيس زاوية بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

  ونرمز لها بالرمز: $\theta = \arg(z)$ حيث: $\tan\theta = \frac{y}{x}$.
- إذا كانت θ عمدة للعدد المركب غير المعدوم z مع $z = x + iy$ و $z \neq 0$ فإن:

$$|z| = r \quad ; \quad \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

- كل عدد مركب غير معدوم له عدد غير منته من العمد، أي إذا كانت θ عمدة لـ z فإن $\theta + 2k\pi$ عمدة له حيث $k \in \mathbb{Z}$.
- $\arg(0)$ و $\arg(\infty)$ غير معنيين.

- $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$

خواص عمدة عدد مركب غير معدوم:

- $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$
- $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$
- $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) + 2k\pi$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(w) + 2k\pi$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)$

التفسير الهندسي لعمدة عدد مركب:

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(z_B - z_A) - \arg(z_C - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AC})$$
$$= -(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) = -[(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AC})] = -(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$$
$$= (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$$

إذن:

$$\boxed{\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})}$$

الشكل المثلثي لعدد مركب: نسمي الكتابة: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بالشكل المثلثي للعدد المركب z،

حيث: $r = |z|$ و $\theta = \arg(z)$

ترميز أولر: نضع: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ، هذا الترميز يسمى ترميز أولر، حيث $e^{\wedge}i\theta$ عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له.

الشكل الأسي لعدد مركب: العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له، يكتب على الشكل:

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z.

دستور موافر:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad ، \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

خواص (دستور موافر):

z و w عددان مركبان، θ و α عمدتاهما على الترتيب، لدينا ما يلي:

- $z \cdot w = |z \cdot w| e^{i(\theta+\alpha)}$
- $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\theta-\alpha)}$ مع $|w| \neq 0$
- $\frac{1}{w} = \frac{1}{|w|} e^{i(-\alpha)}$ مع $|w| \neq 0$
- $\overline{z} = |z| e^{i(-\theta)}$
- $z^n = |z|^n e^{in\theta}$ حيث $n \in \mathbb{N}$
- $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}^*$
- $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

- $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$
- $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = i$
- $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = -i$
- $e^{i2k\pi} = 1$
- $e^{i(2k+1)} = -1 = i^2$

توطئة:

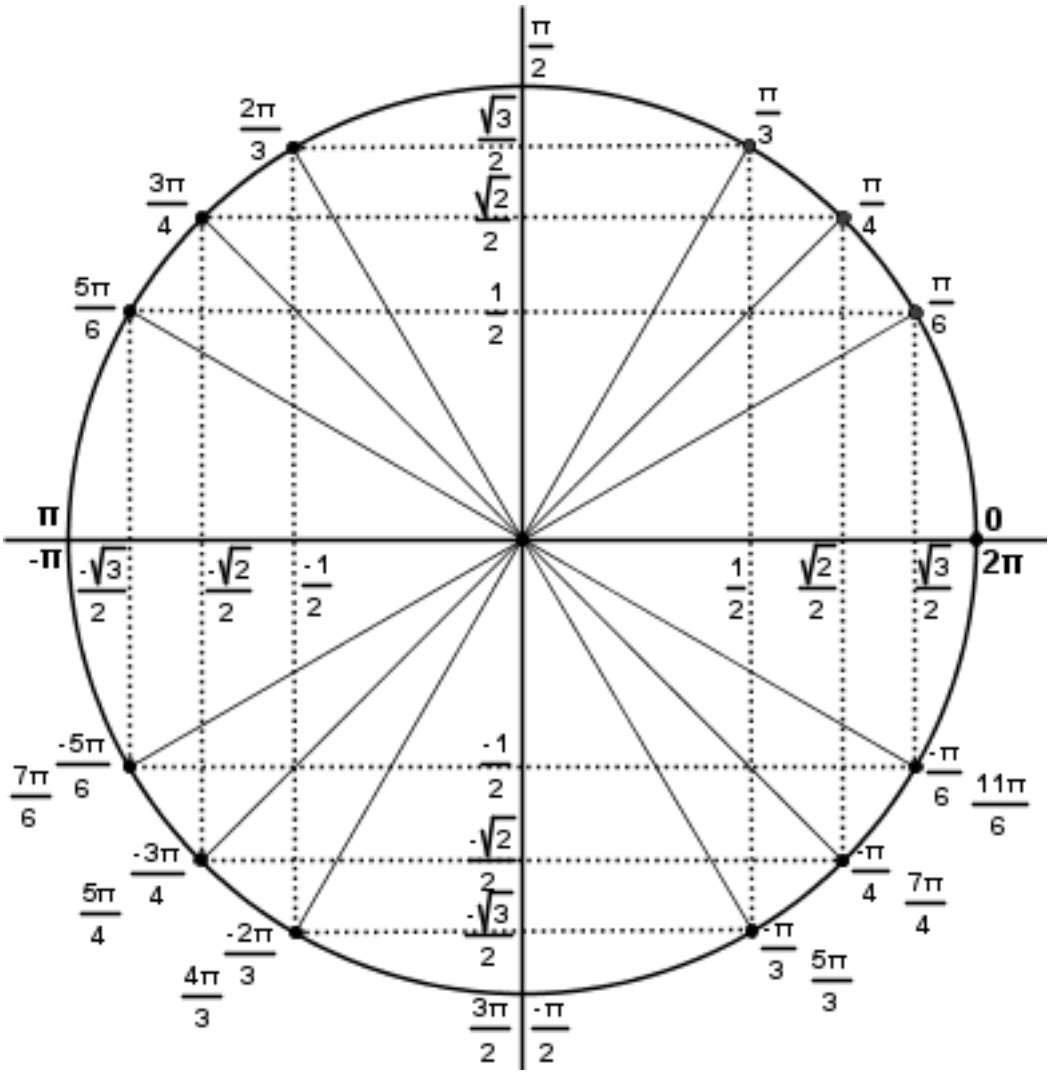
ليكن z عدد مركب، θ عمدة له، $r = |z|$ و $k \in \mathbb{Z}$ ، لدينا:

$$z = \underbrace{z+iy}_{\text{الشكل الجبري}} = \underbrace{r[\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)]}_{\text{الشكل المثلثي}} = \underbrace{re^{i(\theta+2k\pi)}}_{\text{الشكل الأسي}}$$

كيفية تعيين قيم العدد الطبيعي n:

- z عدد حقيقي غير معدوم يكافئ $\arg(z) = k\pi$
- إذن z^n عدد حقيقي غير معدوم يكافئ $n\cdot\arg(z) = k\pi$
- z عدد حقيقي موجب تماما يكافئ $\arg(z) = 2k\pi$
- إذن z^n عدد حقيقي موجب تماما يكافئ $n\cdot\arg(z) = 2k\pi$
- z عدد حقيقي سالب تماما يكافئ $\arg(z) = \pi + 2k\pi$
- إذن z^n عدد حقيقي سالب تماما يكافئ $n\cdot\arg(z) = \pi + 2k\pi$
- z تخيلي صرف غير معدوم يكافئ $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- إذن z^n تخيلي صرف غير معدوم يكافئ $n\cdot\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- z تخيلي صرف موجب تماما يكافئ $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- إذن z^n تخيلي صرف موجب تماما يكافئ $n\cdot\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- z تخيلي صرف سالب تماما يكافئ $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- إذن z^n تخيلي صرف سالب تماما يكافئ $n\cdot\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- z حقيقي يكافئ $\sin\theta = 0$
- z حقيقي موجب يكافئ $\sin\theta = 0$ و $\cos\theta \geq 0$
- z حقيقي حقيقي سالب يكافئ $\sin\theta = 0$ و $\cos\theta \leq 0$
- z تخيلي $\cos\theta = 0$
- z تخيلي صرف موجب يكافئ $\cos\theta = 0$ و $\sin\theta \geq 0$
- z تخيلي صرف سالب يكافئ $\cos\theta = 0$ و $\sin\theta \leq 0$

الدائرة المثلثية:



- **نتائج (من الدائرة المثلثية):** من أجل كل $k \in \mathbb{Z}$ لدينا:
  - $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$
  - $\sin(k\pi) = 0$
  - $\cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & ; \quad k \text{ زوجي} \\ -1 & ; \quad k \text{ فردي} \end{cases}$
  - $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} 1 & ; \quad k \text{ زوجي} \\ -1 & ; \quad k \text{ فردي} \end{cases}$
  - $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ يكافئ $\cos\theta = \sin\theta$
  - $\theta = \frac{\pi}{4} - k\pi$ يكافئ $\cos\theta = -\sin\theta$
- **علاقات مثلثية هامة:**
  - $\cos(\theta + \alpha) = \cos(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\theta)\sin(\alpha)$
  - $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta)\cos(\alpha) + \sin(\theta)\sin(\alpha)$

- $\sin(\theta+\alpha)=\sin(\theta)\cos(\alpha)+\cos(\theta)\sin(\alpha)$
- $\sin(\theta-\alpha)=\sin(\theta)\cos(\alpha)-\cos(\theta)\sin(\alpha)$
- $\cos^2(\theta)=\frac{1}{2}[\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta-\alpha)]$
- $\sin^2(\theta)=\frac{1}{2}[\cos(\theta-\alpha)-\cos(\theta+\alpha)]$
- $\sin(\theta)\cos(\alpha)=\frac{1}{2}[\sin(\theta+\alpha)+\sin(\theta-\alpha)]$
- $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$
- $\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1=1-2\sin^2(\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$
- $\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$
- $\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$
- $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$
- $\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$
- $\cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta)$
- $\sin(\pi+\theta)=-\sin(\theta)$
- $\cos(\pi+\theta)=-\cos(\theta)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(\theta)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin(\theta)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(\theta)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin(\theta)$
- $\sin(\theta+2k\pi)=\sin(\theta)$
- $\cos(\theta+2k\pi)=\cos(\theta)$
- $\sin(\theta+k\pi)=(-1)^k\sin(\theta)$
- $\cos(\theta+k\pi)=(-1)^k\cos(\theta)$

2 المرجح في المستوي المركب

- المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A ، B و C من المستوي.
  α ، β و γ أعداد حقيقية.
  - إذا كان: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ فإنع توجد نقطة وحيدة G من المستوي تحقق العلاقة الشعاعية التالية:
  $$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$
  تسمى هذه النقطة مرجح النقط A، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب، وتسمى أيضا مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$
  - اذا كان: $\alpha+\beta+\gamma=0$ فإن G تكون مركز ثقل الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$
- **خواص المرجع:**
  - إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ فإن النقطة G هي منتصف قطعة المستقيم (AB).

- اذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\alpha)\}$ فإن النقط A، B و G على استقامة واحدة.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\alpha);(C;\alpha)\}$ مع $\alpha \neq 0$ وكانت النقط A، B و C ليست على استقامية فإن: G هي مركز ثقل المثلث ABC.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ فإن G مرجح الجملة إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;k\alpha),(B;k\beta);(C;k\gamma)\}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ و H مرجح الجملة إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ فإن G مرجح الجملة: $\{(H;\alpha+\beta),(C;\gamma)\}$.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ فإنه من أجل نقطة M من المستوي يكون:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ فإنه من اجل أي نقطة M من المستوي يكون:

$$\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2$$

لاحقة المرجح:

إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ فإن لاحقة النقطة G تُعطى بالعبارة:

$$\boxed{z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}}$$

3 الدائرة وخصائصها

لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما $z_A=a_1+ia_2$ و $z_B=b_1+ib_2$ على الترتيب، لدينا:

- المعادلة الديكارتية للدائرة (C) ذات المركز I ذو اللاحقة $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$ وطول نصف القطر $r=\frac{\sqrt{|z_B-z_A|}}{2}$ تُعطى بالعبارة التالية:

$$x^2+y^2--x(a_1+b_1)-y(a_2+b_2)+a_2+b_2=0$$

- الدائرة المحيطة بالمثلث القائم يكون قطرها هو وتر هذا المثلث.
- الدائرة المحيطة بالمثلث المتقايس الأضلاع يكون مركزها هو ثقل هذا المثلث.
- إذا كان $|z_A-z_w|=|z_B-z_w|=|z_C-z_w|=r$ ، فإن النقط A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز w ونصف القطر r.

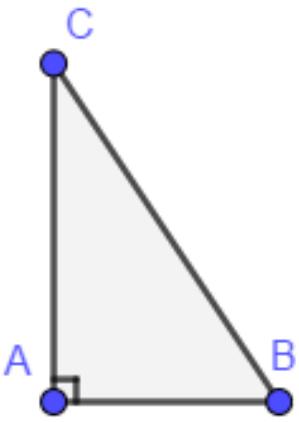
4 المستقيم وخصائصه

لتكن النقطت $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ ، C و D من المستوي.

المعادلة المختصرة لمستقيم تعطى بـ $y=ax+b$ حيث a هو ميل المستقيم أو معامل توجيهه و b الترتيبة عند المبدأ.

- معامل توجيه مستقيم مار من النقطتين A و B غير المتطابقتين يعطى بالعبارة : $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$
- معادلة المستقيم المار بالنقطة A والموازي لمحور الفواصل تعطى بالعبارة التالية: $y=y_A$.
- معادلة المستقيم المار بالنقطة A والموازي لمحور التراتيب تعطى بالعبارة التالية: $x=x_A$.
- يتوازى مستقيمان إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه.
- يتعامد مستقيمان إذا وفقط إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 .
- يتوازى مستقيمان إذا وفقط إذا كانا عموديان على نفس المستقيم.
- لاثبات أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيين يكفي إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا، ولأجل ذلك يكفي اثبات أحد العلاقات التالية:
  - $\overrightarrow{CD}=t\overrightarrow{AB}$
  - $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=t$ حيث $t\in\mathbb{R}^*$.
- لاثبات أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدين يكفي إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدين، ولأجل ذلك يكفي اثبات أحد العلاقات التالية:
  - $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
  - $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$
  - $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$
  - $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}=ki$ حيث $k\in\mathbb{Z}$
- لاثبات أن النقط $\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{C}$ في استقامية، يكفي اثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا

5 التعرف على طبيعة مثلث



- **المثلث القائم:**

إذا كان: $\boxed{\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=iy}$ حيث: $y\in\mathbb{R}^*-\{-1;1\}$

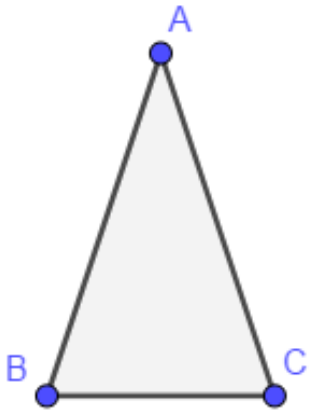
مع $z_A\neq z_C$ و $z_A\neq z_B$

فإن: المثلث ABC قائم في A في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\arg(iy)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ ;\ \ k\in\mathbb{Z}$$

المثلث متساوي الساقين:



إذا كان: $\boxed{\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=1}$ و $\boxed{\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\theta+2k\pi \;\;;\;\; k\in\mathbb{Z}}$

حيث: $\theta\neq\left\{\pm\frac{\pi}{2};\pm\frac{\pi}{3}\right\}$

مع $z_A\neq z_B$ و $z_A\neq z_C$

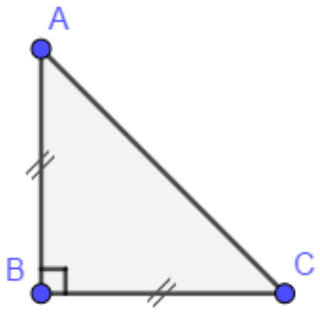
فإن: المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$AC=AB \Leftarrow \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{AC}{AB}=1$$

$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\theta+2k\pi \;\;;\;\; k\in\mathbb{Z}$$

المثلث القائم ومتساوي الساقين:



إذا كان: $\boxed{\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\pm i}$ مع $z_A\neq z_B$ و $z_A\neq z_C$

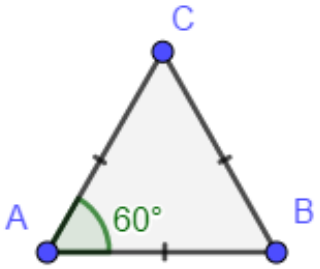
فإن: المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$AC=AB \Leftarrow \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{AC}{AB}=|\pm i|=1$$

$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\arg(\pm i)=\frac{\pi}{2}+k\pi \;\;;\;\; k\in\mathbb{Z}$$

المثلث المتقايس الأضلاع:



إذا كان: $\boxed{\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1}$ و $\boxed{\left\{\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \;\;;\;\; k\in\mathbb{Z}\right\}}$

مع $z_A\neq z_B$ و $z_A\neq z_C$

فإن: المثلث ABC متقايس الأضلاع رأسه A في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$AC=AB \Leftarrow \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{AC}{AB}=1$$

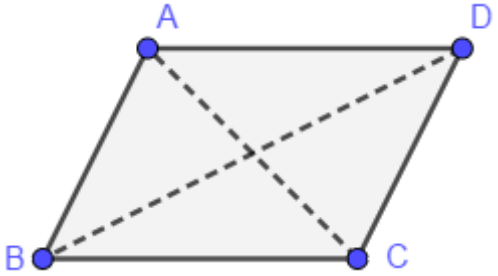
$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \;\;;\;\; k\in\mathbb{Z}$$

ملاحظات هامة:

- **الارتفاع** هو قطعة مستقيم تكون صادرة من رأس من رؤوس المثلث و تكون عمودية غلى الضلع المقابل و يمثل الارتفاع البعد بين الرأس و الضلع المقابل كما تتقاطع الارتفاعات في نقطة تسمى المركز القائم.
- **المحور** هو مستقيم يمر من أحد أضلاع المثلث في منتصفه و يكون عموديّا عليه و تتلاقى محاور مثلث في نقطة تسمى مركز الدائرة المحيطة بمثلث و يكون لهذه النقطة نفس البعد عن رؤوس المثلث الثلاث و يكون تقاطع محورين فقط كافيا لمعرفة مركز هذه الدائرة.

- **المتوسّط** هو قطعة مستقيم تنطلق من رأس من رؤوس المثلث و تمر من منتصف الضلع المقابل وتتقاطع الموسطات الثلاث في نقطة تسمى مركز ثقل المثلث و يكون تقاطع موسطين فقط كافيا لمعرفة مركز الثقل. كما يكون البعد بين رأس المثلث و مركز الثقل مساويا لـ $2/3$ المتوسط الصادر من ذلك الرأس.
- **المنصف**: هو مستقيم يمرّ من راس من رؤوس المثلث و يقسم الزاوية إلى نصفين و تتقاطع المنصفات الثلاثة في مركز الدائرة المحاطة بالمثلث وهي الدائرة التي تمسّ أضلاع المثلث الثلاث.

6 التعرف على طبيعة رباعي

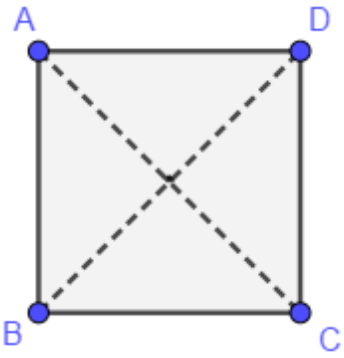


متوازي الأضلاع:

$ABCD$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي : $z_B - z_A = z_C - z_D$
- القطران متناصفان أي:

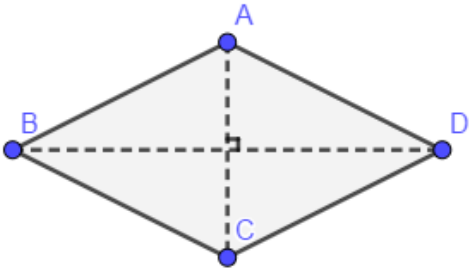
$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$



المربع:

$ABCD$ مربع إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

- اذا تحققت الشروط الثلاثة معا:
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي : $z_B - z_A = z_C - z_D$
  - $AB = AD$ أي: $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$
  - $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \pm\frac{\pi}{2}$ أي: $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$
- القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان أي اذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:
  - $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$
  - $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$
  - $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$



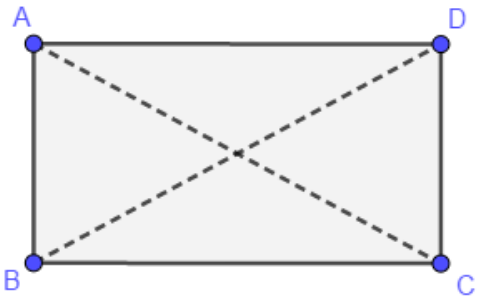
المعين:

$ABCD$ معين إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

- اذا تحقق الشرطين التاليين معا:
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي : $z_B - z_A = z_C - z_D$
  - $AB = AD$ أي: $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$

- القطران متناصفان ومتعامدان أي اذا تحقق الشرطين التاليين معا:
  - $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$
  - $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$

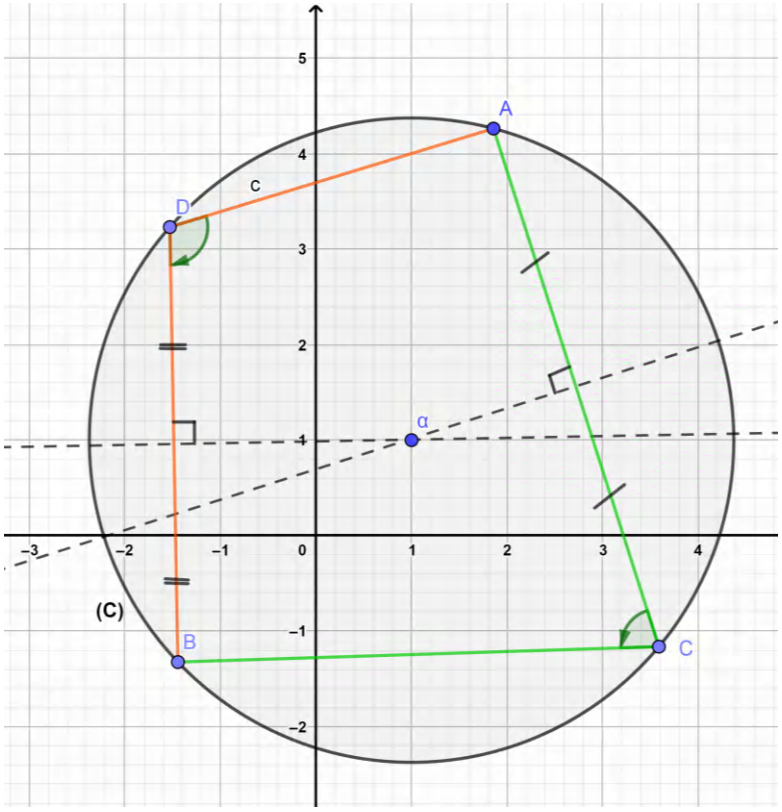
المستطيل:



$ABCD$ مستطيل إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

- اذا تحقق الشرطين التاليين معا:
  - $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي : $z_B-z_A=z_C-z_D$
  - $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$ أي: $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$
- القطران متناصفان ومتساويان أي اذا تحقق الشرطين التاليين معا:
  - $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$
  - $|z_B-z_A|=|z_D-z_A|$

نتيجة:



تكون النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة إذا تحقق أحد الشرطين التالين:

- أي: $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}) + k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) - \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

وهذا معناه أن الزاويتان $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ و $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB})$ متكاملتان.

- أو:

$$\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \cdot \left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}\right) = \alpha \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

7 المعادلات في $\mathbb{C}$

المعادلة $z^2 = a$: حيث: $a \in \mathbb{R}^*$

- إذا كان $a > 0$ فإن للمعادلة حلان هما: $z = \sqrt{a}$ ، $z = -\sqrt{a}$
- إذا كان $a < 0$ فإن للمعادلة حلان هما: $z = i\sqrt{-a}$ ، $z = -i\sqrt{-a}$

المعادلة $az^2 + bz + c = a$: حيث a، b و c أعداد حقيقية و $a \neq 0$

العدد $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى المميز.

- إذا كان $\Delta > 0$ فإن للمعادلة حلين مختلفين هما:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حل حقيقي مضاعف هو:

$$z = -\frac{b}{2a}$$

- إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين ومختلفين هما:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad ; \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

نتائج:

- $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$
- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ و $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$

8 مجموعات النقط في المستوي المركب

لنعتبر في كل ما سيأتي أن A، B و M نقط من المستوي المركب لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B و z

- $|az - z_A| = |z_O|$: مع $a; z_O \in \mathbb{C}^*$:
  - إذا كان $a = 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = |z_O|$
    $\left(AM = r \text{ يكافئ } |z - z_A| = |z_O|\right)$
  - إذا كان $a \neq 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة $\frac{z_a}{2}$ ونصف قطرها $r = \left|\frac{z_O}{a}\right|$
- $|z - z_A| = |kz_O - z_B|$: مع $k \in \mathbb{C}$ و $z_A \neq z_B$:
  - إذا كان $k = 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = |z_B|$.
  - إذا كان $k = 1$ فإن مجموعة النقط M هي محور قطعة المستقيم (AB)
    $\left(AM = BM \text{ يكافئ } |z - z_A| = |z - z_B|\right)$
  - إذا كان $k = -1$ فإن مجموعة النقط M هي محور قطعة المستقيم (AB') ، حيث B' لاحقتها هي: $z_{B'} = -z_B$
    $\left(AM = B'M \text{ يكافئ } |z - z_A| = |-z - z_B| = \left|-\left(z - (-z_B)\right)\right| = |z - z_{B'}|\right)$
  - إذا كان $k \in \mathbb{C}^*$ و $|k| \neq 1$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي دائرة قطرها $[GH]$، حيث G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (E; -k)\}$ و H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (E; k)\}$ مع E نقطة لاحقتها $z_E = \frac{z_B}{k}$.
- $(z - z_A)\overline{(z - z_A)} = |z_O|$: مع $z_O \in \mathbb{C}$:
  - إذا كان $z_O \neq 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = \sqrt{|z_O|}$
  - إذا كان $z_O = 0$ فإن مجموعة النقط M هي النقطة A.

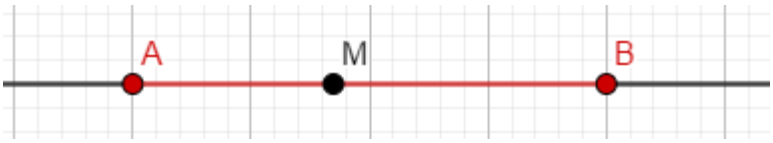
$\left(\overline{z} = \overline{z_A} \text{ أو } z = z_A \text{ هذا يعطينا } \overline{(z - z_A)} = 0 \text{ أو } (z - z_A) \text{ وعليه : } (z - z_A)(\overline{z - z_A}) = 0\right)$

- $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \theta$: مع $\theta \in \mathbb{R}$ و $z \neq z_A \neq z_B$:
  - إذا كان $\theta = 0 + 2k\pi$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة المستقيمة $]AB[$.



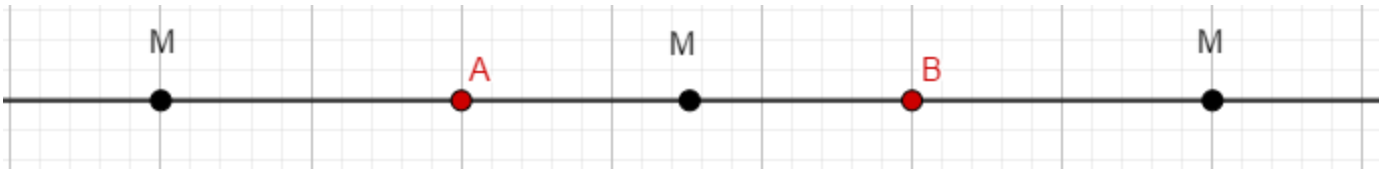
- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط-

  - إذا كان $\theta = \pi + 2k\pi$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي القطعة المستقيمة $]AB[$ باستثناء النقطتين A و B



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط-

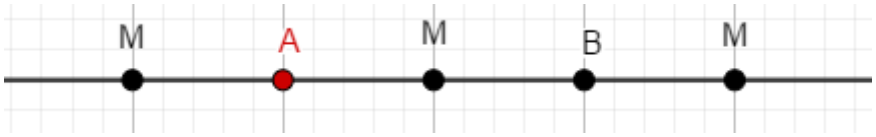
- إذا كان $\boldsymbol{\theta = 0 + k\pi}$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -

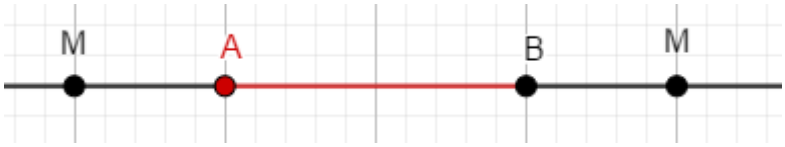
- $\boldsymbol{L = \frac{z-z_B}{z-z_A}}$: مع $z \neq z_A$:

- إذا كان $\boldsymbol{L}$ **حقيقي** فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة A ونرمز لها بالرمز $(AB) - \{A\}$.



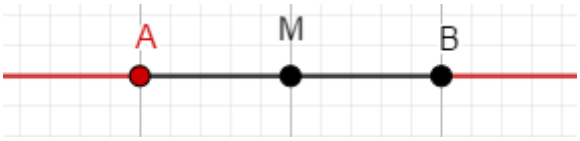
-شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط-

- إذا كان $\boldsymbol{L}$ **حقيقي موجب** فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB[$ ، ونرمز لها بالرمز $(AB) - [AB[$.



-شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط-

- إذا كان $\boldsymbol{L}$ **حقيقي سالب** فإن مجموعة النقط M من المستوي هي قطعة المستقيم $[AB]$ باستثناء النقطة A ، ونرمز لها بالرمز $[AB] - \{B\}$.



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -

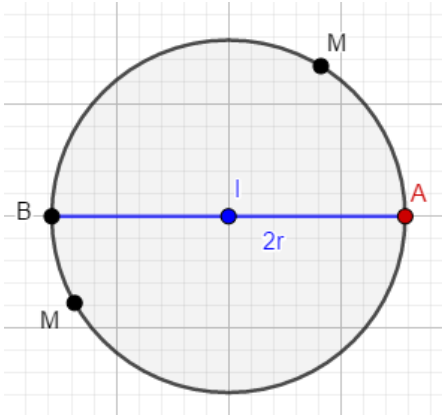
- إذا كان L **تخيلي صرف**: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي الدائرة التي مركزها النقطة I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطة A



-شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

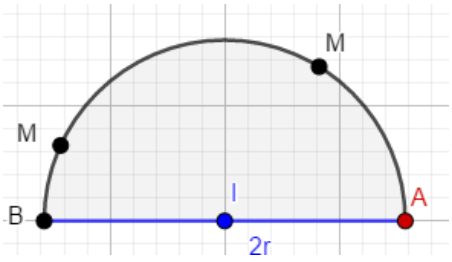
- إذا كان L **تخيلي موجب**: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع فوق المستقيم (AB) في الاتجاه المباشر) التي مركزها النقطة I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطة A



-شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

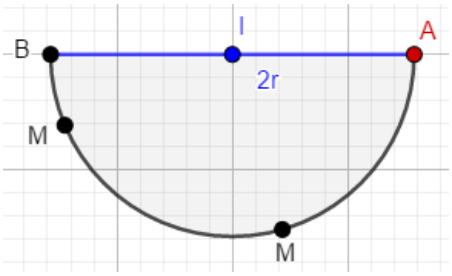
- إذا كان L **تخيلي سالب**: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع تحت المستقيم (AB) في الاتجاه المباشر) التي مركزها النقطة I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطة A



-شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

- $\boxed{arg(z - z_A) = \overline{arg(z - z_A)}}$: مع $z \neq z_A$

مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AM) الموازي لحامل محور الفواصل باستثناء النقطة A.

- $z = z_A + qe^{i\theta}$: مع $\theta \in \mathbb{R}$ (متغير) و $q \in \mathbb{R}^*$ (معلوم):

مجموعة النقط M من المستوي هي الدائرة التي مركزها النقطة A وطول نصف قطرها r حيث: $r = |q|$

- $z = z_A + qe^{i\theta}$: مع $\theta \in \mathbb{R}$ (معلوم) و $q \in \mathbb{R}^*$ (متغير):
  - إذا كان: $q \in \mathbb{R}$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \theta + k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$.
  - إذا كان: $q \in \mathbb{R}_+$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \theta + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$.
  - إذا كان: $q \in \mathbb{R}_-$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \theta + (2k+1)\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$.
- $arg(z - z_A) = arg(qz - z_B)$: مع $\theta \in \mathbb{R}$ (معلوم) و $q \in \mathbb{R}^*$ (متغير):
  - إذا كان: $q = 1$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B
  - إذا كان: $q = -1$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB') باستثناء النقطتين A و B' مع $z'_B = -z_B$.
  - إذا كان: $q = i$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع **فوق** المستقيم (AB') في الاتجاه المباشر) التي طول نصف قطرها r حيث: $r = \frac{AB'}{2}$ ومركزها النقطة I ذات اللاحقة $z_I = \frac{z_A + z_{B'}}{2}$ ، باستثناء النقطتين A و B' مع $z'_B = -z_B$
  - إذا كان: $q = -i$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع **تحت** المستقيم (AB') في الاتجاه المباشر) التي طول نصف قطرها r حيث: $r = \frac{AB'}{2}$ ومركزها النقطة I ذات اللاحقة $z_I = \frac{z_A + z_{B'}}{2}$ ، باستثناء النقطتين A و B' مع $z'_B = -z_B$

توجيه :

إذا صعب عليك تعيين مجموعة النقط فاستعمل الطريقة التحليلة وذلك بوضع $z = x + iy$، وركز جيدا في النشر والتبسيط والحساب.

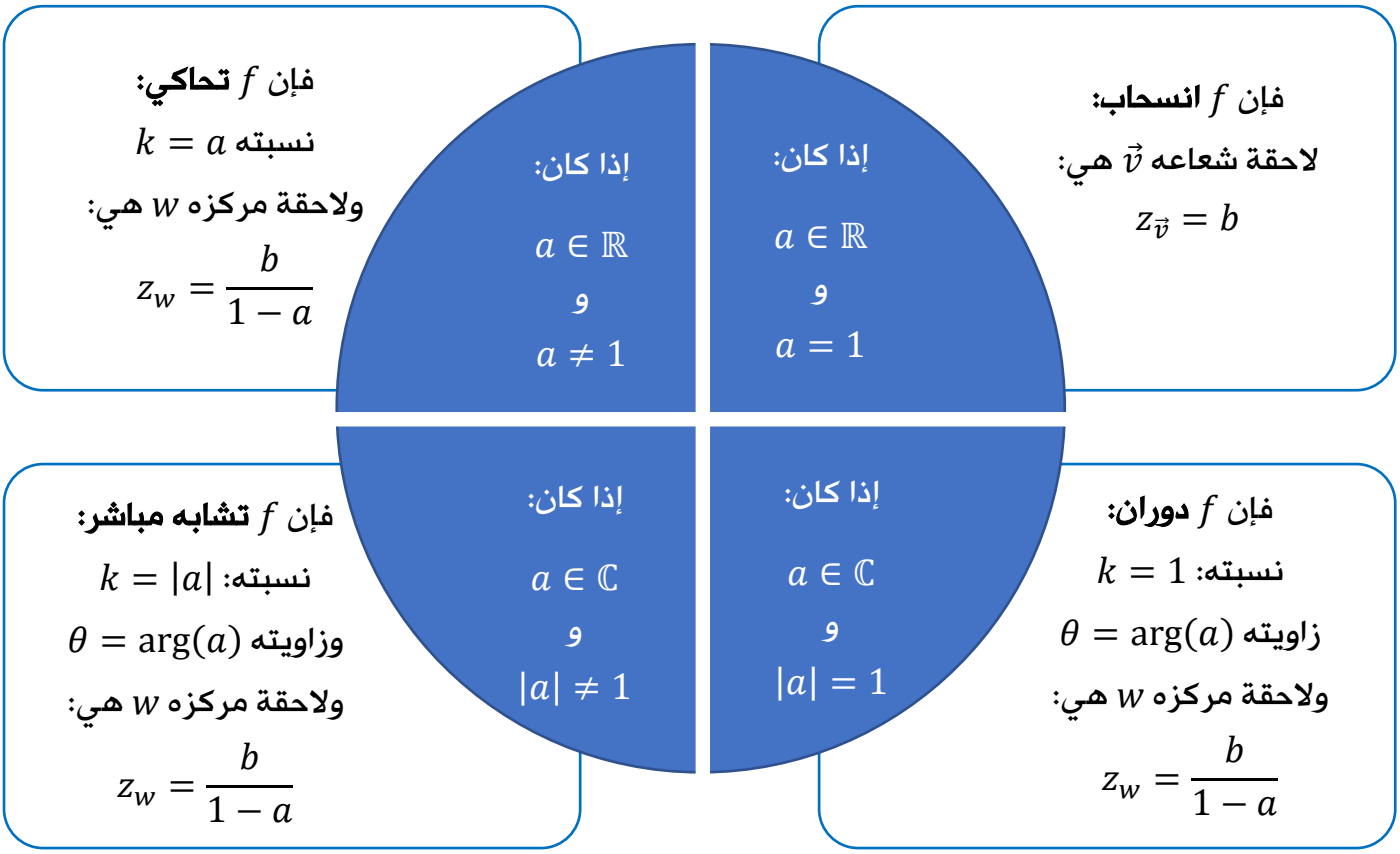
9 التحويلات النقطية في المستوي المركب

f تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$. والمعرف كما يلي:

$$f(z) = az + b$$

M' هي صورة النقطة M : $M' = f(M)$.

في حالة الشكل المركب: $\boxed{z' = az + b}$:



في حالة الشكل المركب: $\boxed{z' - z_w = a(z - z_w)}$:

- f تحاكي: نسبته k ولاحقة مركزه z_w. عبارته المركبة: $z' - z_w = k(z - z_w)$.
- f دوران: زاويته θ ولاحقة مركزه z_w. عبارته المركبة: $z' - z_w = e^{i\theta}(z - z_w)$.
- f تشابه مباشر: نسبته k وزاويته θ ولاحقة مركزه z_w. عبارته المركبة: $z' - z_w = ke^{i\theta}(z - z_w)$

تعيين تحويل نقطي يحول نقطتين :

يطلب السؤال بالشكل التالي:

أوجد طبيعة التحويل R الذي يحول النقطة A إلى النقطة B ويحول النقطة C إلى النقطة D مع تعيين عناصره المميزة.

$$\begin{cases} z_B = az_A + b \dots (1) \\ z_D = az_C + b \dots (2) \end{cases}$$

بطرح (2) من (1) نجد: $a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

من a نعين طبيعة التحويل R ، بعد ذلك نعوض قيمة a في (1) أو (2) ثم نجد العناصر المميزة للتحويل R.

الاستنتاج من علاقة أن نقطة هي صورة نقطة أخرى بتحويل:

اذا كان $a = \frac{z_B - z_w}{z_A - z_w}$ فإن: $z_B - z_w = a(z_A - z_w)$ وهذا يعني أن النقطة B هي صورة النقطة A بالتحويل الذي مركزه w، ويتم تحديد طبيعة التحويل من خلال قيمة كما ذكرنا سابقا.

تركيب التحويلات النقطية:

- تركيب عدة انسحابات هو انسحاب، شعاعه هو مجموع أشعتها.
- تركيب عدة تحاكيات لها نفس المركز هو تاحكي، له نفس المركز ونسبته هي جداء النسب.
- تركيب عدة دورنات لها نفس المركز هو دوران، له نفس المركز، وزاويته هي مجموع الزوايا.
- تركيب عدة تشابهات مباشرة لها نفس المركز هو تشابه مباشر، له نفس المركز ونسبته هي جداء النسب وزاويته هي مجموع الزوايا.
- اذا اختلفت مركز التحويلات النقطية أو كانت من طبائع مختلفة، نتعرف على طبيعة مركباتها باستعمال العبارة المركبة ونستعمل نفس الطريقة المستخدمة في تركيب الدوال العددية.



تطبيقات للتمرن

التطبيق 01
تعيين الشكل الجبري

1 اكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية:

① $z_1 = (2 + i\sqrt{3})(5 - i) + \left(\frac{1}{2} + 3i\right)^2$

② $z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+2i}$

③ $z_3 = \frac{1+4i}{1-\sqrt{2}i}$

التطبيق 02
حساب قوى العدد

1 احسب: i^3 ، i^4 ، i^5 ، i^6 ، i^7 ، i^8

2

① اثبت انه اذا كان العدد الطبيعي غير المعدوم n من مضاعفات 4 فإن $i^n = 1$.

② عين، حسب قيم العدد الطبيعي n ، i^n ، ثم استنتج i^2021..

التطبيق 03
تعيين مجموعة النقط

نعتبر العدد المركب $z = x^2 + y^2 - 4 + i(2x + y + 1)$ ، حيث x و y.

1 عين ثم أنشئ المجموعة (Γ_1) للنقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث يكون z عدد حقيقي.

2 عين ثم أنشئ المجموعة (Γ_2) للنقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث يكون z تخيلي صرف.

التطبيق 04
الاثبات دون حساب

ليكن العددان المركبان $z_1 = \frac{3-i}{5+7i}$ ، $z_1 = \frac{3+i}{5-7i}$

1. تحقق أنَ: $z_2 = \overline{z_1}$.
2. استنتج دون اجراء حساب أن $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي وأن $z_1 - z_2$ هو عدد تخيلي صرف.
3. احسب $z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$ وتحقق من صحة هذه النتائج.

التطبيق 05
استعمال الخواص والعمليات على المرافق

P هو كثير حدود معرف في $\mathbb{C}$ بـ: $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$

1. اثبت أنه من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
2. تحقق أن: $(1 + i)$ جذر لكثير الحدود P . ثم استنتج جذرا آخر لـ P.

التطبيق 06
تعيين مجموعة نقط بطريقتين

- عين في المستوي المركب، مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $Z = z^2 + \overline{z}$ حقيقي.

التطبيق 07
قراءة طويلة وعمدة عدد مركب

- مثل في المستوي المركب النقط ذات اللواحق التالية: 3 ، $2i - 4$ ، $-1 + i$ ، $2 - 2i$
ثم بدون حساب، وباعتبارات هندسية، اعطِ الطويلة وعمدة لكل عدد.

التطبيق 08
الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي

1. عين الطويلة وعمدة العدد المركب $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$
2. استنتج الشكل المثلثي للعدد z

التطبيق 09
التعرف على الشكل المثلثي لعدد مركب

في كل حالة من الحالات التالية، جد الطويلة وعمدة للعدد المركب z :

1. $z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$
2. $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
3. $z = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

التطبيق 10
حساب قوى عدد مركب

1. اعطِ الشكل الجبري للعدد المركب $z = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^5$
2. اعطِ الشكل الجبري للعدد المركب $z = \frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}+i\right)^3}$

التطبيق 11
مقارنة كتابة عددين مركبين واستنتاج القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

1. اكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية $z_1 = \sqrt{3} - i$ ، $z_2 = 1 - i$ ، $Z = \frac{z_1}{z_2}$

❷ اكتب Z على الشكل الجبري واستنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

التطبيق 12
تعيين مجموعة أعداد طبيعية

n عدد طبيعي، نضع $z=\left(\sqrt{3}+i\right)^n$.

❶ عين عمدة للعدد المركب z.

❷ استنتج المجموعة (E) قيم n التي يكون من أجلها z عدد حقيقي موجب تماما.

التطبيق 13
الانتقال من شكل إلى آخر

في كل حالة، اكتب العدد المركب z على الشكل الأسي، ثم استنتج الشكل الجبري لكل من $\overline{z}$ و $\frac{1}{z}$.

❶ $z=\frac{1}{1+i}$.

❷ $z=2ie^{i\frac{2\pi}{3}}$.

❸ $z=-7e^{i\frac{\pi}{6}}$.

التطبيق 14
استعمال الأشكال المختلفة لعدد مركب

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، (وحدة الرسم : $4cm$).

نعتبر النقط A، B، C و D ذات اللواحق على الترتيب: $a=1$ ، $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

❶ اكتب c على الشكل الأسي و d على الشكل الجبري.

❷

① مثل النقط A، B، C و D في المعلم السابق.

② برهن أن الرباعي $OACB$ هو معين.

التطبيق 15
حل معادلة من الدرجة الثانية

نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول z: $z^2 - 2(\sin\theta) + 1 = 0$ ، حيث θ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0;\pi[$.

1. تحقق أن $\Delta = -4\cos^2\theta$.
2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة المقترحة وتحقق أن حلول هذه المعادلة، تُكتب: $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ و $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$

التطبيق 16
حل معادلة من الدرجة الرابعة بمعاملات حقيقية

نعتبر كثير الحدود: $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$

1. اثبت أنه يوجد كثير حدود $Q(x)$ من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية حيث أنه من أجل كل عدد مركب z
$$P(z) = (z^2+1)Q(x)$$
2. استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة $P(z) = 0$.

التطبيق 17
حل معادلة باستعمال الشكل الجبري

- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - \overline{z} + \frac{1}{4} = 0$

التطبيق 18
استعمال نسبة أعداد مركبة

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب: $a=-2$ ، $b=2$ ، $c=-1+i$ و $d=1-3i$.

- اثبت أن المثلثين BCD و ACD قائمين.

التطبيق 19
تعيين مجموعة نقط

A و B نقطتان لاحقتاهما $z_A=1+i$ و $z_B=2i$.

نرفق بكل عدد مركب z ، $z\neq z_A$ العدد المركب

$$z'=\frac{z-2i}{z-1-i}$$

1. عين المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ ، حيث $|z'|=1$.
2. عين المجموعة (Ω) للنقط $M(z)$ ، حيث z حقيقي .
3. عين المجموعة (Δ) للنقط $M(z)$ ، حيث z تخيلي صرف

التطبيق 20
استعمال العبارة المركبة للتحاكي

h هو التحاكي الذي نسبته 2 ومركزه النقطة I ذو اللاحقة $1+i$. لتكن النقطة A ذات اللاحقة $(-1-2i)$.

1. عين العبارة المركبة للتحاكي h.
2. عين لاحقة النقطة A' صورة A بالتحاكي h .

التطبيق 21
استعمال العبارات المركبة

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A، B، C ، D و الشعاع $\vec{\omega}$ ذات اللواحق:

$z_A=\frac{3}{2}+6i$ ، $z_B=\frac{3}{2}-6i$ ، $z_C=-3-\frac{1}{4}i$ ، $z_D=3+2i$ ، $z_{\vec{\omega}}=-1+\frac{5}{2}i$

h هو التحاكي الذي مركزه C ونسبته $-\frac{1}{3}$ ، t هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{\omega}$ و r هو الدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

1. احسب لواحق النقط: $E = t(B)$ ، $F = h(D)$ و $G = r(D)$.
2. اثبت أن المثلث DEF قائم ومتساوي الساقين، واستنتج طبيعة الرباعي $DEFG$.

التطبيق 22
استعمال البرهان هندسيا

في المستوي المركب، ABC هو المثلث بحيث القيس الرئيسي للزاوية $(\overline{AB};\overline{AC})$ ينتمي إلى $]0;\pi[$.

- أنشئ خارج هذا المثلث، المربعين $ACRS$ و $BAMN$ ثم متوازي الأضلاع $MASD$ (وليكن I مركزه)

الهدف من التمرين هو اثبات أن المستقيم (AD) هو ارتفاع للمثلث ABC وأن $AD = BC$

لهذا نستعمل طريقتين:

- **ط1: استعمال الاعداد المركبة:**

a، b و c هي لواحق على الترتيب للنقط A، B و C

1. احسب لواحق النقطتين S و M بدلالة a، b و c.
2. احسب لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AD}$ ولاحقة الشعاع $\overrightarrow{BC}$.
3. اثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان، وأن $AD = BC$.

- **ط2: طريقة هندسية:**

ليكن r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

1. ما هي صور النقط M و C بالدوران r ؟
2. S' هي صورة S بالدوران r ، اثبت أن النقطة A هي منتصف القطعة المستقيمة $[CS']$.
3. I' هي صورة I بالدوران r ، اثبت أن النقطة I' هي منتصف القطعة المستقيمة $[BS']$.
4. استنتج ان المستقيم (AD) عمودي على المستقيم (BC) و أن $AD = BC$.



تمارين ومسائل للتعمق:

التمريـن 01

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B و C ذات اللاحقات على الترتيب: $z_A = 4$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$

1. عين الطويلة وعمدة للعدد z_B واستنتج طويلة وعمدة لـ z_C .
2. نعتبر العدد المركب $(z_B - z_A)$. اكتب هذا العدد على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي.
3. عين طويلة وعمدة للعدد $\frac{z_B}{z_B - z_A}$ ، واستنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_C}{z_C - z_A}$.
4. استنتج أن النقط O، A ، B و C تنتمي إلى دائرة يُطلب تحديدها.

التمريـن 02

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $a = 5 - i\sqrt{3}$ و $b = 4 + 2i\sqrt{3}$ ، ولتكن C منتصف $[OB]$.

1. عين d لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.
2. اثبت أن: $\frac{d-a}{d}$ تخيلي صرف، ما ذا تستنتج بالنسبة للمثلث ODA ؟
3. لتكن النقطة E ذات اللاحقة $e = \frac{2a}{3}$ ، احسب $\frac{d-b}{d-c}$. ماذا تستنتج بالنسبة إلى النقط B ، E و D ؟

التمريـن 03

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$،

1. نعتبر التحويل النقطي h الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = 3z + 4 - 6i$$

① حدد طبيعة التحويل h وعناصره المميزة.

② اكتب z بدلالة z' ؟

③ (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق $|z + 2 - 3i| = 1$. حدد المجموعة (Γ) ثم استنتج أن صورتها بالتحويل h هي دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

❷ A، B، C و D هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$z_A = i$ ، $z_B = 4 - 3i$ ، $z_C = -2 + 3i$ و $z_D = \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}$.

① بين أن النقطة D هي نقطة من حامل محور الفواصل يطلب تعيين فاصلتها.

② ما طبيعة المثلث ABC مع التبرير؟

التمرين 04

$P(z)$ كثير حدود حيث: $P(z) = (z + 1 + i)(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64)$

❶ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$ ، ثم اكتب الحلول على الشكل الأسي.

❷ نضع $a = -1 - i$ و $b = 4\sqrt{3} - 4i$

① اكتب $\frac{a}{b}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

② استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$

③ بين أن العدد $\left(\frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{a}{b}\right)^{144}$ حقيقي.

④ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، النقط A و B لواحقها على الترتيب a و b .

- عين لاحقة النقطة C حتى تكون النقطة O مركز ثقل المثلث ABC.

التمرين 05

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$.

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D ذات اللواحق بهذا الترتيب:

$z_A = 1 + i$، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_B = 2z_B$ و $z_D = 3$.

- علم هذه النقط في المعلم.

❸ اثبت أن النقط الثلاثة A، B و C تنتمي إلى دائرة مركزها D يطلب تعيين نصف قطرها.

❹ احسب $\frac{z_C - z_D}{z_A - z_D}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC.

❺ نعتبر النقطة C' صورة C بالتحاكي الذي مركزه D ونسبته 2 والنقطة E صورة النقطة F بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- اثبت أن المستقيمين (AC) و (EF) متعامدان.

التمرين 06

نعتبر من أجل كل عدد مركب z:

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$$

1

① عين العدد الحقيقي b بحيث يكون: $P(z) = (z-2)(z^2+bz+4)$

② حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

2 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر الأعداد المركبة:

$z_0 = 2$ ، $z_1 = \sqrt{2}(-1+i)$ ، $z_2 = \sqrt{2}(-1-i)$

① عين الطويلة وعمدة لكل من z_1 و z_2 .

② علم النقط A، B و C ذات اللواحق z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب، ثم النقطة I منتصف $[AB]$.

③ اثبت أن المثلث OAB متساوي الساقين، ثم استنتج قيس للزاوية $(\overline{u};\overline{OI})$.

④ احسب z_I لاحقة النقطة I، ثم طويلة z_I .

⑤ استنتج القيمتين المضبوطتين لـ $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

التمرين 07

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1 من أجل كل عدد مركب z، $Re(z^2) = \left(Re(z)\right)^2$.

2 z عدد مركب غير معدوم، في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C ذات اللواحق z ، $\overline{z}$ و $\frac{z^2}{\overline{z}}$ على الترتيب من نفس الدائرة ذات المركز O.

3 من أجل كل عدد مركب z:

إذا كان : $|1+iz| = |1-iz|$ فإن: $Img(z) = 0$

4 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، z و z' عددان مركبان غير معدومين.

M و M' نقطتان لاحقتيهما z و z' على الترتيب.

إذا كان $|z+z'| = |z-z'|$ فإن: المستقيمين (OM) و (OM') متعامدان.

التمرين 08

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1

① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-3z+3=0$

② نسمي z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب.

- اكتب العدد المركب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{3}}\right)$ على الشكل الأسي ثم احسب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{3}}\right)^6$

2 M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' نقطة من المستوي لاحقتها z' حيث: $z'=z^2-4z$

A، B و I ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب هي:

$z_A=2$ ، $z_B=-4$ و $z_I=-3$.

① احسب $(z'+4)$ بدلالة $(z-2)$، ثم استنتج $|z'+4|$ بدلالة $|z-2|$ و $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z+2)$.

② برهن أنه إذا كانت النقطة M من الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 2 فإن النقطة M' هي من دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

③ برهن أنه إذا كان الشعاع $\overrightarrow{AM}$ عموديا على الشعاع $\vec{u}$ فإن الشعاع $\overrightarrow{BM'}$ موازٍ للشعاع $\vec{u}$.

④ عين قيم العدد المركب z حتى يكون الرباعي $OMIM'$ متوازي الاضلاع.

التمرين 09

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب

$z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ و $z_C=4i$.

1

① علم النقط A، B و C.

② ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل اجابتك.

③ عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$

2 عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$$

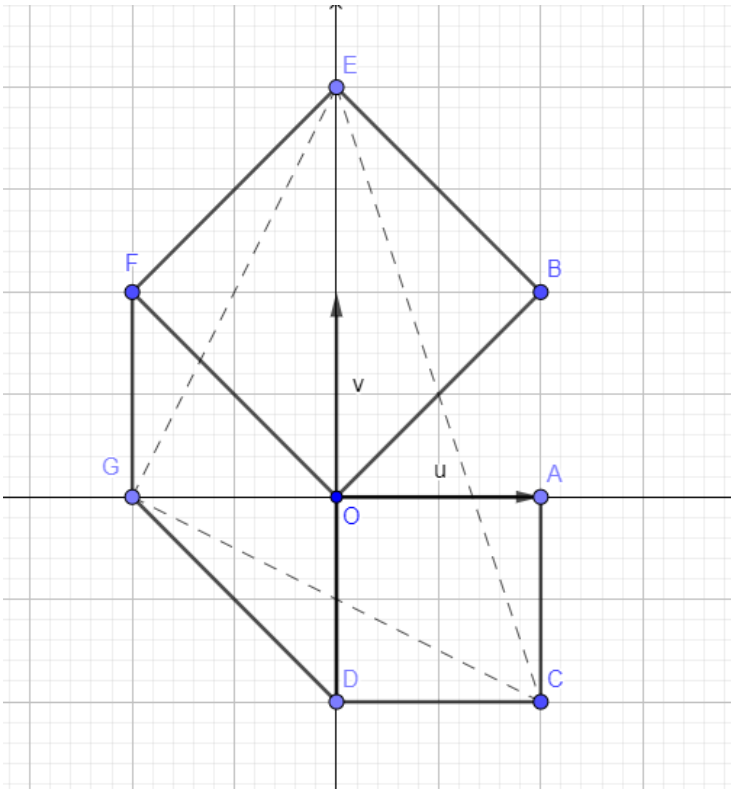
❸

① حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6z+13=0$ (نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة).

② لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب. عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$|z-z_0|=|z-z_1|$$

التمرين 10



المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر في هذا المستوي النقطة A ذات اللاحقة 1 ، النقطة B ذات اللاحقة b حيث b هو عدد مركب جزؤه التخيلي موجب تماما.

ننشئ خارج المثلث OAB ، المربعان المباشران $ODCA$ و $OBEF$ كما هو موضح في الشكل المقابل:

❶ عيّن الاحقتان c و d للنقطتين C و D على الترتيب.

❷ ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① عين الكتابة المركبة للدوران r

② استنتج أن اللاحقة f للنقطة F تساوي ib.

③ عين اللاحقة e للنقطة E.

❸ نسمي G النقطة التي من أجلها يكون الرباعي $OFGD$ متوازي أضلاع.

- اثبت أن اللاحقة g للنقطة G تساوي $i(b-1)$.

❹ اثبت أن: $\frac{e-g}{c-g}=i$ ، ثم استنتج أن المثلث EGC قائم ومتساوي الساقين.

التمرين 11

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z حيث $z\neq 2-3i$:

$$z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i} \dots (E)$$

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).
2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما على الترتيب: $a = 1\sqrt{5}i$ و $b = \overline{a}$
   - تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يُطلب تعيين نصف قطرها.
3. نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث:

$$z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$$

والنقط C، D و E لواحقها على الترتيب: $c = -2i$ ، $d = 2-3i$ و $e = 3i$

و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

① عبر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.

② استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، تحقق أن E تنتمي (γ).

التمرين 12

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A، B و C لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 1-i$ ، $z_B = -1+i$ و $z_C = \sqrt{3}(1+i)$.

1. اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة z_A، z_B و z_C.
2.
   ① احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم فسر هندسيا النتائج المحصل عليها.

   ② حدد طبيعة المثلث ABC.
3. عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACDB$ معينا.
4. T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = (-1+i)z + 1 - 3i$$

① عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

② عين العبارة المركبة للتحويل $T \circ T$ ، ثم استنتج طبيعته وعناصره المميزة.

التمرين 13

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

❶ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$

❷ علم النقط A، C ، D و I ذات اللاحقات: $z_A=3-2i$ ، $z_C=-3+i$ ، $z_D=-3-i$ و $z_I=1$

❸ z عدد مركب يُحقق الجملة:

$$\begin{cases}\arg(z-3+2i)=\arg(z-1)+\dfrac{\pi}{2}\\ |z-3+2i|=|z-1|\end{cases}$$

① بين أن الجملة تكافئ:

$$\frac{z-3+2i}{z-1}=i$$

ثم عين العدد المركب z

② B هي النقطة ذات اللاحقة $z_B=3$، تحقق أن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ، ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

③ لتكن E النقطة ذات اللاحقة $z_E=1-2i$.

- اكتب على الشكل الأسي العدد المركب Z حيث:

$$Z=\frac{z_A-z_E}{z_B-z_E}$$

- تحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}$. ما طبيعة الرباعي $ABIE$.

التمرين 14

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

❶ L هو العدد المركب حيث: $L=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$.

① احسب L^2 ، ثم عين الطويلة وعمدة للعدد المركب L^2.

② استنتج الطويلة وعمدة للعدد L واكتبه على الشكل المثلثي.

③ عين القيم المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

④ α هو العدد المركب حيث $\alpha=\frac{L}{2+2i}$ ، بين أن $\alpha=e^{i\frac{\pi}{6}}$

❷ T هو التحويل النقطي للمستوي في نفسه يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=-2\alpha z$.

① حدد طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

② A و B نقطتان لاحقتيهما على الترتيب $z_A = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ($\overline{z_A}$ هو مرافق z_A)

- عين لاحقتي النقطتين A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتحويل T.

❸ (γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق $|z - \sqrt{3} + i| = 2$.

① بين أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (γ).

② عين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (Γ) صورة المجموعة (γ) بالتحويل T .

التمرين 15

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

❶ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 + z + 1 = 0$

❷ نعتبر النقط A، B و M ذات اللاحقات: $2z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و z على الترتيب.

① اكتب z_A على الشكل الأسي.

② عين مجموعة النقط من المستوي حيث:

$$\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$$

❸

① التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = z_A z + z_B\sqrt{3}$

- ما طبيعة التحويل r . عين هناصره المميزة.

② التحاكي h ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = -2z + 3i$

- عين نسبة ومركز التحاكي h

③ نضع $S = h \circ r$. عين طبيعة التحويل s مبرزا عناصره المميزة، ثم تحقق أن عبارته المركبة هي:

$$z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i$$

❹ نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C، D و E حيث:

$S(O) = C$ ، $S(C) = D$ و $S(D) = E$

- بين أن النقط O، Ω و E في استقامية.

❺

① عين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث:

$$z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$$

حيث θ عدد حقيقي.

② عين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل (S).

التمرين 16

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$

وأعطِ الحلول على شكلها الجبري والأسي (مع التبرير)

❷ لتكن النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A=1+i$ و $z_B=2i$

نرفق لكل عدد مركب z يختلف عن z_A العدد المركب:

$$z'=\frac{z-2i}{z-1-i}$$

① لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' عدد تخيلي صرف. عين وأنشئ المجموعة (E).

② لتكن (F) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $|z'|=1$. عين وأنشئ المجموعة (F).

❸ ليكن R الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

① أحسب لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران R ولاحقة النقطة I' صورة النقطة $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ بهذا الدوران.

② ما هي صور كل من المجموعتين (E) و (F) بالدوران R.

التمرين 17

اختر الإجابات الصحيحة في كل ما يأتي مع التعليل:

في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

❶ لتكن المجموعة (E) للنقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z=1-2i+e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}^*$

① (E) هي المستقيم الذي يشمل النقطة ذات اللاحقة $1-2i$

② (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $1+2i$ ونصف قطرها 1.

③ (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $1-2i$ ونصف قطرها 1.

④ (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $1-2i$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$.

❷ ليكن f التطبيق الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=-iz-2i$.

① التطبيق f هو تحاكي.

② النقطة ذات اللاحقة $-1-2i$ هي سابقة للنقطة ذات اللاحقة i .

③ التطبيق f هو دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة $1+i$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

④ التطبيق f هو دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة $-1-i$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

❸ لتكن المجموعة (F) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق:

$$|z-1+i|=|z+1+2i|$$

وليكن A، B و C النقط ذات اللواحق $1-i$، $-1+2i$ و $-1-2i$ على الترتيب.

① النقطة C هي نقطة من المجموعة (F).

② (F) هي محور القطعة $[AB]$.

③ (F) هي محور القطعة $[AC]$.

④ (F) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$.

❹ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z+|z|^2=7+i$ ، هذه المعادلة تقبل:

① حلين متمايزين حيث جزؤهما التخيلي يساوي 1.

② حلا حقيقيا.

③ حلين متمايزين حيث الجزء التخيلي لأحدهما فقط يساوي 1.

④ حلا حيث جزؤه التخيلي يساوي 2.



تمارين بكالوريات سابقة:

شعبة علوم تجريبية

التمرين 01

بكالوريا 2008

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

4.5ن

❺

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2-(1+2i)z-1+i=0$$

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث: $|z_1|<|z_2|$

② بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.

❻ المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن A، B و C نقط من المستوي التي لاحقاتها على الترتيب 1، z_1 وz_2 .

وليكن Z العدد المركب حيث: $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

① انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ومن الخاصية: $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن: $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ وأن: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث: θ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية.

② اكتب Z على الشكل الأسي.

③ أكتب Z على الشكل المثلثي واستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A، يُطلب تعيين زاويته ونسبته.

التمرين 02

بكالوريا 2008

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

5ن

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2+iz-2-6i=0$$

❷ نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقطتين A وB التين لاحقتاهما z_A وz_B على الترتيب. حيث:

$$z_A=2+i \quad \text{و} \quad z_B=-2-2i$$

- عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

❸ لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث: $z_C = \frac{4-i}{1+i}$.

- اكتب z_C على الشكل الجبري، ثم اثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

❹

① برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ ونسبته k $(k > 0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي: $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

② تطبيق: عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ:

$$z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$$

التمرين 03

بكالوريا 2009

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

5ن

$P(z)$ كثير حدود حيث: $P(z) = (z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4)$ و z عدد مركب.

❶ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

❷ نضع: $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

① أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

② اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي.

③ استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

❸

① n عدد طبيعي، عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

② احسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$

التمرين 04

بكالوريا 2009

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

4ن

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

❶ حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 4 = 0$.

❷ نسمي z_1 و z_2 حلي هاته المعادلة

① اكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

② A، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$$z_A = 1 - i\sqrt{3} \quad ، \quad z_B = 1 + i\sqrt{3} \quad ، \quad z_A = \frac{1}{2}(5 - i\sqrt{3})$$

(i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق $i^2 = -1$)

- احسب الأطوال AB، AC و BC، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

③ جد طويلة وعمدة العدد المركب Z حيث:

$$Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$$

④ احسب Z^3 و Z^6، ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

التمرين 05 — 5ن

بكالوريا 2010

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب: $z_A = 1 + i$ و $z_B = 3i$.

❶ اكتب على الشكل الأسي: z_A و z_B.

❷ ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = 2iz + 6 + 3i$$

① عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

② عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S.

③ استنتج طبيعة المثلث ABC .

❸ لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; -2), (C; 2)\}$

① عين z_D لاحقة النقطة D.

② عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

❹ لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z، ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

① تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ).

② اعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ)

التمرين 06

4ن

بكالوريا 2010

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$، ثم اكتب الحلين على الشكل الأسي.

❷ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3 + 3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ ، $z_D = -z_B$.

① بين أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرى ذات المركز O مبدأ المعلم.

② عين زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى النقطة B.

③ بين أن النقط A، O و C في استقامية وكذلك النقط B، O و D.

④ استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين 07

5ن

بكالوريا 2011

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = -i$ ، $z_B = 2 + 3i$ ، $z_C = -4 + i$.

❶

① اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

② عين طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وعمدته، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

❷ نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق لكل نقطة M ذات اللاحقة z، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = iz - 1 - i$.

① عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

② ما هي صورة النقطة B بالتحويل T.

❸ لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$.

① بين أن النقط A، C و D في استقامية.

② عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A ويحول النقطة C إلى النقطة D.

③ عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى D.

التمرين 08 — 4ن

بكالوريا 2011

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B وC التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 3-2i$ ، $z_B = 3+2i$ ، $z_C = 4i$

1

① علم النقط A، B وC.

② ما طبيعة الرباعي $OABC$؟ علل إجابتك.

③ عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2 عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

3

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-6z+13=0$

نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة.

② لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z.

- عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $|z-z_0| = |z-z_1|$.

التمرين 09 — 4ن

بكالوريا 2012

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

1 نعتبر مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث: $z \neq 2-3i$)

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

2 ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، A وB نقطتان لاحقتاهما على الترتيب: z_A و z_B حيث: $z_A = 1+i\sqrt{5}$ و $z_B = 1-i\sqrt{5}$

- تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3 نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z، $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C، D، E لواحقها على الترتيب: $z_B=-2i$، $z_D=2-3i$ و $z_E=3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

① عبر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.

② استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها. تحقق أن E تنتمي إلى (γ).

التمرين 10 — 4.5ن

بكالوريا 2012

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

❶ $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$.

① تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

② جد العددين الحقيقين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z: $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$

③ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z) = 0$.

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب: $z_A = 6$، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$.

① اكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

② اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

③ استنتج طبيعة المثلث ABC.

❸ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① جد الكتابة المركبة للتشابه S.

② عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S.

③ بيّن أن النقط A ، B و A' في استقامية.

التمرين 11 — 5ن

بكالوريا 2013

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

❶ حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (1) ذات المجهول z التالية:

$z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0 \ldots (1)$ حيث α وسيط حقيقي.

❷ من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$، نرمز إلى حلي المعادلة (1) بـ z_1 و z_2

- بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$.

❸ نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B وC التي لواحقها:
$z_A = 1+i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1-i\sqrt{3}$ ، $z_C = 4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

① أنشئ النقط A، B و C.

② اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب نعيين نسبته وزاويته.

③ عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$، ثم أنشئ G.

④ احسب z_D لاحقة النقطة D، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

التمرين 12 — 4.5ن

بكالوريا 2013

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:

$$z^2+4z+13=0 \dots (E)$$

❶ تحقق أنالعدد المركب $-2-3i$ حل للمعادلة (E)، ثم جد الحل الآخر.

❷ A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب، S التشابه المباشر الذي مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى نقطة $M'(z')$.

① بين أن $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$

② احسب z_C لاحقة النقطة C، علما أن C هي صورة B بالتشابه S.

❸ لتكن النقطة D، حيث: $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

① بين أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقين بمعاملين حقيقين يطلب تعيينهما.

② احسب z_D لاحقة النقطة D .

③ بين أن: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}$، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD.

التمرين 13 — 5ن

بكالوريا 2014

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة: $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$.

❷ المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A، B ، C و D التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{}$ و $z_D = \frac{z_C}{2}$.

① اكتب z_A، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي.

② احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

③ بين أن النقط O، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D، يطلب تعيين نصف قطرها.

④ احسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$. ما هي طبيعة الرباعي $OACB$؟

❸ ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① اكتب العبارة المركبة للدوران R.

② عين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط C، A و C' في استقامية.

③ عين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R.

التمرين 14 — 4ن

بكالوريا 2014

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث:

$$(z-i)(z^2-2z+5)=0$$

❷ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، تعطى النقط A، B و C التي لاحقاتها: $z_A = i$ ، $z_B = 1+2i$ و $z_C = 1-2i$ على الترتيب.

① أنشئ النقط A ، B و C.

② جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

③ احسب مساحة المثلث ABC.

❸ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① عين الكتابة المركبة للتشابه S.

② بين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$.

❹ M نقطة لاحقتها z، عين مجموعة النقط M حيث: $|z| = |iz+1+2i|$.

التمرين 15 — 4.5ن

بكالوريا 2015

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

I) عين العددين المركبين α و β حيث: $\begin{cases} 2\alpha-\beta=-3 \\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β.

II) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، A، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_A=z_C\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

1

① اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي، ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

② تحقق أن العدد المركب $\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.

2 D النقطة ذات اللاحقة $z_D=1+i$.

① حدد النسبة وزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول D إلى A.

② اكتب z_A/z_D على الشكل الجبري، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3 عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z=k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^*$.

التمرين 16 — 5ن

بكالوريا 2015

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B و z_C حيث: $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ و $z_C=-(z_A+z_B)$ ، ($\overline{z_A}$ هو مرافق z_A).

1

① اكتب كلا من العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسي.

② استنتج أن النقط A، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

③ أنشئ الدائرة (γ) والنقط A، B و C.

2

① تحقق أن $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

② استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع، وأن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

③ عين وأنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.

❸

① عين زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A.

② اثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

التمرين 17 — 4.5ن

بكالوريا 2016 – الدورة الاولى

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث:

$$z' = \frac{z-2}{z-1}$$

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z' = z$.

❷ النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 حيث: $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = \overline{z_1}$.

① اكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي.

② بين أن النقطة B هي صورة للنقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O، يُطلب تعيين زاوية له.

❸ نضع $z' \neq z$، نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.

- عين (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب، ثم أنشئ (Γ).

❹ h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2.

① عين طبيعة التحويل $S = h \circ R$ وعناصره المميزة.

② اكتب العبارة المركبة للتحويل S.

③ عين ثم أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل النقطي S.

التمرين 18 — 4.5ن

بكالوريا 2016 – الدورة الاولى

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة:

$$\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$$

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، A، B و C نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$

① اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

② بين أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحول النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

❸

① عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع، ثم حدد بدقة طبيعته.

② عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|z-z_A|=|\overline{z}-z_B|$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق z.

③ عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$.

التمرين 19 — 4ن

بكالوريا 2016 – الدورة الثانية

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

❹ نضع من أجل كل عدد مركب z: $p(z)=z^3-24\sqrt{3}$.

① تحقق أن: $p\left(2\sqrt{3}\right)=0$.

② جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z: $p(z)=\left(z-2\sqrt{3}\right)(z^2+az+b)$.

③ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$.

❺ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A=-\sqrt{3}+3i$، $z_B=-\sqrt{3}-3i$ و $z_C=2\sqrt{3}$.

① اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

② بين أنه يوجد دوران r مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C، يطلب تعيين زاويته.

③ استنتج طبيعة المثلث ABC.

④ عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

❻ عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث:

$\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=2k\pi$ حيث: $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين 20 — 4.5ن

بكالوريا 2016 – الدورة الثانية

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(E) \dots 2\overline{z}^3 + 3\overline{z}^2 - 3\overline{z} + 5 = 0$

يشير الرمز $\overline{z}$ إلى مرافق العدد المركب z.

1. ① اثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة $(2\overline{z} + 5)(\overline{z}^2 - \overline{z} + 1) = 0$.

② حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر النقط A ، B، C و D من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -1$ و $z_D = -\frac{5}{2}$.

① اكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسي.

② أنشئ النقط A، B، C و D.

③ اثبت أن: $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$

④ استنتج طبيعة المثلث ABC.

3. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته 2 ولتكن F صورة A بالتحويل S. أنشئ النقطة F ثم حدد طبيعة المثلث AFC.

4. عين طبيعة المجموعة (Γ) لنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z + 1 = kz_B$. لما يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

التمرين 21 — 5ن

بكالوريا 2017

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z + 2)(z^2 - 4z + 8) = 0$.

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها: $z_A = 2 - 2i$، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$.

① اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي.

② عين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD.

③ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث: $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$.

- تحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ)، ثم عين طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

④ ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h.

- عين طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة.

التمرين 22 — 5ن

بكالوريا 2017

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

❸ مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي: $S=\left\{-\frac{1}{2};i\right\}$

❹ من أجل كل عدد مركب z، $|z+2|^2=(z+2)\times(\overline{z}+2)$.

❺ من أجل كل عدد طبيعي n، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$.

❻ S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $(\omega'-2;-3)$ ونصف القطر 9.

❼ من أجل كل عدد حقيقي α: إذا كان: $Z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$

فإن: $\arg(Z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

التمرين 23 — 5ن

بكالوريا 2017 – الدورة الاستثنائية

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، حيث: $\|\vec{u}\|=2cm$ ، لتكن النقط A، B و C التي لاحقاتها: $z_A=2$، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$ ($\overline{z_B}$ هو مرافق z_B).

❶

① اكتب العدد z_B على الشكل الأسي، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد المركب z_C.

② عين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC، ثم أنشئ النقط A، B و C.

❷ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

① اكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم عين لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالتشابه S ثم أنشئ في المعلم السابق النقط A' ، B' و C'.

② احسب بالسنتمتر المربع مساحة المثلث $A'B'C'$.

التمرين 24 — 5ن

بكالوريا 2017 – الدورة الاستثنائية

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها $z_A = -3-2i$ ، $z_B = 1+i$ و $z_C = 4-3i$.

❶ عين النسبة وزاوية للتشابه المباشر S ذي المركز A والذي يحول النقطة B إلى النقطة C.

❷ اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

❸ نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC وبـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$.

- عين كلا من z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I، ثم بين أن النقط B ، G و I في استقامية.

❹ نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة I ، حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

❺ نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\| = 5\sqrt{2}$

① تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ).

② عين طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها.

التمرين 25 — 5ن

بكالوريا 2018

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2 - \sqrt{3}\,z + 1 = 0$.

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B و z_C حيث:

$z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$، $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ و $z_C = \overline{z_B}$ (يرمز لـ $\overline{z_B}$ لمرافق z_B).

- اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي، ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

❸

① تحقق أن: $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدد طبيعة الملث OBC.

② استنتج أن: B هي صورة C بدوران r يُطلب تعيين عناصره المميزة.

❹ نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق $|z| = \left|\overline{z} - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$

- عين طبيعة المجموعة (γ) ثم عين صورتها بالدوران r.

التمرين 26 — 5ن

بكالوريا 2018

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(\overline{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$،

(يرمز $\overline{z}$ لمرافق العدد z).

❷ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A = 2 + i$ ، $z_B = 4 + i$ و $z_C = \overline{z_A}$.

① تحقق أن $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

② D نقطة من المستوي لاحقتها z_D حيث: $\begin{cases} |z_D - z_A| = |z_B - z_A| \\ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

- بين أن المثلث ABD متقايس الأضلاع واحسب z_D.

③ احسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD، ثم عين نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D.

④ عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث:

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

التمرين 27 — 5ن

بكالوريا 2019

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z-i)(z^2-4z+5)=0$.

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B و C والتي لاحقاتها i، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب.

1) اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

2) من أجل كل عد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع $f(z)=\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$

① عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|f(z)|=\frac{1}{2}$.

② بين أن العدد $\left(f(i)\right)^{1440}$ حقيقي موجب.

3) نعتبر الدوران r الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

① عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r ، وبين أن النقط D، A و C في استقامية.

② استنتج أن D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره.

التمرين 28 — 5ن

بكالوريا 2019

شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2z_A$.

1)

① اكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسي.

② احسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

2)

① T الانسحاب الذي يحول A إلى C، عين z_D لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T.

② استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

3) اكتب العدد المركب z_C-z_A على الشكل الأسي.

4 جد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها العدد المركب $\left(-\frac{6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.

5 لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C.

- عين (E) مجموعة النقط M التي من أجلها يكون $\frac{z_A-z}{z_C-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.



تمارين بكالوريات سابقة:

شعبة تقني رياضي

التمرين 01 — 4ن

بكالوريا 2008

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)$ المعرفة كما يلي:

$$z^3 + (2-4i)z^2 - (6+9i)z + 9(-1+i) = 0 \dots (*)$$

1. بين أن $z_0 = 3i$ هو حل للمعادلة $(*)$.
2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)$ ، ثم اكتب حلولها z_0، z_1 و z_2 على الشكل الأسي حيث: $|z_1| < |z_2|$.
3. لتكن A، B و C صور الحلول z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.
   - عين النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.
4. ① عين المجموعة (E) للنقط M حيث: $AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$
   ② بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ثم أنشئ (E).
5. تحقق أن النقط O، B و G في استقامية ، ثم عين صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة O ويحول B إلى G محددا عناصره المميزة.

التمرين 02 — 4ن

بكالوريا 2008

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كيفي.

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$$z^2 - 2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)z - r^2 = 0$$

   - اكتب الحلين على الشكل الأسي.
2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B صورتي الحلين.
   - عين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع.

التمرين 03 — 4ن

بكالوريا 2009

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

❶

① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$ حيث z هو المجهول.

② استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول $(\overline{z} + 3)^2 - 2(\overline{z} + 3) + 2 = 0$ حيث $\overline{z}$ مرافق z.

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$،

النقط A، B و M لواحقها $(1 - i)$ ، $(1 + i)$ و z على الترتيب.

① عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث $z = 1 - i + ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}_+$.

② عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $|z - 1 + i| = |z - 1 - i|$

التمرين 04 — 4ن

بكالوريا 2009

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

❸ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 18 = 0 \dots (1)$

❹ ليكن العدد المركب z_1 حيث: $z_1 = 3 - 3i$ (i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

① اكتب z_1 على الشكل الأسي.

② احسب طويلة العدد z_3 وعمدة له حيث: $z_1 \times z_3 = 6\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

③ استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

❺ نعتبر في المستوي المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، النقط A، B و C ذات اللاحقات $3 + 3i$ ، $3 - 3i$ و $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$ على الترتيب.

① عين قيم العدد الحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; -1), (C; \alpha)\}$ مرجحا نرمز له بالرمز G_α.

② عين مجموعة النقط G_α لما يتغير α في $\mathbb{R}_+$.

التمرين 05 — 5ن

بكالوريا 2010

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$

(i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمده له).

2 علم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، C ، D و I ذات اللاحقات:

$z_A=3-2i$ ، $z_C=-3+i$ ، $z_D=-3-i$ و $z_I=1$ على الترتيب.

3 z عد مركب يحقق الجملة: $\begin{cases}\arg(z-3+2i)=\arg(z-1)+\frac{\pi}{2}\\ |z-3+2i|=|z-1|\end{cases}$

① بين أن الجملة تكافئ: $\frac{z-3+2i}{z-1}$ ثم عين قيمة z.

② B النقطة التي لاحقتها $z_B=3$، تحقق أن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

4 لتكن J النقطة التي لاحقتها z_J حيث: $z_J=1-2i$.

① اكتب على الشكل الأسي العدد المركب Z حيث : $Z=\frac{z_A-z_I}{z_B-z_J}$.

② تحقق أن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$. ما طبيعة الرباعي $ABIJ$؟

التمرين 06 — 5ن

بكالوريا 2010

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

1

① اكتب على الشكل الأسي العدد المركب α حيث: $\alpha=-2+2i\sqrt{3}$

(i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمده له).

② حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2=-2+2i\sqrt{3}$

2 ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

النقط A، B و C التي لاحقاتها $z_A=-2$ ، $z_B=-1-\sqrt{3}i$ و $z_C=1+\sqrt{3}i$ على الترتيب.

① احسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له.

② استنتج طبيعة المثلث ABC.

3 لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(\overline{z}+2)=\frac{\pi}{3}$.

① تحقق أن B تنتمي إلى (E).

② عين المجموعة (E).



نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $zz^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)، ثم اكتب حلولها على الشكل المثلثي.

❷ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A، B و C التي لاحقتها على الترتيب: $z_A = 2i$ ، $z_B = \sqrt{3} + i$ و $z_C = \sqrt{3} - i$، نضع: $L = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

① اكتب L على الشكل الأسي.

② أثبت أن: $z_A - z_B = L(z_C - z_B)$، ثم استنتج أن A هي صورة C بتحويل نقطي يطلب تعيينه وتحديد عناصره المميزة.

③ استنتج نوع المثلث ABC ثم احسب مساحته.



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

L العدد المركب المعرف كما يلي: $L = -\frac{4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$

❶

① اكتب L على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي.

② بين أن: $L^{12} + 1 = 0$، ثم احسب: $(-4\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12} + (5 + 3i)^{12}$

③ n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي، اثبت أن: $L^{4n} + L^{4p} = 0$.

❷

① النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = 5 + 3i$ و $z_B = 5 - 3i$ ، عين اللاحقة $z_{A'}$ للنقطة A' صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة B ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

② عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA'.

التمرين 09 — 6ن

بكالوريا 2012

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

❶ عين العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث: $\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9 - 2i \\ 3z_1 - z_2 = 8 + 8i \end{cases}$

❷ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، النقط A، B و Ω التي لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B و z_Ω حيث: $z_A = 3 + 2i$ ، $z_B = -3$ و $z_\Omega = 1 - 2i$.

① اثبت أن $z_B - z_\Omega = i(z_A - z_\Omega)$.

② عين طبيعة المثلث ΩAB.

❸ h هو التحاكي الذي مركزه النقطة A ونسبته 2.

① عين الكتابة المباشرة للتحاكي h.

② عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحاكي h.

③ عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة D مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$.

④ بين أن $ABCD$ مربع.

❹ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$.

① تحقق أن النقطة B تنتكي إلى المجموعة (E)، ثم عين طبيعة (E) وعناصرها المميزة.

② أنشئ المجموعة (E).

التمرين 10 — 5ن

بكالوريا 2012

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z:

$$(z^2 + 2z + 4)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right) = 0$$

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A، B، C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ ، $z_C = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_D = -1 + i\sqrt{3}$

① اكتب كلا من z_A ، z_B، z_C وz_D على الشكل الأسي.

② تحقق أن: $i = \frac{z_D - z_B}{z_A - z_C}$، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

❸ z_n العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2\pi}{3}$ عمدة له، حيث n عدد طبيعي

L_n العدد المركب المعرف بـ: $L_n = z_D \times z_n$

① اكتب كلا من L_0، L_1 على الشكل الجبري.

② (u_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n = |L_n|$

- اثبت ان المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- M_0، M_1، ...، M_n صور الأعداد المركبة L_0، L_1، ...، L_n على الترتيب

- احسب بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n = \|\overrightarrow{OM_0}\| + \|\overrightarrow{OM_1}\| + \cdots + \|\overrightarrow{OM_n}\|$

- جد نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين 11 — 5ن

بكالوريا 2013

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $2z^2 + 6z + 17 = 0$.

❷ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. النقط A، B و C لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = -4$ ، $z_B = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$ و $z_C = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$.

- احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

❸

① عين z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه A.

② عين (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}\| = 10\sqrt{2}$

❹ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي، ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z + 4) = \frac{\pi}{4}$.

- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2)، ثم عين المجموعة (Γ_2)

التمرين 12 — 4.5ن

بكالوريا 2013

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z+5-i\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$.

❷ المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1+\sqrt{3}i$ و $z_C=-5+i\sqrt{3}$.

S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C ويحول O إلى B.

- جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S، ثم عين العناصر المميزة له.

❸

① عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة: $\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}$.

② اكتب العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABD.

③ عين المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث: $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

التمرين 13 — 5.5ن

بكالوريا 2014

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z-i)(z^2+2\sqrt{3}z+4)=0$.

❷ المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نسمي A، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب: $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{3}-i$ و $z_3=i$.

① اكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي.

② هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا؟ برر اجابتك.

❸

① عين العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى C، محددا نسبته وزاويته.

② استنتج طبيعة المثلث ABC .

❹

① عين العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق:

$|z-z_1|^2=|z-z_3|^2=5$

② عين (E') مجموعة النقط M التي لاحقتها z حيث: $|z-z_1|=|z-z_3|$

التمرين 14 — 4.5ن

بكالوريا 2014

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

❶ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطة A ذات اللاحقة

$$z_0 = 1+i$$

① عين ثم أنشئ (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + 2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}_+$.

② عين ثم أنشئ (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + ke^{i\frac{3\pi}{4}}$ و k يمسح $\mathbb{R}_+$.

③ عين احداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ').

❷ نسمي B النقطة التي لاحقتها z_1 حيث: $z_1 = z_0 + 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

① عين الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1-z_0}{z_0}$، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

② عين z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

③ عين العددين الحقيقين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A;\alpha),(C;\beta)\}$ و $\alpha+\beta=\sqrt{2}$

④ عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\left((1+\sqrt{2})\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$$

التمرين 15 — 4ن

بكالوريا 2015

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب z_A و z_B حيث: $z_A = 1-i$ و $z_B = 3+3i$.

❶

① اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

② n عدد طبيعي، عيم قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا.

③ z عدد مركب حيث: $\frac{z}{z_A} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$، احسب طويلة العدد z وعمدة له، ثم اكتب z/z_A على الشكل الجبري.

④ استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

❷

① احسب اللاحقة z_C للنقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$، واستنتج طبيعة المثلث ABC.

② احسب z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;1),(C;1)\}$، ثم بين أن $ABCD$ مربع.

التمرين 16 — 5ن

بكالوريا 2015

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2 - 4(\sin\theta)z + 4 = 0 \ldots (*)$

حيث θ وسيط حقيقي.

❷ من أجل $\theta = \frac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة $(*)$ بـ z_1 و z_2، اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

❸ نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ و $z_C = 3\sqrt{3} + i$.

① اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي. واستنتج طبيعة المثلث ABC.

② استنتج أن النقطة C هي صوة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويُطلب تعيين نسبته وزاويه له.

③ عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$، ثم حدد طبيعة الرباعي $ABCD$.

❹

① عين (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ تخيلي صرف مع $z \neq z_B$.

② عين (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ حقيقيا مع $z \neq z_B$.6

التمرين 17 — 4ن

بكالوريا 2016

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $9z^2 - 6\sqrt{3}z + 4 = 0$.

❷ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$.

① اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي.

② بين أن $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437} = 0$.

③ عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا.

❸ f التحويل الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' = \left(\frac{z_A}{z_B}\right) z$.

① عين طبيعة التحويل النقطي f وعناصره المميزة.

② احسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f.

③ عين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

التمرين 18 — 4.5ن

بكالوريا 2016

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

❶

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(2z - \sqrt{2}) = 0$$

② اكتب الحلول على الشكل الأسي.

❷ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C من المستوي التي لواحقها على الترتيب: $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

① علم النقط A، B و C في المعلم السابق.

② نعتبر النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S الذي مركزه A ونسبته 3 وزاويته π والنقطة E صورة C بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

- احسب اللاحقتين d و e للنقطتين D و E على الترتيب.

❸ نضع: $z = \frac{d-b}{e-b}$.

① اكتب العدد المركب z على الشكل المثلثي.

② نعتبر النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[DE]$ ، F نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة I

- ما طبيعة الرباعي $BDFE$؟

التمرين 19 — 5ن

بكالوريا 2017

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لواحقها:

$$z_A=-1 \quad ، \quad z_B=2+i \quad ، \quad z_C=-i$$

1. اكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.
2. عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه C ويحول B إلى A.
3. نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى C والنقطة E صورة D بالتشابه S.
   ① عين z_D لاحقة النقطة D ، ثم تحقق أن: $z_E=1-2i$ حيث: z_E لاحقة النقطة E.
   ② حدد طبيعة الرباعي $ADEB$.
4. (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث:

$$\arg(z-z_A)-\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

- تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ)، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

التمرين 20 — 5ن

بكالوريا 2017

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D التي لواحقها:

$$z_A=1+i \quad ، \quad z_B=\overline{z_A} \quad ، \quad z_C=\frac{1}{2}(1-i) \quad \text{و} \quad z_D=\overline{z_C}$$

1.
   ① اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي، ثم استنتج الشكل الأسي للعددين z_B و z_D.
   ② عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n=(z_B)^n$

2.
   ① أوجد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحول D إلى A ويحول C إلى B.
   ② احسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$.
3. جد z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;2),(C;-1),(D;-1)\}$.

❹ لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|=\sqrt{5}$

- بين أن A من(Γ) ، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة وأنشئها.

التمرين 21 — 5ن

بكالوريا 2017 – الدورة الاستثنائية

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(z-4)(z^2-2z+4)=0$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها

$z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$

❶ اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

❷

① عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

② عين طبيعة الرباعي $ABDC$.

❸ من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $z_n=(z_B)^n+(z_C)^n$.

① بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $z_n=2^{n+1}\times\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

② نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $t_n=z_{6n}$.

- عبر عن t_n بدلالة n ثم احسب P_n حيث: $P_n=t_0\times t_1\times t_2\times\ldots\times t_n$

التمرين 22 — 5ن

بكالوريا 2017 – الدورة الاستثنائية

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$(z+1-\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها

$z_A=-1+\sqrt{3}$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$

❶ بين أن $(z_C-z_A)=z_B-z_A$، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته.

❷

① اكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث: $L=\frac{z_C-z_A}{z_C}$.

② بين أن: $L = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ: $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

③ نعتبر التحويل النقطي S الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' والمعرفة بـ:

$$z' = (z - z_B)L + z_B$$

- بين أن S تشابه مباشر يُطلب تعيين عناصره المميزة.

④ لتكن النقط A' ، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالتحويل $S \circ S$.

- احسب مساحة المثلث $A'B'C'$.

التمرين 23

5ن

بكالوريا 2018

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما:

$z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $z_B = \overline{z_A}$ ($\overline{z_A}$ يرمز إلى مرافق z_A).

① اكتب على الشكل الأسي كلا من العددين z_A و $\frac{1}{z_B}$ ، ثم بين أن العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف.

② لتكن C صورة B بالتحكاي h الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ونسبته (-3).

- بين أن لاحقة النقطة C هي $z_C = -\sqrt{2} + i3\sqrt{2}$.

③ احسب z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

④

① بين أن: $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = -i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

② اوجد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي $ACED$ مربعا.

التمرين 24

5ن

بكالوريا 2018

شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

I)

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $4z^2 - 2z + 1 = 0$

❷ اكتب العددان $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسي حيث: z_1 و z_2 حلا المعادلة (E).

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها

$z_A = 4$ ، $z_B = 1+i\sqrt{3}$ و $z_C = 1-i\sqrt{3}$.

❶

① احسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم حدد طبيعة المثلث ABC.

② استنتج أن B هي صورة النقطة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته.

❷ أوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ و استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

❸ حدد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق ما يلي:

$$|iz+\sqrt{3}-i| = |z-1+i\sqrt{3}|$$

❹ بين أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ) .

التمرين 25 — 5ن

بكالوريا 2019

شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها

$z_A = 1+i$ ، $z_B = 2+i$ و $z_C = \frac{3}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(Γ) الدائرة التي مركزها A وطول نصف قطرها 1.

❶

① تحقق أن النقطة C من الدائرة (Γ).

② عين قيسا بالراديان للزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ ، ثم استنتج أن C صورة B بالدوران r الذي مركزه A يطلب تعيين زاويته.

❷ S التشابه المباشر الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

① حدد العناصر المميزة للتشابه S.

② عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالتشابه S.

❸ ما هي نسبة التحاكي h الذي مركزه A حيث: $S = h \circ r$ ؟ استنتج أن النقط A، C و D في استقامية.

❹ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث: $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k \in \mathbb{R}_+^*$

- تحقق أن النقطة C من المجموعة (E)، ثم حدد طبيعة (E).

I)

1. تحقق أن: $(2-2\sqrt{3})^2 = 16-8\sqrt{3}$
2. عين على الشكل الجبري الجذريين التربيعيين L_1 و L_2 للعدد المركب Z حيث: $Z = -16\sqrt{3}-16i$.

II)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها $z_A = 4e^{i\frac{\pi}{3}} + 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_B = \frac{1}{2}iz_A$ و $z_C = -\frac{1}{4}z_A$.

1. اكتب z_A على الشكل الجبري، ثم بين أن: $z_A = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.
2. استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقين: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.
3. S التشابه المباشر الذي يحول A إلى B ويحول B إلى C.

لتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالتشابه S.

① بين أن: $z' = \frac{1}{2}iz$.

② حدد العناصر المميزة للتشابه S.

4. G النقطة ذات اللاحقة z_G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;4)\}$.

① بين أن: $z_G = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

② (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث:

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{2}$$

- حدد طبيعة المجموعة (E) وعناصرها المميزة، ثم احسب محيط (E') صورة (E) بالتشابه S.



تمارين بكالوريات سابقة:

شعبة رياضيات

التمرين 01

5ن

بكالوريا 2008

شعبة رياضيـــــات

الموضوع الثاني

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما:

$\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب.

1. اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول A إلى B، ثم عين زاويته ونسبته.
2. نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي: $A_0 = A$ و من اجل كل عدد طبيعي n:

$A_{n+1} = S(A_n)$. نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n.

① أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 ، A_1 و A_2.

② برهن أن: $z_n = 2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{npi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$.

③ عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1).

3. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = A_0A_1$ و $u_n = A_nA_{n+1}$. من أجل كل عدد طبيعي n.

① بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 وأساسها q.

② استنتج عبارة u_n بدلالة n.

③ احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين 02

5ن

بكالوريا 2008

شعبة رياضيـــــات

الموضوع الأول

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي:

$$P(z) = 2z^2 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$$

1. بين أنه إذا كان α جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{\alpha}$ جذر له أيضا.
2. تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.
3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.
4. اكتب الحلول على الشكل الأسي.

❺ لتكن النقط A ، B ، C و D النقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ والتي لاحقاتها على الترتيب: $1+i$ ، $-1+i$ ، $-\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$ و $\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$

حيث m عدد حقيقي، عين m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا.

التمرين 03 — 4ن

بكالوريا 2009

شعبة رياضيـــات

الموضوع الثاني

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب $f(z)$ حيث: $f(z)=\frac{z-i}{z-i}$

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$

❷ لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

① عين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عدا حقيقيا سالبا تماما.

② احسب العدد المركب z_0 بحيث: $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$.

❸ في المستوي المركب نعتبر النقط A، B و C صور الأعداد المركبة 1، i و z_0 على الترتيب.

① ما نوع المثلث ABC؟

② عين النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) واستنتج طبيعة الرباعي $ACBD$.

التمرين 04 — 4.5ن

بكالوريا 2010

شعبة رياضيـــات

الموضوع الأول

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3-3z^2+3z-9=0\ ...\ (E)$.

❶

① تحقق أن 3 حلض للمعادلة (E)، ثم عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب z فإن:

$$z^3-3z^2+3z-9=(z-3)(az^2+bz+c)$$

② حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

❷ المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B و C صور الأعداد المركبة

$z_A=3$ ، $z_B=i\sqrt{3}$ ، $z_C=-i\sqrt{3}$

- بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

❸ D النقطة التي لاحقتها $z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و E صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

- عين z_E لاحقة النقطة E.

❹ F النقطة التي لاحقتها $z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

① احسب $\frac{z_F}{z_E}$ ، واستنتج ان المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان.

② عين z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا.

التمرين 05

بكالوريا 2010

شعبة رياضيـــات

الموضوع الثاني

5ن

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

❶ نسمي A ، B و I التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = 1 - 4i$ ، $z_B = -1 - 2i$ و $z_I = 1 - 2i$.

① علم النقط A، B و C.

② اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$.

③ ما هو نوع المثلث IAB؟

④ C صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2. احسب اللاحقة z_C للنقطة C.

⑤ D مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$. احسب اللاحقة z_D للنقطة D.

⑥ بين أن $ABCD$ مربع.

❷ عين وأنشئ (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$.

❸ عين وأنشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 1$.

التمرين 06

بكالوريا 2011

شعبة رياضيـــات

الموضوع الأول

4.5ن

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 1 - i$ ، $z_B = -1 + i$ و $z_C = \sqrt{3}(1 + i)$.

❶ اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A ، z_B و z_C.

❷

① احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$، ثم فسر هندسيا النتائج المحصل عليها.

② حدد طبيعة المثلث ABC.

❸ عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معينا.

❹ T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = (-1+i)z + 1 - 3i$$

① عين طبيعة التحول T وعناصره المميزة.

② استنتج طبيعة التحول $T \circ T$ وعناصره المميزة.

التمرين 07 — 4ن

بكالوريا 2011

شعبة رياضيـــات

الموضوع الثاني

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحلات الآتية:

❶

① الشكل المثلثي للعدد المركب $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو $-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

② $a^{2011} + \overline{a} = 0$ حيث: $\overline{a}$ مرافق a.

❷ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

① التحويل T الذي كتباته المركبة: $z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم.

② مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z-i) = -\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات اللاحقة i وشعاع توجيهه $\vec{u}$ لاحقته $1+i$.

❸ (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{6}$.

① $u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$.

② (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

③ (u_n) متباعدة.

التمرين 08

4ن

بكالوريا 2012

شعبة رياضيـــات

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

❷ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = z_A + z_B$.

① اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A، z_B و z_A/z_B.

② عين لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

③ بين أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع.

❸ نسمي (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z - z_A| = |z - z_B|$.

① بين أن (Δ) هو محور الفواصل.

② بين أن حلي المعادلة $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2 = i$ عددان حقيقيان. (لا يُطلب حساب الحلين).

التمرين 09

4ن

بكالوريا 2012

شعبة رياضيـــات

الموضوع الثاني

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z^2+4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

❷ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -2i$ و $z_D = \overline{z_C}$.

- بين أن النقط A، B C و D تنتمي إلى دائرة (γ) يطبل تعيين مركزها ونصف قطرها، ثم أنشئ النقط A، B C و D.

❸ نرمز بـ z_E إلى لاحقة النقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة إلى المبدأ O.

① بين أن: $\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

② بين أن النقطة A هي صورة النقطة E بدوران R مركزه C يطلب تعيين زاويته.

③ استنتج طبيعة المثلث AEC.

④ H هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2.

- عين طبيعة التحويل $R \circ H$ وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة (γ) بالتحويل $R \circ H$.



I) a و b عددان حقيقيان موجبان تماما. نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

النقط A ، B، C و E التي لاحقاتها $z_A = ae^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_B = -a\sqrt{2}$ ، $z_C = \overline{z_A}$ و $z_E = be^{i\frac{3\pi}{4}}$ على الترتيب.

❶

① اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_a}$، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

② حدد طبيعة الرباعي $OABC$، ثم استنتج مساحته.

❷ التشابه المباشر S ذو المركز O والنسبة $\frac{b}{a}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$، يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

① اكتب العبارة المركبة للتشابه S، ثم تحقق أن $S(A) = E$.

② بين أن مساحة الرباعي $OEFG$ هي b^2 (مقدرة بوحدة المساحة) حيث: $S(B) = F$ و $S(C) = G$.

❸

① احسب بدلالة a و b العبارة:

$$|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E| \cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right]$$

② استنتج قيمة CE^2 بدلالة a و b.

II) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن O، لاحقتها z_n.

نضع $M_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $M_{n+1} = S(M_n)$.

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين، من أجل كل عدد طبيعي n، بـ: $u_n = |z_n|$ و $v_n = \arg(z_n)$.

❶ اكتب العدد المركب $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ على الشكل الأسي بدلالة a و b.

❷ نفرض أن: $a < b$ و $\arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) \in]-\pi;\pi]$

- بين أن المتتالية (u_n) هندسية، والمتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساس وحساب الحد الأول لكل منهما.

❸ احسب، بدلالة a ، b و n المجموع T_n حيث: $T_n = a + a + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \cdots + \frac{b_n}{a^{n-1}}$، ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

4 عين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها تكون النقط O، A و M_n في استقامية.

التمرين 11 (5ن)

بكالوريا 2013

شعبة رياضيـــات

الموضوع الثاني

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2+z+1=0$

2 نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقط A ، B و M ذات اللاحقات:

$z_A=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و z على الترتيب. (يرمز إلى $\overline{z_A}$ إلى مرافق z_A).

① اكتب z_A على الشكل الأسي.

② عين مجموعة النقط M من المستوي ، حيث: $\arg[(z-z_A)^2]=\arg(z_A)-\arg(z_B)$.

3

① التحويل النقطي r، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=z_A\cdot z+z_B\sqrt{3}$

- ما طبيعة التحويل r؟ عين عناصره المميزة.

② التحاكي h، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=-2z+3i$

- عين نسبة ومركز التحاكي h.

③ نضع: $S=h\circ r$. (يرمز $\circ$ إلى تركيب التحويلين r و h).

- عين طبيعة التحويل S، مبررا عناصره المميزة، ثم تحقق أن عبارته المركبة هي:

$z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$.

4 نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C، D و E، حيث: $S(O)=C$ ، $S(c)=D$ و $S(D)=E$.

- بين أن النقط O ، Ω و E في استقامية.

5

① عين (Γ_1) مجموعة النقط $M(z)$ المستوي، حيث: $z=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$.

② عين (Γ_2) صورة (Γ_1) بالتحويل S.

التمرين 12 (5ن)

بكالوريا 2014

شعبة رياضيـــات

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

$$(z-1-2i)\left(z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right)=0$$

❷ A، B، C و D نقط من المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لاحقاتها على الترتيب: $z_A=1+2i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=1+\sqrt{3}-i$ و $z_D=1-2i$.

① بين أن: $AB=CD$ و (AD) يوازي (BC).

② تحقق أن: $\frac{z_A+z_C}{2}\neq\frac{z_B+z_D}{2}$، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

❸

① بين أن: $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$. ثم استنتج أن D صورة A بتشابه مباشره مركزه B يطلب تعيين مسبته وزاويته.

② بين أن المثلث ADB قائم وأن النقط A، B C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

③ استنتج انشاء للرباعي $ABCD$.

التمرين 13 — 5ن

بكالوريا 2014

شعبة رياضيـــات

الموضوع الثاني

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، A و B النقطتان اللتان لاحقاتهما على الترتيب: $a=-2+6i$ و $b=-1+2i$.

❶ اكتب العدد المركب $1+i$ على شكل أسي.

❷ S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}+2$

① D النقطة ذات اللاحقة d حيث: $d=2i$ ، جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S. ماذا تستنتج؟

② بين أن: $z'-d=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$ واستنتج طبيعة وعناصر التحويل S.

❸ (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $3x+5y=11$

① تحقق أن النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ) ثم عين النقط (Δ) التي احداثياتها أعدادا صحيحة.

② M_0' صورة M_0 بالتحويل S. بين أن المستقيمين (BM_0') و (BA) متعامدان.

③ x و y عددان صحيحان من المجال $[-5;5]$. عين مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدان، حيث M' هي صورة M بالتحويل S.

التمرين 14 — 5ن

بكالوريا 2015

شعبة رياضيـــات

الموضوع الأول

ينسب المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C، H و I لاحقاتها على الترتيب: $z_A = i$ ، $z_B = -2+i$ ، $z_C = -3$ ، $z_H = -3+4i$ و $z_I = -1-i$.

1

① مثل النقط A، B ، C، H و I في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$.

② عين النسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول النقطة A إلى النقطة C.

2 عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

3

① اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$.

② استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان.

③ بين أن النقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

4 بين أن النقط G، H و I في استقامية.

5 (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z+1+i = \sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

① بين أن النقطة A تنتمي إلى (Γ).

② عين طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة.

③ أنشئ المجموعة (Γ).

④ تحقق أن النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ).

التمرين 15 — 5ن

بكالوريا 2015

شعبة رياضيـــات

الموضوع الثاني

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0$ (لاحظ أن: $(1+\sqrt{3})^2 = 4+2\sqrt{3}$)

❷ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، A و B نقطتان من المستوي، لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$ و $z_B=\overline{z_A}$.

① بين أن: $\frac{z_B}{z_A}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$.

② استنتج عمدة للعدد المركب z_A.

③ استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

❸

① حل، في مجموعة الأعداد الصحيحة، المعادلة ذات المجهولين $(x;y)$ التالية: $7x-2y=1$.

② بين أنه إذا كان الثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة، حلا للمعادلة $7x-24y=12$ فإن x يكون مضاعفا للعدد 12.

③ استنتج كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة، حلا للمعادلة $7x-24y=12$.

④ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

التمرين 16 — 4.5ن

بكالوريا 2016

شعبة رياضيـــات

الموضوع الأول

❶

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-4z+5=0$

② استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب z الآتية:

$$\left(z+1+i(1-\sqrt{3})\right)^2-4z+1-4i(1-\sqrt{3})=0$$

❷ θ عدد حقيقي حيث: $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له.

① اكتب العدد المركب $(1+\sqrt{3})$ على الشكل الأسي.

② عين θ علما أن: $\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{\overline{z_0}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$. ($\overline{z_0}$ هو مرافق العدد z_0).

③ n عدد طبيعي. من أجل قيمة θ المتحصل عليها. اكتب العدد المركب $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي.

④ عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

❸ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=2-i$ ، $z_B=2+i$ و $z_C=1+i\sqrt{3}$.

① عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$.

② استنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

③ E النقطة من المستوي ذات اللاحقة z_E حيث: $\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases}$.

- بين أن: $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$.
- بين أن النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

④ M نقطة من المستوي المركب لاحقتها z، النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

① عين z_I لاحقة النقطة I.

② α عدد حقيقي، نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب التي تحقق: $z - z_I = e^{i\alpha}$.

- تحقق أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ) .
- عين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة عندما يتغير α في $\mathbb{R}$.

التمرين 17 — 4ن

بكالوريا 2016

شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

I)

① حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$.

② جد العددين المركبين z_1 و z_2 حيث: $\begin{cases} 2z_1 - 3z_2 = 5i\sqrt{2} \\ z_1 + 3z_2 = -2i\sqrt{2} \end{cases}$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B، C، D و H لاحقاتها على الترتيب: $z_A = i\sqrt{2}$ ، $z_B = -i\sqrt{2}$ ، $z_C = 1 + i$ ، $z_D = 1 - i$ و $z_H = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$ حيث E النقطة التي تحقق: $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DO}$.

① اكتب z_H على الشكل الأسي واستنتج نوع المثلث BEC.

② S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' = z_A z + z_B$

① ما هي طبيعة التحويل S ؟ وماهي عناصره المميزة ؟

② احسب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C ونصف قطرها CD .

③ عين (γ') صورة (γ) بالتحويل S واستنتج مساحتها.

③ عين (δ) مجموعة النقط M من المستوي (M تختلف عن B و C) ذات اللاحقات z التي من أجلها يكون العدد $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما.

التمرين 18 — 5ن

بكالوريا 2017

شعبة رياضيـــات

الموضوع الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $(z-2+2i)\left(z^2-2\sqrt{2}z+8\right)=0$.

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها:

$z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2(1-i)$.

① اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم استنتج أن النقط A، B و C تنتمي إلى دائرة (Ω) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

② عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيليا صرفا.

③ نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z=z_C-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ مع k يمسح $\mathbb{R}_+$.
ثم تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ)، ثم عين وأنشئ (Γ).

❸ r الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$، h التحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته -2.

- عين طبيعة التحويل $h\circ r$ وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة (Ω) بالتحويل $h\circ r$.

التمرين 19 — 5ن

بكالوريا 2017

شعبة رياضيـــات

الموضوع الثاني

I) اكتب العدد $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري ثم استنتج الجذرين التربيعين للعدد المركب: $\frac{21}{4}+5i$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B، C و $\div$ ذات اللواحق: $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=-\frac{3}{2}i$ ، $z_C=-\overline{z_A}$ و $z_I=i$

❶ اكتب z_A و z_C على الشكل الجبري.

❷ اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي مستنتجا طبيعة المثلث ABC .

❸ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول A إلى I.

① اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S، ثم عين نسبته وزاويته.

② نعرف من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $n\geq 2$ التحويل النقطي T_n كما يلي: $T_n=\underbrace{S\circ S\circ\ldots\circ S}_{n\text{ مرة}}$

- عين قيم n حتى يكون T_n تحاكيا، عين عندئذ عناصره المميزة.

التمرين 20 — 5ن

بكالوريا 2017 – الدورة الاستثنائية

شعبة رياضيـــات

الموضوع الأول

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $2z^2 - 10z + \frac{29}{2} = 0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها: $z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B = \frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C = -\overline{z_A}$ و $z_D = i$.

1

① اكتب العددين z_A و z_B على الشكل الجبري، ثم علم النقط A، B، C و D في المعلم السابق.

② اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ على الشكل الاسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

2 جد لاحقة النقطة E نظيرة B بالنسبة إلى D ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCE$.

3 اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول A إلى D ، ثم حدد نسبته وزاويته.

4 نعرف متتالية النقط $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يلي: $A_0 = A$ و $A_{n+1} = S(A_n)$. (z_n هل لاحقة A_n).

① برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n، $z_n - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$.

② عين قيم n الطبيعية حتى تنتمي النقط A_n إلى المستقيم (AB).

التمرين 21 — 4ن

بكالوريا 2017 – الدورة الاستثنائية

شعبة رياضيـــات

الموضوع الثاني

1 نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $z^2 - 2(1-\sin\alpha)z + 2(1-\sin\alpha) = 0 \dots (E)$

حيث α عدد حقيقي. (نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلي المعادلة (E)).

① عين الحلين z_1 و z_2 بدلالة α .

② نضع $a = \frac{\pi}{6}$. بين أن $z_1^{2017} + z_2^{2017} = 1$.

2 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2z_A$.

① عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

② ليكن S التحويل النقطي الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z = (1 + z_A)z + 2z_B$$

- عين طبيعة التحويل S ثم حدد عناصره المميزة.

③ (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقات z حيث: $\arg(\overline{z} - z_B) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$.

- تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) ، ثم حدد طبيعة (Γ) وأنشئها.

التمرين 22 — 5ن

بكالوريا 2018

شعبة رياضيـــات

الموضوع الأول

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، θ عدد حقيقي من المجال $]-\pi; \pi]$.

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$(z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2(\sin\theta)z + 1) = 0$$

❷ A، B ، C و D نقط من المستوي لاحقتها على الترتيب:

$z_A = -\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ ، $z_B = 1 - i$ ، $z_C = \sin\theta + i\sin\theta$ و $z_D = \overline{z_C}$

(يرمز $\overline{z_C}$ إلى مرافق z_C).

① اكتب z_A، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسي.

② E نقطة من المستوي لاحقتها z_E حيث: $z_E = \frac{z_A}{z_B}$.

- بين أن النقط C ، D و E تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

③ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $(2\sqrt{2} - 2)$.

- عين قيمة θ حتى تكون النقطة B هي صورة النقطة C بالتشابه المباشر S.

④ نضع $\theta = -\frac{3\pi}{4}$. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا.

التمرين 23 — 5ن

بكالوريا 2018

شعبة رياضيـــات

الموضوع الثاني

❶ m عدد حقيقي، نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 + (m + 1)z + (2m - 1) = 0 \dots (E)$$

- عين قيم العدد الطبيعي m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين مركبين غير حقيقيين.

❷ نضع $m = 3$ ، حل المعادلة (E).

❸ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B ، C و E التي لاحقاتها:

$z_A = -2 + i$ ، $z_B = -2 - i$ ، $z_C = \alpha$ و $z_E = \sqrt{3}$.

حيث α عدد حقيقي و $\alpha > -2$.

- بين أن قيمة α التي يكون من أجلها المثلث ABC متقايس الأضلاع $(-2 + \sqrt{3})$.

- نضع في كل ما يأتي $z_C = -2 + \sqrt{3}$:

❹ اكتب العدد المركب: $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسي ثم استنتج أن:

① المستقيمان (AB) و (EC) متعامدان.

② النقط A ، B ، C و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

❺ ليكن r الدوران الذي يحول النقطة B إلى C ويحول C إلى A، عبارته المركبة هي:

$$z = az + \left(\frac{\sqrt{3} - 6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{2}\right)$$

حيث α عدد مركب.

① احسب العدد المركب α ثم استنتج زاوية الدوران r.

② تحقق أن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC هي مركز الدوران r.

التمرين 24 — 5ن

بكالوريا 2019

شعبة رياضيـــات

الموضوع الأول

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C و D حيث:

$z_A = 1 + i\sqrt{2}$ ، $z_B = i$ ، $z_C = \overline{z_A}$ و $z_D = 1$.

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2 + 1)(z^2 - 2z + 3) = 0$

❷

① احسب كلا من $|z_A - 1|$ ، $|z_B - 1|$ و $|z_C - z_E|$ ثم تحقق أن النقط الأربعة A ، B C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها.

② بين أن: $z_B - z_E = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)(z_A - z_E)$ ، ثم استنتج أن B هي صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة.

- ما طبيعة المثلث ABE ؟

❸ عين لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AE}$ محددا طبيعة الرباعي $ABDE$.

❹ $\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ شعاعان من المستوي لاحقتهما على الترتيب z_1 و z_2.

① برهن أن: ($\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ متعامدان) يكافئ $(z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 0)$.

② عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:

$$(z - z_A)(\overline{z} - z_D) + (z - z_B)(\overline{z} - z_C) = 0$$

التمرين 25 — 5ن

بكالوريا 2019

شعبة رياضيـــات

الموضوع الثاني

❶ نضع من أجل كل عدد مركب z، $P(z) = z^4 - 6z^3 + 29z^2 - 24z + 100$

① بين أنه من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$ ، ثم استنتج أنه إذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن: $\overline{z}$ حل لها.

② حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z) = 0$ علما أنها تقبل حلا تخيليا صرفا.

❷ نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$، النقط A ، B ، M و M' التي لاحقاتها على الترتيب: $2i$ ، $3 - 4i$ ، z و z' حيث: $z = \frac{-iz+4+3i}{z-2i}$ مع $z \neq 2i$

ولتكن I مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; 1)\}$ و J مرجح الجملة $\{(A; -2), (B; 1)\}$.

① عين اللاحقتين z_I و z_J للنقطتين I و J على الترتيب.

② لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $|z'| = 2$.

- بين أن (النقطة M من (E)) يكافئ $\left(\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{JM} = 0\right)$ ، ثم عين (E) وأنشئها.

③ لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $\arg(z') = 2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

- تحقق أن النقطة D ذات اللاحقة $\frac{9}{2} - \frac{5}{2}i$ تنتمي إلى (Γ) ، ثم عين وأنشئ (Γ).

❸ عين الشكل الجبري للاحقة النقطة G تقاطع المجموعتين (E) و (Γ) .


الخليل
للرياضيات
b + y + 2a
x + 2 + 2b
a - 2c + b
y - c - 2a
x = 0
(cos x) = cos (z)