تمـــرين شامل في الأعداد المركبة

(I) نعتبر P كثير الحدود في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعرف كما يلي : $P(z) = z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 16z + 32$

1 - أثبت أنه إذا كان z حلّا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن $\overline{z}$ حل لها أيضا .

2 - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$ علما أنها تقبل حلين تخيّليين صرفين مترافقين .

(II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ ، النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها z_A ، z_B ، z_C و z_D على الترتيب حيث : $z_A = 2 + 2i$ ، $z_B = 2i$ ، $z_C = -2i$ و $z_D = 2 - 2i$

1 - أكتب z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل المثلثي ثمّ الأسي .

2 - بيّن أنّ العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{1997} + \left(\frac{z_B}{2}\right)^{2020} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{2020} + \left(\frac{z_D}{2\sqrt{2}}\right)^{1997}$ حقيقي موجب .

3 - جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب :

• $\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n$ عددا تخيليّا صرفا جزؤه التخيّليّ سالبا ، • $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ عددا حقيقيّا سالبا ، • $(z_A)^n$ عددا حقيقيّا موجبا ، • $(z_B)^n$ عددا تخيليّا صرفا .

4 - أ - عيّن لاحقة النقطة F صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ثمّ بيّن أنّ النقط A ، B و F في استقامية .

ب - أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_F - z_C}$ على الشكل الأسّي ثمّ استنتج طبيعة المثلث AFC .

ج - عيّن لاحقة النقطة H مركز التحاكي h الذي نسبته $-\frac{1}{3}$ والذي يُحوّل النقطة F إلى النقطة A .

د - عيّن لاحقة النقطة I صورة النقطة O بالإنسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{FB}$.

5 - أ - جد لاحقة النقطة J حتّى يكون الرّباعي $BJCI$ معيّن .

ب - بيّن أنّ المستقيمان (BJ) و (DF) متعامدان . هل (IC) و (DF) متعامدان ؟ برّر إجابتك .

ج - بيّن أنّ المستقيمان (CJ) و (DF) متوازيان . هل (IB) و (DF) متوازيان ؟ برّر إجابتك .

د - عيّن عمدة وطويلة العدد المركب $\frac{z_B}{z_J}$ ثمّ استنتج طبيعة المثلث OBJ .

6 - أ - تحقق من أنّ النقطة I منتصف قطعة المستقيم (AD) ثمّ عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2);(C,-2)\}$.

ب - عين (E_1) و (E_2) مجموعة النقط M من المستوي بحيث :

$$(E_1) : \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\right\|$$

$$(E_2) : \left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\right) = 0$$

7 - S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A و يحوّل النقطة O إلى النقطة D ، عين نسبة وزاوية S .

8 - لتكن (Γ) الدّائرة التي تشمل النقط A ، D و F .

أ - عيّن مركز الدّائرة (Γ) ونصف قطرها ، ثمّ احسب مساحتها .

ب - جد (Γ') صورة الدائرة (Γ) بالتشابه المباشر S ، ثمّ استنتج مساحة الدّائرة (Γ') .

9 - أكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_I}{z_A}$ على الشكل الجبري ثمّ المثلثي ، استنتج طبيعة الرباعي $OIAB$.

10 - اكتب الصيغة المركبة للتحويل f المعرف كمايلي : $f = t \circ h \circ s$.

11 - أ - عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي والتي تحقق : $z = 2 - 2i - 9e^{i\theta}$ مع $\theta \in [0, 2\pi[$.

ب - عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي والتي تحقق : $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ ($z \neq 2i$) .

ج - عين مجموعة النقط M ذات اللّاحقة z من المستوي والتي تحقّق : $\arg\left(\frac{z - z_A}{\overline{z} - \overline{z_A}}\right) = 2k\pi$ حيث k عدد صحيح نسبي .

د - عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي التي من أجلها يكون $L = \frac{z - 2i}{z - 2 + 2i}$ ($z \neq 2 - 2i$) عددًا حقيقيّا سالبًا .

12 - نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z مع $z \neq 2i$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \frac{-6i(z - 2 + 2i)}{z - 2i}$.

أ - تحقق من أنّ : $OM' = 6 \times \frac{DM}{BM}$.

ب - استنتج أنّه إذا كانت M تنتمي إلى محور قطعة المستقيم (DB) فإن M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها مع تحديد عناصرها المميزة .

مجموعة يطلب تعيينها مع

التصحيح المفصل للتمرين الشامل في الأعداد المركبة

الجزء الأول

1 إثبات أنه إذا كان z حلّا للمعادلة $P(z)=0$ فإن $\overline{z}$ حل لها أيضا

لدينا :

$$P(\overline{z})=\overline{z}^4-4\overline{z}^3+12\overline{z}^2-16\overline{z}+32=\overline{z^4}-4\overline{z^3}+12\overline{z^2}-16\overline{z}+32=\overline{z^4-4z^3+12z^2-16z+32}=\overline{P(z)}$$

بما أنّ $P(z)=0$ فإنّ $\overline{P(z)}=\overline{0}$ أي $\overline{P(z)}=0$ وعليه $P(\overline{z})=0$ وهو المطلوب .

2 حل في C المعادلة $P(z)=0$ علما أنها تقبل حلين تخيّليين صرفين مترافقين

بما أن المعادلة تقبل حلين تخيليين صرفين فإنه يوجد عددين مركبين من الشكل iy (حيث $y\in\mathbb{R}$) يحققان :

إذن $(iy)^4-4(iy)^3+12(iy)^2-16(iy)+32=0$ أي $y^4+4iy^3-12y^2-16iy+32=0$

ومنه قيم y هي حل الجملة : $(y^4-12y^2+32)+i(4y^3-16y)=0$

$$\begin{cases} y^4-12y^2+32=0 & \ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ 4y^3-16y=0 & \ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

نحل المعادلة السهلة الحل أو التي يمكننا حلها ونأخذ القيم التي المعادلة الأخرى سنختار حل المعادلة (2) لأنها أسهل في الحل ومنه : $4y^3-16y=0$ يكافئ $y(4y^2-16)=0$ ومنه هذه الأخيرة تقبل ثلاث حلول هي : 0 ، 2 و -2 . الحلّان 2 و -2 يحققان المعادلة (1) أما 0 فلا يحققها ومنه حلي المعادلة التخيليان الصرفيان هما $\{-2i,2i\}$.

إيجاد بقية الحلول :

المعادلة (E) تكافئ $(z-2i)(z+2i)(\alpha z^2+\beta z+\gamma)=0$ تكافئ $(z^2+4)(\alpha z^2+\beta z+\gamma)=0$ باستعمال القسمة الإقليدية أو النشر والمطابقة نستنتج عبارة كثير الحدود $\alpha z^2+\beta z+\gamma$ حيث نجد : $\alpha=1$ ، $\beta=-4$ و $\gamma=8$. وعليه بقية حلول المعادلة (E) هي حلا المعادلة $z^2-4z+8=0$ وعليه لدينا : $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4(1)(8)=-16=(4i)^2$ ومنه :

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-4)+\sqrt{(4i)^2}}{2(1)}=\dfrac{4+4i}{2}=2+2i\\ z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-4)-\sqrt{(4i)^2}}{2(1)}=\dfrac{4-4i}{2}=2-2i\end{cases}$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي : $S=\{-2i;2i;2-2i;2+2i\}$.

الجزء الثاني

1 كتابة z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل المثلثي ثمّ الأسي

لدينا :

$$|z_A|=\sqrt{(2)^2+(2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$
$$|z_B|=\sqrt{(0)^2+(2)^2}=\sqrt{0+4}=\sqrt{4}=2$$
$$|z_C|=\sqrt{(0)^2+(-2)^2}=\sqrt{0+4}=\sqrt{4}=2$$
$$|z_D|=\sqrt{(2)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

لتكن θ_A ، θ_B ، θ_C و θ_D عمد الأعداد المركبة z_A ، z_B ، z_C و z_D على الترتيب .

إيجاد θ_A ، θ_B ، θ_C و θ_D :

$$\begin{cases}\cos(\theta_A)=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\theta_A)=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases};\theta_A=\frac{\pi}{4}\quad .\quad \begin{cases}\cos(\theta_B)=\frac{0}{2}=0\\ \sin(\theta_B)=\frac{2}{2}=1\end{cases};\theta_B=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases}\cos(\theta_C)=\frac{0}{2}=0\\ \sin(\theta_C)=\frac{-2}{2}=-1\end{cases};\theta_C=-\frac{\pi}{2}\quad .\quad \begin{cases}\cos(\theta_D)=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\theta_D)=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{cases};\theta_D=-\frac{\pi}{4}$$

ومنه الشكل المثلثي هو :

$$z_A=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\quad ;\quad z_B=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

2 تبيين أنّ العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{1997}+\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2020}+\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2020}+\left(\frac{z_D}{2\sqrt{2}}\right)^{1997}$ حقيقي موجب

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{1997}+\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2020}+\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2020}+\left(\frac{z_D}{2\sqrt{2}}\right)^{1997}=\left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}\right)^{1997}+\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^{2020}+\left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^{2020}+\left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}\right)^{1997}$$
$$=\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1997}+\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2020}+\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^{2020}+\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{1997}=e^{i\frac{1997\pi}{4}}+e^{i1010\pi}+e^{-i1010\pi}+e^{-i\frac{1997\pi}{4}}$$
$$=e^{i\left(\frac{1996\pi+\pi}{4}\right)}+1+1+e^{i\left(\frac{-1996\pi-\pi}{4}\right)}=e^{i\left(499\pi+\frac{\pi}{4}\right)}+2+e^{i\left(-499\pi-\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i499\pi}\times e^{i\frac{\pi}{4}}+2+e^{-i499\pi}\times e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$=-e^{i\frac{\pi}{4}}+2-e^{-i\frac{\pi}{4}}=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}+2-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$$

لدينا : $\left(2-\sqrt{2}\right)\in\mathbb{R}_+$ ومنه العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{1997}+\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2020}+\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2020}+\left(\frac{z_D}{2\sqrt{2}}\right)^{1997}$ حقيقي موجب .

3 إيجاد قيم العدد الطبيعي n

- $\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n$ عددا تخيليا صرفا جزؤه التخيّلي سالبا .

لدينا :
$$\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n=\left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^n=\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^n=\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n=\left(e^{i\left(\frac{2\pi}{4}\right)}\right)^n=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n$$

نعلم أنّ $\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n$ تخيليا صرفا جزؤه التخيّلي سالبا معناه $\arg\left[\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n\right]=-\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{N}^*$ أي $n.\arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{N}^*$ أي أنّ $n.\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{N}^*$ يكافئ $\frac{n}{2}=-\frac{1}{2}+2k/k\in\mathbb{N}^*$ وعليه قيم العدد الطبيعي n في هذه الحالة هي : $n=4k-1$ حيث $k\in\mathbb{N}^*$.

- $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ عددا حقيقيّا سالبا .

لدينا :
$$\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}\right)^n=\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{-i\pi}}\right)^n=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\times e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n=\left(e^{i\left(2\pi\right)}\right)^n=\left(e^{i\pi}\right)^n$$

نعلم أنّ $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا معناه $\arg\left[\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n\right]=\pi+2k\pi/k\in\mathbb{N}$ أي أنّ $n.\arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right)=\pi+2k\pi/k\in\mathbb{N}$ وعليه قيم العدد الطبيعي n في هذه الحالة هي : $n=2k+1$ حيث k عدد طبيعي .

- $(z_A)^n$ عددا حقيقيّا موجبا .

لدينا :
$$(z_A)^n=\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

نعلم أنّ $(z_A)^n$ حقيقيّا موجبا معناه $\arg\left[(z_A)^n\right]=+2k\pi/k\in\mathbb{N}$ أي أنّ $n.\arg\left(z_A\right)=2k\pi/k\in\mathbb{N}$ وعليه قيم العدد الطبيعي n في هذه الحالة هي : $n=8k$ حيث k عدد طبيعي .

- $(z_B)^n$ عددا حقيقيّا سالبا .

لدينا :
$$(z_B)^n=\left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n$$

نعلم أنّ $(z_B)^n$ تخيّليّا صرفا معناه $\arg\left[(z_B)^n\right]=\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{N}$ أي أنّ $n.\arg\left(z_B\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{N}$ وعليه قيم العدد الطبيعي n في هذه الحالة هي : $n=2k+1$ حيث k عدد طبيعي .

4 تعيين لاحقة النقطة F صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ثمّ تبيين أنّ النقط A ، B و F في استقامية

لدينا : $z_F-z_O=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A-z_O)$ أي $z_F=e^{i\frac{\pi}{2}}z_A$ يكافئ $z_F=i(2+2i)$ ومنه $z_F=-2+2i$.

ولدينا كذلك : $\frac{z_A-z_F}{z_B-z_F}=\frac{2+2i-(-2+2i)}{2i-(-2+2i)}=\frac{2+2i+2-2i}{2i+2-2i}=\frac{4}{2}=2$ ومنه النقط A ، B و F في استقامية .

كتابة العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_F-z_C}$ على الشكل الأسّي ثمّ استنتاج طبيعة المثلث AFC

لدينا : $\frac{z_A-z_C}{z_F-z_C}=\frac{2+2i-(-2i)}{-2+2i-(-2i)}=\frac{2+2i+2i}{-2+2i+4i}=\frac{2+4i}{-2+4i}=\frac{(1+2i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$.

لدينا : $\tan(\theta)=-\frac{4}{3}$ $\quad$ $\sqrt{9+16}=1$

تعيين لاحقة النقطة H مركز التحاكي h الذي نسبته $-\frac{1}{3}$ والذي يُحوّل النقطة F إلى النقطة A

من العبارة المركبة للتحاكي لدينا : $z_A - z_H = -\frac{1}{3}(z_F - z_H)$ بعد الحساب نجد $z_H = \frac{3}{4}z_A + \frac{1}{4}z_F$ وعليه : $z_H = 1+2i$.

تعيين لاحقة النقطة I صورة النقطة O بالإنسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{FB}$

لدينا : $z_B - z_F = \beta$ بالتعويض في العبارة العامة للتحويلات النقطية نجد : $z_I = z_O + (z_B - z_F)$ أي $z_I = z_B - z_F$ بالتعويض نجد $z_I = 2$.

5 إيجاد لاحقة النقطة J حتّى يكون الرّباعي $BJCI$ معيّن

حتّى يكون الرباعي $BJCI$ معيّن يجب أن يكون : $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IC}$ و $BJ = BI$.

لدينا : $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IC}$ معناه $z_J - z_B = z_C - z_I$ ومنه $z_J = z_C - z_I + z_B$ ومنه بعد التعويض نجد : $z_J = -2$ الآن نتحقّق من أنّ : $BJ = BI$

وللتحقق لدينا : $BJ = \sqrt{8}$ وأيضا $BI = \sqrt{8}$ إذن لاحقة النقطة J هي : $z_J = -2$.

تبيين أنّ المستقيمان (BJ) و (DF) متعامدان . هل (IC) و (DF) متعامدان ؟ مع تبرير الإجابة

لإثبات أنّ المستقيمان (BJ) و (DF) متعامدان يكفي إثبات أنّ شعاعي توجيههما متعامدان أي أثبات أنّ $\overrightarrow{BJ} \perp \overrightarrow{DF}$.

لدينا : $\frac{z_J - z_B}{z_F - z_D} = \frac{-2-2i}{-2+2i-(2-2i)} = \frac{-2-2i}{-2+2i-2+2i} = \frac{-2-2i}{-4+4i} = \frac{-(1+i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} = \frac{1}{2}i$

واضح أنّ $\arg\left(\frac{z_J - z_B}{z_F - z_D}\right) = \frac{\pi}{2}$ وعليه $\left(\overrightarrow{DF};\overrightarrow{BJ}\right) = \frac{\pi}{2}$ إذن $\overrightarrow{BJ} \perp \overrightarrow{DF}$ وهو المطلوب .

إنّ المستقيمان (IC) و (DF) متعامدان. التبرير : هنا نغيّر قليلا ونستعمل الجداء السلّمي أي لإثبات أنّ المستقيمان (IC) و (DF) متعامدان يكفي إثبات أنّ $\overrightarrow{IC} \perp \overrightarrow{DF}$ أي نبيّن أنّ $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$.

لدينا : $\overrightarrow{IC}(-2;-2)$ و $\overrightarrow{DF}(-4;4)$ إذن : $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{DF} = -2(-4) - 2(4) = 8 - 8 = 0$ وبالتالي : $\overrightarrow{IC} \perp \overrightarrow{DF}$ و.ه.م .

يمكنك استعمال الخاصية التي تقول " كل مستقيمان متوازيان هما عموديان على نفس المستقيم " وذلك باستعمال أنّ الرباعي $BJCI$ معيّن .

تبيين أنّ المستقيمان (CJ) و (DF) متوازيان . هل (IB) و (DF) متوازيان ؟ مع تبرير الإجابة

لإثبات أنّ المستقيمان (CJ) و (DF) متوازيان يكفي إثبات أنّ شعاعي توجيههما مرتبطان خطّيا .

لدينا : $\frac{z_J - z_C}{z_F - z_D} = \frac{-2-(-2i)}{-2+2i-(2-2i)} = \frac{-2+2i}{-2+2i-2+2i} = \frac{-2+2i}{-4+4i} = \frac{(-1+i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} = \frac{1}{2}$

إنّ : $\arg\left(\frac{z_J - z_C}{z_F - z_D}\right) = 0$ وعليه $\left(\overrightarrow{DF};\overrightarrow{CJ}\right) = 0$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{CJ}$ مرتبطان خطيا و.ه.م .

إنّ المستقيمان (IB) و (DF) متوازيان. التبرير : هنا نغيّر قليلا . لدينا $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{IB}$ لأنّ الرباعي $BJCI$ معيّن معناه الشعاعان $\overrightarrow{CJ}$ و $\overrightarrow{IB}$ مرتبطان خطّيا وكذلك مما سبق وجدنا أنّ الشعاعان $\overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{CJ}$ مرتبطان خطيا إذن بالتعدي نجد $\overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{IB}$ مرتبطان خطّيا ومنه المستقيمان (IB) و (DF) متوازيان .

تعيين عمدة وطويلة العدد المركب $\frac{z_B}{z_J}$ ثمّ استنتاج طبيعة المثلث OBJ

لدينا : $\frac{z_B}{z_J} = \frac{2i}{-2} = -i$ وعليه $\arg\left(\frac{z_B}{z_J}\right) = -\frac{\pi}{2}$ و $\left|\frac{z_B}{z_J}\right| = 1$ هذا معناه أنّ $\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB}\right) = -\frac{\pi}{2}$ و $OB = OJ$ إذن المثلث OBJ قائم في O ومتقايس الساقين .

6 التّحقق من أنّ النقطة I منتصف قطعة المستقيم (AD) ثمّ تعيين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2);(C,-2)\}$

لدينا $z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{2+2i+2-2i}{2} = 2$ ومنه I منتصف قطعة المستقيم (AD) .

وكذلك $z_G = \frac{z_A + 2z_B - 2z_C}{1+2-2} = 2 + 2i + 2(2i) - 2(-2i) = 2 + 10i$

تعيين (E_1) و (E_2) مجموعة النقط M من المستوي

لدينا : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\right\|$ يكافئ $\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \frac{1}{2}\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$ يكافئ $MG = MI$ ومنه المجموعة (E_1) هي محور قطعة المستقيم (GI) .

لدينا $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right) \bullet \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\right) = 0$ يكافئ $\overrightarrow{MG} \bullet 2\overrightarrow{MI} = 0$ يكافئ $\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{MI} = 0$ ومنه (E_2) هي الدائرة التي قطرها $[GI]$. - يمكنك إستعمال الشكل التحليلي حتى تجد $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$ - .

7 تعيين نسبة وزاوية S

لدينا : 1)

2)

هي

8 تعيين مركز الدّائرة (Γ) ونصف قطرها ، ثمّ حساب مساحتها

لدينا : $\overrightarrow{AF}(-4;0)$ ، $\overrightarrow{AD}(0;-4)$ و $\overrightarrow{DF}(-4;4)$ بالمرور للطويلة نجد : $AF=4$ ، $AD=4$ و $DF=\sqrt{32}$. وعليه : $AF^2=16$ و $AD^2=16$ و $DF^2=32$ وعليه حسب نظرية فيثاغورس العكسية فإن المثلث AFD قائم في النقطة A . بما أن الدّائرة (Γ) تشمل النقط A ، D و F فإنها تكون محيطة بالمثلث القائم AFD ويكون وتره DF هو قطر الدائرة (Γ) . لنعتبر أن T هي مركز الدائرة (Γ) وعليه

$z_T=\dfrac{z_D+z_F}{2}=\dfrac{2-2i-2+2i}{2}=0=z_O$ وطول نصف قطرها هو $r=\dfrac{DF}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

ومساحتها هي : $S_\Gamma=\pi r^2=\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2=8\pi cm^2$.

إيجاد (Γ') صورة الدائرة (Γ) بالتشابه المباشر S ، ثمّ استنتاج مساحة الدّائرة (Γ')

لدينا العبارة المركبة للتشابه S هي : $z'-z_A=(1+i)(z-z_A)$ ومنه $z'=(1+i)z+2-2i$.

لدينا $r'=kr=\sqrt{2}(2\sqrt{2})$ أي $r'=4$ ولدينا $z_{A'}=(1+i)z_O+2-2i$ أي بعد التعويض والحساب نجد : $z_D=2+2i$ ومنه (Γ') صورة الدائرة (Γ) بالتشابه المباشر S هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها هو r' ومساحتها هي : $S_{\Gamma'}=k^2S_\Gamma=\left(\sqrt{2}\right)^2\times 8\pi=16\pi cm^2$.

9 كتابة العدد المركب $\dfrac{z_B-z_I}{z_A}$ على الشكل الجبري ثمّ المثلثي ، استنتاج طبيعة الرباعي $OIAB$

لدينا : $\dfrac{z_B-z_I}{z_A}=i$ ومنه $\dfrac{z_B-z_I}{z_A}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

لدينا $\left|\dfrac{z_B-z_I}{z_A}\right|=\left|\dfrac{z_B-z_I}{z_A-z_O}\right|=\dfrac{|z_B-z_I|}{|z_A-z_O|}=1$ وبالتالي : $|z_B-z_I|=|z_A-z_O|$ معناه $IB=OA$ و $\arg\left(\dfrac{z_B-z_I}{z_A}\right)=\arg\left(\dfrac{z_B-z_I}{z_A-z_O}\right)=\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{IB}\right)=\frac{\pi}{2}$. ولدينا كذلك $\dfrac{z_A+z_O}{2}=\dfrac{z_I+z_B}{2}=1+i$ من هنا نؤكد أن قطرا الرباعي $OIAB$ متناصفان ومتعامدان ومتساويان مما يوحي أن $OIAB$ مربع .

10 كتابة الصيغة المركبة للتحويل f المعرف كمايلي : $f=t\circ h\circ s$

العبارة المركبة للانسحاب t هي : $z'=z+2$.

العبارة المركبة للتحاكي h هي : $z'=-\dfrac{1}{3}z+\dfrac{4}{3}+\dfrac{8}{3}i$.

العبارة المركبة للتشابه المباشر هي : $z'=(1+i)z+2-2i$.

لنعرف الآن التركيب ونستعمل نفس الفكرة في تركيب الدوال فنجد :

العبارة المركبة للتحويل $t\circ h$ كمايلي : $z'=-\dfrac{1}{3}z+\dfrac{10}{3}+\dfrac{8}{3}i$ وعليه العبارة المركبة للتحويل f هي : $z'=-\left(\dfrac{1+i}{3}\right)z+\dfrac{8}{3}+\dfrac{10}{3}i$.

واضح أنّ f يمثّل تشابه مباشر نسبته هي $k_f=\left|-\left(\dfrac{1+i}{3}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ وزاويته هي : $\theta_f=\pi+\dfrac{\pi}{4}$ ولاحقة مركزه هي : $z_\Omega=\dfrac{42}{17}+\dfrac{32}{17}i$.

11 تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي والتي تحقق : $z=2-2i-9e^{i\theta}$ مع $\theta\in[0,2\pi[$

لدينا $z=2-2i-9e^{i\theta}$ يكافئ $z-(2-2i)=-9e^{i\theta}$ يكافئ $z-z_D=-9e^{i\theta}$ بالمرور إلى الطويلة نجد : $|z-z_D|=9$ يكافئ $DM=9$

ومنه مجموعة النقط M من المستوي في هذه الحالة هي الدائرة التي مركزها النقطة D وطول نصف قطرها هو r حيث $r=9$.

تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي والتي تحقق : $\arg(z-2i)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$ ($z\neq 2i$)

لدينا $\arg(z-2i)=\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{4}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$ يكافئ $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$ ومنه مجموعة النقط M من المستوي هي نصف المستقيم الذي مبدؤه B ويشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{4}$ مع حامل محور الفواصل في الإتجاه المباشر ، باستثناء النقطة B (لأن عمدة الصفر غير معيّنة) .

تعيين مجموعة النقط M ذات اللاّحقة z من المستوي والتي تحقّق : $\arg\left(\dfrac{z-z_A}{\overline{z-z_A}}\right)=2k\pi$ حيث k عدد صحيح نسبي

نعلم أنّ $\arg\left(\overline{z-z_A}\right)=-\arg(z-z_A)$ ومنه :

$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{\overline{z-z_A}}\right)=\arg(z-z_A)-\arg\left(\overline{z-z_A}\right)=\arg(z-z_A)-(-\arg(z-z_A))=2\arg(z-z_A)$.

لدينا : $\arg\left(\dfrac{z-z_A}{\overline{z-z_A}}\right)=2k\pi$ أي $2\arg(z-z_A)=2k\pi$ معناه $\arg(z-z_A)=k\pi$ إذن : $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AM}\right)=k\pi$ وبالتالي مجموعة النقط M من المستوي والتي تحقّق : $\arg\left(\dfrac{z-z_A}{\overline{z-z_A}}\right)=2k\pi$ حيث k عدد صحيح نسبي هي المستقيم الذي يشمل النقطة A والموازي لحامل محور الفواصل باستثناء

✍ تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي التي من أجلها يكون $L=\dfrac{z-2i}{z-2+2i}$ عدداً حقيقيّا سالبًا ($z\neq 2-2i$)

لدينا $L=\dfrac{z-2i}{z-2+2i}=\dfrac{z-z_B}{z-z_D}$ ، نعلم أن L حقيقي سالب معناه $arg(L)=\left(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{BM}\right)=\pi+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$ لمّا $z\neq z_B$ ، $z\neq z_D$

و $L=0$ لمّا $z=z_B$ ، $z\neq z_D$. وعليه الشعاعين $\overrightarrow{DM}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطين خطيا وفي إتجاهين متعاكسين ويمكن لـ M أن تنطبق على B ولا تنطبق على D .

ومنه نستنتج مباشرة أنّ مجموعة النقطة M من المستوي في هذه الحالة هي قطعة المستقيم (DB) باستثناء النقطة D .

12

✍ التّحقق من أنّ : $OM'=6\times\dfrac{DM}{BM}$

لدينا $z'=\dfrac{-6i\,(z-2+2i)}{z-2i}=\dfrac{-6i\,(z-(2-2i))}{z-2i}$ يكافئ $z'-z_O=-6i\left(\dfrac{z-z_D}{z-z_B}\right)$ بالمرور إلى الطويلة نجد

$|z'-z_O|=6\left|\dfrac{z-z_D}{z-z_B}\right|$ يكافئ $OM'=6\times\dfrac{DM}{BM}$ وهو المطلوب .

✍ استنتاج أنّه إذا كانت M تنتمي إلى محور قطعة المستقيم (DB) فإن M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها مع تحديد عناصرها المميزة

M تنتمي إلى محور قطعة المستقيم (DB) معناه $DM=BM$ ومنه $OM'=6$ إذن M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة O وطول نصف قطرها هو r حيث $r=6$ وهو المطلوب .

✍ تبيين أنّ $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM'}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{DM}\right)+2k\pi$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$ و $z'\neq z_O$

لدينا $z'-z_O=-6i\left(\dfrac{z-z_D}{z-z_B}\right)$ بالمرور إلى العمدة نجد $\arg\left(z'-z_O\right)=\arg\left(-6i\left(\dfrac{z-z_D}{z-z_B}\right)\right)$ يكافئ

$\arg\left(z'-z_O\right)=\arg(-6i)+\arg\left(\dfrac{z-z_D}{z-z_B}\right)$ يكافئ $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM'}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{DM}\right)+2k\pi$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$.

✍ استنتاج أنّه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[BD]$ ماعدا النقطتين B و D فإنّ النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها مع تحديد عناصرها المميزة

M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[BD]$ ماعدا النقطتين B و D معناه $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$. ومنه

$\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM'}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}+k\pi+2k\pi$ يكافئ $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM'}\right)=3k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$. و $M'\neq O$ أي أن الشعاعين $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{OM'}$ مرتبطين خطيا ومنه M' تنتمي إلى حامل محور الفواصل باستثناء النقطة O .

إنتهى

بالتوفيـــق والنجاح إن شاء الله في البكالوريـا

قال العلامة عبد الرحمن ناصر السعدي رحمه الله تعالى :

إنْهَضْ إلَى العِلْمِ فِي جِدٍّ بِلا كَسَلٍ *** نُهُوضَ عَبْدٍ إلَى الخَيْراتِ يَبْتَدِرُ

وَاصْبِرْ عَلَى نَيْلِهِ صَبْرَ المُجِدِّ لَهُ *** فَلَيْسَ يُدْرِكُهُ مَنْ لَيْسَ يَصْطَبِرُ

يَكْفِيكَ بِالعِلْمِ فَضْلاً أَنَّ صَاحِبَهُ *** بِالعِزِّ نَالَ العُلاَ وَالخَيْرَ يَنْتَظِرُ

وَآهًا لَهُ رَجُلاً فَرْدًا مَحَاسِنُهُ *** بِالحَزْمِ وَالعَزْمِ هَانَ الصَّعْبُ وَالعَسِرُ