الأستاذ:
قويسم الخليل
أستاذ التعليم الثانوي



تمرين شاااامـــــــل
في محور [الأعـــداد المُركبة]

[شعبة: علوم تجريبية، رياضيات وتقني رياضي]

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الخليل للرياضيات
المستوى: ثالثة ثانوي



الأستاذ: قويسم الخليل
الشعبة: جميع الشعب العلمية

تمرين شـــــــامل في مِـحور «الأعداد المركبة»

I) $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

$$P(z) = z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 16z + 32$$

❶ أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z لدينا: $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$

❷ احسب $P(2i)$ و $P(2+2i)$

❸ استنتج الجذور الأخرى لـ $P(z)$

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B ، C ، D و E التي لواحقها على الترتيب z_A ، z_B ، z_C ، z_D و z_E

حيث $z_A = 2+2i$ ، $z_B = 2i$ ، $z_C = \overline{z_B}$ ، $z_D = \overline{z_A}$ و $z_E = \sqrt{3} - i$

❶ اكتب z_A ، z_B ، z_C ، z_D و z_E على الشكل المثلثي ثم الأسي

❷

أ/ أكتب $\left(\frac{z_A}{z_E}\right)$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي

ب/ استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

❸ عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها العدد المركب:

أ/ $(z_A)^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما

ب/ $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما

ج/ $(z_B)^n$ عددا تخيليا صرف

د/ $\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي سالب تماما

❹ بيّن أنّ العدد L_1 ليس حقيقي، حيث: $L_1 = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2024} + \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1445} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{1962} + \left(\frac{z_D}{2\sqrt{2}}\right)^{1954}$

III)

❶ أ/ عيّن لاحقة النقطة F صورة النقطة A بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب/ بينّ أنّ النقط A ، B و F في إستقامية

❷ أ/ اكتب العدد المركب L_2 على الشكل الجبري، حيث: $L_2 = \frac{z_A - z_C}{z_F - z_C}$

ب/ ما طبيعة المثلث ACF

❸ عينّ لا.

❹ عيّن لاحقة النقطة I صورة النقطة O بالإنسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{FB}$

IV)

❶ عيّن لاحقة النقطة J حتى يكون الرباعي $BJCI$ معيّن

❷ بيّن أنّ المستقيمان (BJ) و (DF) متعامدان. هل (IC) و (DF) متعامدان؟ برر إجابتك.

❸ بيّن أنّ المستقيمان (CJ) و (DF) متوازيان. هل (IB) و (DF) متوازيان ؟ برر إجابتك.

❹ أ/ اكتب العدد المركب L_3 على الشكل الأسي، حيث: $L_3 = \dfrac{z_B}{z_J}$

ب/ ما طبيعة المثلث OBJ

V)

❶ تحقق أنّ النقطة I هي منتصف القطعة $[AD]$

❷ عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A,1);(B,2);(C,-2)\}$

❸ عيّن (Γ_1) ، (Γ_2) و (Γ_3) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي بحيث:

$$(\Gamma_1):\ \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right\|$$

$$(\Gamma_2):\ \left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)=0$$

$$(\Gamma_3):\ AM^2+2BM^2-2CM^2=4$$

VI)

❶ s التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A ويحول النقطة O إلى النقطة D، عيّن نسبة وزاوية التشابه المباشر s

❷ أ/ أكتب على الشكل الجبري ثم الأسي، العدد L_4 حيث: $L_4 = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

ب/ استنتج طبيعة المثلث ABC

ج/ عيّن لاحقة النقطة Ω منتصف القطعة $[AC]$

د/ بيّن أنّ النقط A و B ، C و D تنتمي إلى دائرة (C_1) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

❸ لتكن (C_2) الدائرة التي تشمل النقط A، D و F

أ/ عيّن مركز ونصف قطر الدائرة (C_2)، ثمّ احسب مساحتها

ب/ جد (C_3) صورة الدائرة (C_2) بالتشابه المباشر s، ثمّ استنتج مساحة الدائرة (C_3)

❹ نعتبر العدد المركب L_5 حيث: $L_5 = \dfrac{z_B - z_i}{z_A}$

أ/ اكتب L_5 على الشكل الجبري، ثم المثلثي

ب/ استنتج طبيعة الرباعي $OIAB$

❺ أكتب الصيغة المركبة للتحويل f المعرف بـ $f = t \circ h \circ s$

VII) نعتبر النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z

❶ عيّن المجموعة (Δ_1) للنقط M التي تحقق: $|iz-2-2i| = \left|\overline{z}-1+\sqrt{3}i\right|$

❷ عيّن المجموعة (Δ_2) للنقط M التي تحقق: $|2z-4i| = 2$

❸ عيّن المجموعة (Δ_3) للنقط M التي تحقق: $\arg(z-2i) = \dfrac{\pi}{4}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ مع $(z\neq 2i)$

❹ عيّن المجموعة (Δ_4) للنقط M التي من أجلها: $\arg\left(\dfrac{z-z_A}{\overline{z-z_A}}\right) = 2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ مع $(z\neq z_A)$

❺ عيّن المجموعة (Δ_5) للنقط M التي من أجلها: $O = \dfrac{z-2i}{\quad}$ عددا حقيقيا سالبا تماما

❻ عيّن المجموعة (Δ_6) للنقط M التي تحقق: $z = 2 - 2i - 9e^{i\theta}$ مع $\theta \in [0; 2\pi[$

VIII) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z مع $(z \neq 2i)$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = \frac{-6i(z - 2 + 2i)}{z - 2i}$$

❶ تحقق من أنّ: $OM' = \frac{6DM}{BM}$

❷ استنتج أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[BD]$ فإنّ M' تنتمي إلى مجموعة يُطلب تعيينها مع تحديد عناصرا المميزة

❸ بيّن أنّ: $\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}\right) = -\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{DM}\right) + 2k\pi$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$ و $z' \neq z_O$

❹ استنتج أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[BD]$ ما عدا النقطتين B و D ، فإنّ النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يُطلب تعيينها مع تحديد عناصرا المميزة

إنتهـــى ✓



بالتوفيق في شهادة البكالوريا

الأستاذ: قويسم الخليل

نُشر بتاريخ: 03 مايـ 2023

التصحيح المفصل للتمـــــرين الشامل في الأعداد المركبة

المستوى: ثالثة ثانوي جميع الشعب العلمية

(I

❶ إثبات أنه من أجل كل عدد مركب z لدينا $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$

لدينا:

$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 16z + 32}\\ &= \overline{z}^4 - 4\overline{z}^3 + 12\overline{z}^2 - 16\overline{z} + 32\\ &= P(\overline{z})\end{aligned}$$

إذن: $\boxed{\overline{P(z)} = P(\overline{z})}$

❷ حساب $P(2i)$ و $P(2+2i)$

- $P(2i) = (2i)^4 - 4(2i)^3 + 12(2i)^2 - 16(2i) + 32$
$= 16 - 4(-8i) + 12(-4) - 16(2i) + 32$
$= 0$

إذن: $\boxed{P(2i) = 0}$

- $P(2+2i) = (2+2i)^4 - 4(2+2i)^3 + 12(2+2i)^2 - 16(2+2i) + 32$
$= -64 - 4(-16+16i) + 12(8i) - 16(2+2i) + 32$
$= 0$

إذن: $\boxed{P(2+2i) = 0}$

❸ استنتاج جذور أخرى لـ $P(z)$

لدينا: $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
ومنه: $\overline{P(2i)} = P(\overline{2i})$
ومنه: $\overline{P(0)} = P(-2i)$
ولدينا: $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
ومنه: $\overline{P(2+2i)} = P(\overline{2}+2i)$
ومنه: $\overline{P(0)} = P(2-2i)$
إذن حلول المعادلة (E) هي:

$$\boxed{S = \{2i\ ;\ 2+2i\ ;\ 2-2i\ ;\ -2i\}}$$

(II

❶ كتابة z_A ، z_B ، z_C ، z_D و z_E على الشكل المثلثي ثمّ الأسي

لدينا:

- $z_A = 2+2i$
$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= \boxed{2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$

• $z_B = 2i$

$= \boxed{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}$

$= \boxed{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$

• $z_C = \overline{z_B}$

$= \boxed{2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)}$

$= \boxed{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

• $z_D = \overline{z_A}$

$= \boxed{2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)}$

$= \boxed{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

• $z_E = \sqrt{3} - i$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$

$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \boxed{2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)}$

$= \boxed{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

❷ (أ) **كتابة $\left(\frac{z_A}{z_E}\right)$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي**

لدينا:

$$\frac{z_A}{z_E} = \frac{2+2i}{\sqrt{3}-i}$$
$$= \frac{2+2i}{\sqrt{3}-i} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}+2i+2i\sqrt{3}-2}{3+1}$$
$$= \boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

ولدينا:

$$\frac{z_A}{z_E} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$
$$= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}--i\frac{\pi}{6}}$$
$$= \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}}$$

(ب) استنتاج القيمة المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

لدينا:

$$\begin{cases} \dfrac{z_A}{z_E} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \dfrac{z_A}{z_E} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right) \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

وعليه:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \\ &= \frac{4+2\sqrt{3}}{3-1} \\ &= \boxed{2+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

❸ إيجاد قيم العدد الطبيعي n

(أ) $(z_A)^n$ عددا حقيقيّا موجبا تماما:

لدينا: $(z_A)^n = \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$

يكون: $(z_A)^n$ **حقيقيّا موجبا:**

لما: $\arg\left[(z_A)^n\right] = +2k\pi / k \in \mathbb{N}$

أي: $n.\arg(z_A) = 2k\pi$

أي أنّ: $n.\frac{\pi}{4} = 2k\pi$

وعليه قيم العدد الطبيعي n هي من الشكل $\boxed{n = 8k}$ **حيث** $k \in \mathbb{N}$

(ب) $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ عددا حقيقيّا سالبا تماما:

لدينا :

$$\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}\right)^n$$
$$= \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{-i\frac{\pi}{2}}}\right)^n$$
$$= \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n$$
$$= \left(e^{i\left(\frac{2\pi}{2}\right)}\right)^n$$
$$= e^{in\pi}$$

يكون: $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا

لمّا: $\arg\left[\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n\right] = \pi + 2k\pi / k \in \mathbb{N}$

أي: $n.\arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right) = \pi + 2k\pi$

أي أنّ: $n.\pi = \pi + 2k\pi$

وعليه قيم العدد الطبيعي n في هذه الحالة هي : $\boxed{n = 2k+1}$ حيث $k \in \mathbb{N}$

(ج) $(z_B)^n$ عددا تخيّليّا صرفا:

لدينا : $(z_B)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n$

يكون: $(z_B)^n$ تخيّليّا صرفا

لما: $\arg\left[(z_B)^n\right] = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{N}$

أي: $n.\arg(z_B) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

أي أنّ: $n.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

وعليه قيم العدد الطبيعي n في هذه الحالة هي : $\boxed{n = 2k+1}$ حيث $k \in \mathbb{N}$

(د) $\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n$ عددا تخيليا صرفا جزؤه التخيّليّ سالبا:

لدينا :

$$\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^n$$
$$= \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^n$$
$$= \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$
$$= \left(e^{i\left(\frac{2\pi}{4}\right)}\right)^n$$
$$= e^{in\frac{\pi}{2}}$$

يكون $\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n$ تخيليا صرفا جزؤه التخيّليّ سالب تماما

لمّا: $\arg\left[\left(\frac{z_A}{z_D}\right)^n\right] = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{N}^*$

أي: $n.\arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{N}^*$

أي أنّ: $n.\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{N}^*$

يكافئ: $n = -1 + 4k / k \in \mathbb{N}^*$

وعليه

❹ **تبيين أنّ العدد L_1 ليس حقيقي**

$$\begin{aligned}
L_1 &= \left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2024} + \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1445} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{1962} + \left(\frac{z_D}{2\sqrt{2}}\right)^{1954} \\
&= \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}\right)^{2024} + \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^{1445} + \left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^{1962} + \left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}\right)^{1954} \\
&= e^{i506\pi} + e^{i\frac{1445\pi}{2}} + e^{i981\pi} + e^{i\frac{1954\pi}{4}} \\
&= e^{i0\pi} + e^{i\left(722\pi+\frac{\pi}{2}\right)} + e^{i\pi} + e^{i\left(488\pi+\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= 1 + e^{i\left(0\pi+\frac{\pi}{2}\right)} - 1 + e^{i\left(0\pi+\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= 1 + i - 1 + i \\
&= \boxed{2i} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}
\end{aligned}$$

ومنه العدد L_1 تخيلي صرف

(III

❶ **(أ) تعيين لاحقة النقطة F صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$**

لدينا : $z_F - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_O)$

أي $z_F = e^{i\frac{\pi}{2}} z_A$

يكافئ $z_F = i(2 + 2i)$

ومنه $\boxed{z_F = -2 + 2i}$

(ب) تبيين أنّ النقط A ، B و F في استقامية

لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{z_A - z_F}{z_B - z_F} &= \frac{2 + 2i - (-2 + 2i)}{2i - (-2 + 2i)} \\
&= \frac{2 + 2i + 2 - 2i}{2i + 2 - 2i} \\
&= \frac{4}{2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

ومنه: $\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{FB}$

إذن: **النقط A ، B و F في استقامية**

❷ **(أ) كتابة العدد المركب L_2 على الشكل الجبري**

لدينا :

$$\begin{aligned}
L_2 &= \frac{z_A - z_C}{z_F - z_C} \\
&= \frac{2 + 2i - (-2i)}{-2 + 2i - (-2i)} \\
&= \frac{2 + 2i + 2i}{-2 + 2i + 4i} \\
&= \frac{2 + 4i}{-2 + 4i} \\
&= \frac{(1 + 2i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} \\
&= \boxed{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i}
\end{aligned}$$

لدينا : $\left|\frac{z_A - z_C}{z_F - z_C}\right| = \left|\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right| = \frac{\sqrt{9+16}}{5} = 1$

ومنه: $\frac{AC}{FC} = 1$

إذن: $AC = FC$ و $\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_F - z_C}\right) = \theta$ حيث : $\tan(\theta) = -\frac{4}{3}$

ومنه : $\frac{z_A - z_C}{z_F - z_C} = e^{i\theta}$

وبالتالي المثلث AFC متقايس الساقين

❸ تعيين لاحقة النقطة H مركز التحاكي h الذي نسبته $-\frac{1}{3}$ والذي يُحوّل النقطة F إلى النقطة A

من العبارة المركبة للتحاكي لدينا : $z_A - z_H = -\frac{1}{3}(z_F - z_H)$

بعد الحساب نجد $z_H = \frac{3}{4}z_A + \frac{1}{4}z_F$

وعليه : $\boxed{z_H = 1 + 2i}$

❹ تعيين لاحقة النقطة I صورة النقطة O بالإنسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{FB}$

لدينا : $z_B - z_F = \beta$

بالتعويض في العبارة العامة للتحويلات النقطية نجد : $z_I = z_O + (z_B - z_F)$

أي $z_I = z_B - z_F$

بالتعويض نجد $\boxed{z_I = 2}$

IV)

❶ إيجاد لاحقة النقطة J حتّى يكون الرّباعي BJCI معيّن

حتّى يكون الرباعي BJCI معيّن يجب أن يكون : $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IC}$ وَ $BJ = BI$

لدينا : $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IC}$

معناه $z_J - z_B = z_C - z_I$

ومنه $z_J = z_C - z_I + z_B$

ومنه بعد التعويض نجد : $z_J = -2$

الآن نتحقّق من أنّ : $BJ = BI$

وللتحقق لدينا : $BJ = \sqrt{8}$ وأيضا $BI = \sqrt{8}$

إذن لاحقة النقطة J هي : $\boxed{z_J = -2}$

❷ تبيين أنّ المستقيمان (BJ) و (DF) متعامدان:

لإثبات أنّ المستقيمان (BJ) و (DF) متعامدان يكفي إثبات أنّ شعاعي توجيههما متعامدان أي أثبات أنّ $\overrightarrow{BJ} \perp \overrightarrow{DF}$

لدينا :

$$\frac{z_J - z_B}{z_F - z_D} = \frac{-2 - 2i}{-2 + 2i - (2 - 2i)}$$
$$= \frac{-2 - 2i}{-2 + 2i - 2 + 2i}$$
$$= \frac{-2 - 2i}{-4 + 4i}$$
$$= \frac{-(1+i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)}$$
$$= \frac{1}{2}i$$

واضح أنّ $\arg\left(\frac{z_J - z_B}{z_F - z_D}\right) = \frac{\pi}{2}$

إذن $\overrightarrow{BJ} \perp \overrightarrow{DF}$

هل (IC) و (DF) متعامدان ؟

إنّ المستقيمان (IC) و (DF) متعامدان.

التبرير :

هنا نغيّر قليلا ونستعمل الجداء السلّمي أي لإثبات أنّ المستقيمان (IC) و (DF) متعامدان يكفي إثبات أنّ $\overrightarrow{IC} \perp \overrightarrow{DF}$

أي نبيّن أنّ $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$.

لدينا : $\overrightarrow{IC}(-2;-2)$ و $\overrightarrow{DF}(-4;4)$

إذن : $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{DF} = -2(-4) - 2(4) = 8 - 8 = 0$

وبالتالي : $\overrightarrow{IC} \perp \overrightarrow{DF}$

يمكنك استعمال الخاصية التي تقول :

" كل مستقيمان متوازيان هما عموديان على نفس المستقيم "

وذلك باستعمال أنّ الرباعي BJCI معيّن

❸ **تبيين أنّ المستقيمان (CJ) و (DF) متوازيان:**

لإثبات أنّ المستقيمان (CJ) و (DF) متوازيان يكفي إثبات أنّ شعاعي توجيههما مرتبطان خطّيّا .

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{z_J - z_C}{z_F - z_D} &= \frac{-2-(-2i)}{-2+2i-(2-2i)} \\ &= \frac{-2+2i}{-2+2i-2+2i} \\ &= \frac{-2+2i}{-4+4i} \\ &= \frac{(-1+i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

لدينا : $\arg\left(\frac{z_J - z_C}{z_F - z_D}\right) = 0$

وعليه $\left(\overrightarrow{DF};\overrightarrow{CJ}\right) = 0$

ومنه: $\overrightarrow{DF} \parallel \overrightarrow{CJ}$

هل (IB) و (DF) متوازيان ؟

إنّ المستقيمان (IB) و (DF) متوازيان.

التبرير :

لدينا $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{IB}$

لأنّ الرباعي BJCI معيّن

معناه الشعاعان $\overrightarrow{CJ}$ و $\overrightarrow{IB}$ مرتبطان خطّيّا

وكذلك مما سبق وجدنا أنّ الشعاعان $\overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{CJ}$ مرتبطان خطيا

إذن بالتعدي نجد $\overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{IB}$ مرتبطان خطّيّا

ومنه: المستقيمان (IB) و (DF) متوازيان

❹ (أ) **كتابة L_3 على الشكل الأسي**

$$\begin{aligned}\frac{z_B}{z_J} &= \frac{2i}{-2} \\ &= -i\end{aligned}$$

(ب) استنتاج طبيعة المثلث OBJ

لدينا: $\frac{z_B}{z_J} = -i$

هذا معناه أنّ $(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$ **و** $OB = OJ$

إذن: المثلث OBJ قائم في O ومتقايس الساقين

V)

❶ التّحقق من أنّ النقطة I منتصف قطعة المستقيم (AD)

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{z_A + z_D}{2} &= \frac{2+2i+2-2i}{2}\\ &= 2\\ &= z_I\end{aligned}$$

ومنه: I منتصف قطعة المستقيم (AD)

❷ تعيين لاحقة النقطة G

لدينا:

$$\begin{aligned}z_G &= \frac{z_A + 2z_B - 2z_C}{1+2-2}\\ &= 2+2i+2(2i)-2(-2i)\\ &= \boxed{2+10i}\end{aligned}$$

❸ تعيين (Γ_1) ، (Γ_2) و (Γ_3) مجموعة النقط M من المستوي

• تعيين (Γ_1) :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right\| \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \frac{1}{2}\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$$
$$\Rightarrow MG = MI$$

ومنه المجموعة (Γ_1) هي: محور قطعة المستقيم (GI)

• تعيين (Γ_2) :

$$\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right)\bullet\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MG}\bullet 2\overrightarrow{MI} = 0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{MG}\bullet\overrightarrow{MI} = 0$$

ومنه المجموعة (Γ_2) هي: الدائرة التي قطرها [GI]

"يمكنك إستعمال الشكل التحليلي حتى تجد $(x-2)^2+(y-5)^2 = 25$ **"**

• تعيين (Γ_3) :

$$AM^2+2BM^2-2CM^2=4$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2+2\overrightarrow{BM}^2-\overrightarrow{CM}^2=4$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2+2\overrightarrow{BM}^2-\overrightarrow{CM}^2=4$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}\right)^2+2\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}\right)^2-2\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GM}\right)^2=4$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}^2+\overrightarrow{GM}^2+2\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GM}+2\left(\overrightarrow{BG}^2+\overrightarrow{GM}^2+2\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GM}\right)-2\left(\overrightarrow{CG}^2+\overrightarrow{GM}^2+2\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{GM}\right)=4$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}^2+\overrightarrow{GM}^2+2\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{BG}^2+2\overrightarrow{GM}^2+4\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GM}-2\overrightarrow{CG}^2-2\overrightarrow{GM}^2-4\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{GM}=4$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}^2+\overrightarrow{GM}^2+2\overrightarrow{BG}^2-2\overrightarrow{CG}^2+2\overrightarrow{GM}\left(\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}-2\overrightarrow{CG}\right)=4$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}^2+\overrightarrow{GM}^2+2\overrightarrow{BG}-2\overrightarrow{CG}^2+2\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{0}=4$$
$$\Leftrightarrow AG^2+GM^2+2BG^2-2CG^2=4$$
$$\Leftrightarrow GM^2=4-AG^2-2BG^2+2CG^2$$

لدينا:

$$\begin{aligned}AG^2&=|z_G-z_A|^2\\&=|(2+10i)-(2+2i)|^2\\&=|8i|^2\\&=\sqrt{0^2+8^2}^2\\&=64\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}BG^2&=|z_G-z_B|^2\\&=|(2+10i)-(2i)|^2\\&=|2+8i|^2\\&=\sqrt{2^2+8^2}^2\\&=68\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}CG^2&=|z_G-z_C|^2\\&=|(2+10i)-(-2i)|^2\\&=|2+12i|^2\\&=\sqrt{2^2+12^2}^2\\&=148\end{aligned}$$

إذن:

$$GM^2=4-AG^2-2BG^2+2CG^2$$
$$\Leftrightarrow GM^2=4-2(64)-2(68)+2(148)$$
$$\Leftrightarrow GM^2=36$$
$$\Leftrightarrow GM=6$$

ومنه المجموعة (Γ_3) هي: الدائرة التي نصف قطرها 6 ومركزها النقطة G

(VI

❶ **تعيين نسبة وزاوية S**

لدينا : $\begin{cases} z_D=\alpha z_O+\beta \quad ...(1)\\ z_{\ldots}=\alpha z_{\ldots}+\beta \quad ...(2)\end{cases}$

بطرح (1)

بالتعويض نجد $\alpha = 1 + i$
وعليه:
نسبة S هي: $k = |\alpha| = \sqrt{2}$
وزاويته هي: $\theta = \arg(\alpha) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

❷ (أ) كتابة العدد L_4 على الشكل الجبري، ثم الأسي

لدينا:

$$\begin{aligned} L_4 &= \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \\ &= \frac{(2+2i)-(2i)}{(-2i)-(2i)} \\ &= \frac{2}{-4i} \\ &= \frac{2i}{-4ii} \\ &= \frac{1}{2}i \\ &= \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i} \end{aligned}$$

(ب) ستنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا: $L_4 = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$

ومنه: $\begin{cases} \frac{AB}{CB} = \frac{1}{2} \neq 1 \\ \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

إذن: المثلث ABC قائم في B

(ج) تعيين لاحقة النقطة Ω منتصف القطعة [AC]

لدينا:

$$\begin{aligned} z_\Omega &= \frac{z_A + z_C}{2} \\ &= \frac{2+2i-2i}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذن: $\boxed{z_\Omega = 1}$

(د) تبيين أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة (C_1)

• لدينا:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) \cdot \left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) &= \left(\frac{(2+2i)-(-2i)}{(2i)-(-2i)}\right) \cdot \left(\frac{(2i)-(2-2i)}{(2+2i)-(2-2i)}\right) \\ &= \left(\frac{2+4i}{4i}\right) \cdot \left(\frac{-2+4i}{4i}\right) \\ &= \frac{-4+8i-8i-16}{-16} \\ &= \frac{5}{4} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

هذا معناه أن الزاويتان $\left(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DA}\right)$ و $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}\right)$ متكاملتان

وعليه:

إذن النقطة B تنتمي إلى الدائرة التي قطرها [AC]
إذن مركز الدائرة (C_1) هو منتصف القطعة [AC]
أي مركز الدائرة (C_1) هو النقطة Ω ونصف قطرها هو: $\frac{AC}{2} = \frac{|z_A - z_C|}{2} = \sqrt{5}$ إذن: $\boxed{C_1(\Omega; \sqrt{5})}$

❸ (أ) تعيين مركز الدّائرة (C_2) ونصف قطرها ، وحساب مساحتها

• لدينا : $\overrightarrow{AF}(-4;0)$ ، $\overrightarrow{AD}(0;-4)$ و $\overrightarrow{DF}(-4;4)$
ومنه: $AF = 4$ ، $AD = 4$ و $DF = \sqrt{32}$.
وعليه : $AF^2 = 16$ ، $AD^2 = 16$ و $DF^2 = 32$
وعليه حسب نظرية فيثاغورس العكسية فإن المثلث AFD قائم في النقطة A .
• بما أن الدّائرة (C_2) تشمل النقط A ، D و F
فإنها تكون محيطة بالمثلث القائم AFD ويكون وتره، القطعة [DF] هو قطر الدائرة (C_2)
• ايجاد مركز الدائرة (C_2)

$$\frac{z_D + z_F}{2} = \frac{2 - 2i - 2 + 2i}{2} = 0 = z_O$$

إذن مركز الدائرة (C_2) هو مبدأ المعلم
وطول نصف قطرها هو $r = \frac{DF}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$
أي: $\boxed{C_2(O; 2\sqrt{2})}$
ومساحة (C_2) هي : $S_{(C_2)} = \pi r^2 = \pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 = \boxed{8\pi cm^2}$

(ب) إيجاد (C_3) صورة الدائرة (C_2) بالتشابه المباشر S ، واستنتاج مساحة الدّائرة (Γ')

لدينا العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' - z_A = (1+i)(z - z_A)$
ومنه $z' = (1+i)z + 2 - 2i$
لدينا $r' = kr = \sqrt{2}(2\sqrt{2})$
أي $r' = 4$
ولدينا $z_D = (1+i)z_O + 2 - 2i$
ومنه: $z_D = 2 + 2i$
ومنه (C_3) صورة الدائرة (C_2) بالتشابه المباشر s هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها هو $r' = 4$ أي:
$\boxed{C_3(D;4)}$
ومساحتها هي : $S_{(C_3)} = k^2 S_{C_2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 \times 8\pi = \boxed{16\pi cm^2}$

❹ (أ) كتابة العدد المركب L_5 على الشكل الجبري ثمّ المثلثي

لدينا :

$$L_5 = \frac{z_B - z_I}{z_A} = \frac{(2i) - (2)}{2 + 2i} = \frac{-2 + 2i}{2 + 2i} \times \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = i$$

ومنه:

$$\boxed{L_5 = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

(ب) استنتاج طبيعة الرباعي OIAB

• لدينا $\left|\frac{z_B - z_I}{z_A}\right| = \left|\frac{z_B - z_I}{z_A - z_O}\right| = |i| = 1$
ومنه: $|z_B - z_I| = |z_A - z_O|$
ومنه: IB = OA

لدينا: $\frac{z_A + z_O}{2} = \frac{z_I + z_B}{2} = 1 + i$،

من هنا نؤكد أن قطرا الرباعي OIAB متناصفان ومتعامدان ومتساويان

إذن: OIAB مربع

❺ كتابة الصيغة المركبة للتحويل f

العبارة المركبة للانسحاب t هي : $z' = z + 2$

العبارة المركبة للتحاكي h هي : $z' = -\frac{1}{3}z + \frac{4}{3} + \frac{8}{3}i$

العبارة المركبة للتشابه المباشر هي : $z' = (1+i)z + 2 - 2i$

لنعرف الآن التركيب ونستعمل نفس الفكرة في تركيب الدوال فنجد :

العبارة المركبة للتحويل $t \circ h$ كمايلي : $z' = -\frac{1}{3}z + \frac{10}{3} + \frac{8}{3}i$

وعليه العبارة المركبة للتحويل f هي : $\boxed{z' = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\right)z + \frac{8}{3} + \frac{10}{3}i}$

لدينا: $\begin{cases} \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\right) \in \mathbb{C} \\ \left|-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\right| = \frac{\sqrt{2}}{3} \neq 1 \end{cases}$

إذن f يمثّل تشابه مباشر:

نسبته هي : $k_f = \left|-\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{3}$

وزاويته هي : $\theta_f = \pi + \frac{\pi}{4}$

ولاحقة مركزه هي : $z_{\Omega'} = \frac{42}{17} + \frac{32}{17}i$

(VII

❶ تعيين المجموعة (Δ_1)

لدينا:

$$\begin{aligned} |iz - 2 - 2i| = \left|\overline{z} - \sqrt{3} - i\right| &\Rightarrow \left|i\left(z - \frac{2}{i} - 2\right)\right| = \left|\overline{z} - \sqrt{3} - i\right| \\ &\Rightarrow \left|i\left(z - \frac{2i}{ii} - 2\right)\right| = \left|z - \sqrt{3} + i\right| \\ &\Rightarrow |i(z + 2i - 2)| = \left|z - \sqrt{3} + i\right| \\ &\Rightarrow |i|\,|z + 2i - 2| = \left|z - \sqrt{3} + i\right| \\ &\Rightarrow |z - (2 - 2i)| = \left|z - \left(\sqrt{3} - i\right)\right| \\ &\Rightarrow |z - z_D| = |z - z_E| \\ &\Rightarrow DM = EM \end{aligned}$$

ومنه المجموعة (Δ_1) مجموعة النقط M من المستوي هي:
محور القطعة المستقيمة [DE]

❷ تعيين المجموعة (Δ_2)

$$\begin{aligned} |2z - 4i| = 2 &\Rightarrow |2(z - 2i)| = 2 \\ &\Rightarrow |2|\,|z - 2i| = 2 \\ &\Rightarrow |z - 2i| = 1 \\ &\Rightarrow |z - z_B| = 1 \end{aligned}$$

الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $r = 1$

❸ **تعيين المجموعة (Δ_3)**

لدينا

$$\begin{aligned}\arg(z-2i) &= \arg(z-z_B)\\ &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

ومنه:

$$\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

ومنه المجموعة (Δ_3) مجموعة النقط M من المستوي هي:
نصف المستقيم الذي مبدؤه B ويشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{4}$ مع حامل محور الفواصل في الإتجاه المباشر ، باستثناء النقطة B (لأن عمدة الصفر غير معيّنة)

❹ **تعيين المجموعة (Δ_4)**

لدينا:

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z-z_A}{\overline{z-z_A}}\right) = 2k\pi &\Rightarrow \arg(z-z_A) - \arg(\overline{z-z_A}) = 2k\pi\\ &\Rightarrow \arg(z-z_A) - (-\arg(z-z_A)) = 2k\pi\\ &\Rightarrow 2\arg(z-z_A) = 2k\pi\\ &\Rightarrow \arg(z-z_A) = k\pi\\ &\Rightarrow \left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = k\pi\end{aligned}$$

ومنه المجموعة (Δ_4) مجموعة النقط M من المستوي هي:
المستقيم الذي يشمل النقطة A والموازي لحامل محور الفواصل باستثناء النقطة A

❺ **تعيين المجموعة (Δ_5)**

لدينا $Q = \dfrac{z-2i}{z-2+2i} = \dfrac{z-z_B}{z-z_D}$

لدينا: Q حقيقي سالب تماما معناه: $\arg(Q) = \left(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{BM}\right) = \pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

وعليه الشعاعين $\overrightarrow{DM}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطين خطيا وفي إتجاهين متعاكسين
ومنه المجموعة (Δ_5) مجموعة النقط M من المستوي هي:
القطعة المستقيمة $]BD[$

❻ **تعيين المجموعة (Δ_6)**

لدينا:

$$\begin{aligned}z = 2-2i-9e^{i\theta} &\Rightarrow z-(2-2i) = -9e^{i\theta}\\ &\Rightarrow z-z_D = -9e^{i\theta}\\ &\Rightarrow |z-z_D| = 9\\ &\Rightarrow DM = 9\end{aligned}$$

ومنه المجموعة (Δ_6) مجموعة النقط M من المستوي هي:
الدائرة التي مركزها النقطة D وطول نصف قطرها هو $r = 9$

(VIII

❶ **التّحقق من أنّ : $OM' = 6\dfrac{DM}{BM}$**

لدينا

ومنه: $z' - z_O = -6i\left(\dfrac{z - z_D}{z - z_B}\right)$

ومنه: $|z' - z_O| = 6\left|\dfrac{z - z_D}{z - z_B}\right|$

ومنه: $OM' = 6 \times \dfrac{DM}{BM}$

❷ **استنتاج أنّه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة [BD] فإن M′ تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها**

لدينا: M تنتمي إلى محور قطعة المستقيم (DB)

معناه: $DM = BM$

ومنه: $OM' = 6$

إذن: M′ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة O وطول نصف قطرها هو $r = 6$

❸ **تبيين أنّ** $\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{DM}\right) + 2k\pi$

لدينا

$$z' - z_O = -6i\left(\frac{z - z_D}{z - z_B}\right) \Rightarrow \arg(z' - z_O) = \arg\left(-6i\left(\frac{z - z_D}{z - z_B}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \arg(z' - z_O) = \arg(-6i) + \arg\left(\frac{z - z_D}{z - z_B}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}\right) = -\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{DM}\right) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

❹ **استنتاج إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر [BD] فإنّ M′ تنتمي إلى مجموعة يُطلب تعيينها**

لدينا: M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر [BD] ماعدا النقطتين B و D

معناه $\left(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{DM}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$

ومنه: $\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} + k\pi + 2k\pi$

ومنه: $\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}\right) = 3k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $M' \neq O$

أي أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{OM'}$ مرتبطين خطيا

ومنه M′ تنتمي إلى حامل محور الفواصل باستثناء النقطة O