الباب 4

# دالة اللوغاريتم النيبيري



لقد تمكنا من تقدير عمر اللوحات والنقوش المكتشفة في كهف لاسكو بفرنسا بفضل التأريخ بالكربون 14. عندما يموت كائن حي، تقل نسبة الكربون 14 الذي يحتويه بالنسبة للمواد المحيطة بمرور الوقت: نقول أن الكربون يتبع قانون التناقص الإشعاعي. يتم حساب عمر فحم الخشب، وبالتالي لوحات الكهوف، باستخدام اللوغاريتم النيبيري، نرمز له ب ln حيث: $t = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{A(t)}{A_0}\right)$، حيث $t$ هو الزمن، $A(t)$ عدد ذرات الكربون 14 المضمحلة بدلالة الزمن و $A_0$ و $\lambda$ هما ثابتان موجبان تمامًا.

تجدون في هذا الملف

1 الدرس

2 تطبيقات محلولة

3 طرائق هامة لحل التمارين

+ لمزيد من الأعمال...

BAC

- قرص الجامع في الرياضيات
- قرص EXTRA BAC
- أولمبياد الرياضيات
- حوليات شهـ

الحفيظي عادل

# الدرس

## 1 تعريف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية:

**تعريف:** نسمي الدالة اللوغاريتمية النيبيرية الدالة التي نرمز لها بـ $\ln$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي $x$ من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$ و نكتب $f(x)=\ln x$ [1]

**خواص:** من أجل كل عددان حقيقيان $a$ و $b$ من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي $n$ لدينا :

$\ln 1=0$ ، $\ln e=1$ ، $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$ ، $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ ، $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$

- $\ln a^n=n\ln a$ ، $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$ ، $e^{\ln a}=a$
- $\ln a=\ln b$ يعني $a=b$ ، $\ln a<\ln b$ يعني $a<b$ ، $\ln a\geq\ln b$ يعني $a\geq b$
- $\ln a>0$ يعني $a>1$ و $\ln a<0$ يعني $0<a<1$

**تنبيه:** من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}$ : $\ln x^2=2\ln|x|$ وبصفة عامة:

$$\ln x^n=\begin{cases} n\ln|x| & : n \text{ زوجي} \\ n\ln x & : n \text{ فردي} \end{cases}$$

### ■ دراسة تغيرات الدالة اللوغاريتمية:

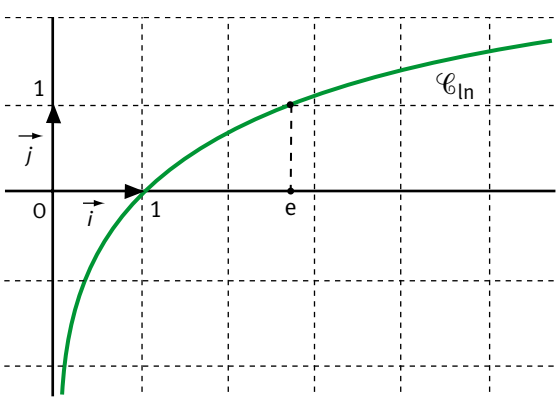
**1 مجموعة التعريف:** لدينا : $f(x)=\ln x$ و هي معرفة من أجل $x>0$ أي $D_f=]0;+\infty[$

**2 النهايات:** $\lim\limits_{x\to 0^{>}}\ln x=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

**3 جدول التغيرات :** [2]

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | ‖ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\ln(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

**4 التمثيل البياني :**




**تطبيق 01: بسط العبارات التالية :** [3] [4] [5] الانتقال الى الحل

(1 $\ln 3+\ln\frac{1}{3}$ (2 $ln\sqrt{\sqrt{2}+1}+ln\sqrt{\sqrt{2}-1}$ (3 $\ln\sqrt{e^3}-\ln\frac{\sqrt{e}}{e^2}$ (4 $\ln(128)^2-\ln(16\times 32)$

**الحل:**

.....

.....

..... .....

## 2 مجموعة تعريف الدالة اللوغاريتمية:

**مبرهنة:**

نضع $f(x)=\ln u(x)$ حيث $u$ دالة عددية ، تكون الدالة $f$ معرفة إذا و فقط إذا كان: $u(x)>0$ [1]

**تطبيق 02:** عين مجموعة تعريف الدالة في كل حالة [4] [5]

الانتقال الـى الحـل

(1) $\ln(x^2)$

(2) $\ln(1-x)$

(3) $\ln(x-3)$

(4) $\frac{1}{x}\ln(1+x)$

(5) $\frac{1}{\ln x}$

(6) $\ln(x^2+4x)$

(7) $\ln(-x)$

(8) $\ln|x+1|-\ln|x-1|$

(9) $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

**الحل:**

## 3 حل المعادلات والمتراجحات :

**طريقة:**

◄ لحل معادلة من الشكل $ln[u(x)] = a$ (متراجحة من الشكل $ln[u(x)] < a$ )

1) نعين $D$ مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة ).

2) نحل في $D$ المعادلة $u(x) = e^a$ (المتراجحة $u(x) < e^a$ ).

ولا نحتفظ من هذه الحلول إلاّ بتلك التي تنتمي إلى المجموعة $D$.

◄ لحل معادلة من الشكل $ln[u(x)] = ln[v(x)]$ (متراجحة من الشكل $ln[u(x)] < ln[v(x)]$ )

1) نعين $D$ مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة ).

2) نحل في $D$ المعادلة $u(x) = v(x)$ (المتراجحة $u(x) < v(x)$ ).

ولا نحتفظ من هذه الحلول إلا بتلك التي تنتمي إلى المجموعة $D$.

[1] [5]

**تطبيق 03:** **حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :** [3] [4] [6] الانتقال الـى الحـل

1) $2\ln x = \ln 9$ 2) $\ln x^2 = 4$ 3) $\ln x - \ln(x-2) = 1$ 4) $(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$

5) $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

**الحل:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**تطبيق 04:** حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : [3] [4] [6] [5] الحـــل الانتقال

1) $-1 \le \ln x \le 2$ 2) $\ln(x^2-1) \ge 0$ 3) $\ln|x| < 1$ 4) $(\ln x)^2 - 1 \le 0$

5) $(x^2-4x)\ln x \ge 0$ 6) $\ln x + \ln(x-1) > \ln 6$

**الحل:**

.....

.....

.....

## 4 مشتقة الدالة اللوغاريتمية:

**مبرهنة:** نضع : $f(x)=\ln u(x)$ حيث $u$ دالة عددية و $u>0$

إذا كانت الدالة $u$ قابلة للإشتقاق على المجال $I$ فإن الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $I$ [1]

و بالتالي : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

**ملاحظة:** إذا كانت $f(x)=\ln|v(x)|$ فإن $f'(x)=\dfrac{v'(x)}{v(x)}$

**تطبيق 05:** أحسب الدالة المشتقة في كل حالة [3] [4] [5] الانتقال الـــى الحـــل

1) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+\ln x$ 3) $h(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$ 5) $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ 7) $k(x)=\dfrac{x}{1-\ln x}$

2) $f(x)=\ln\left(e^{2x}-5e^{x}+6\right)$ 4) $f(x)=x\ln|x|$ 6) $f(x)=-\dfrac{x}{2}+1+2\ln x$ 8) $f(x)=\dfrac{e}{\ln x}$

**الحل:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 5 النهايات الشهيرة :

**مبرهنة:** [1]

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0^-$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$ ، $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ ، $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0^+$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \ln x = 0^-$

**تطبيق 06:** أحسب النهايات التالية : [2] [4] [5] الانتقال الحل

(1 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ (2 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - \ln x\right)$

(3 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{e^x}{x\ln x}$ (4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

(5 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$ (6 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)$

(7 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ (8 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

**الحل:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 6 دالة اللوغاريتم العشري :

**تعريف:**

نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز لها بالرمز log و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ [1]

**خواص:**

- $\log 1 = 0$ ، $\log 10 = 1$
- إذا كان $x$ عددا حقيقيا حيث : $10^n \leq x \leq 10^{n+1}$ فإن $n \leq \log x \leq n+1$

كل الخواص الجبرية للدالة ln تبقى صحيحة من قبل الدالة log

**تطبيق 07:** [3]

الانتقال الـــى الحـــل

- نعتبر العدد الطبيعي $n$ حيث $n = 2^{1234}$

1) عين باستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log n$.

2) استنتج الحصر التالي: $10^{371} \leq n < 10^{372}$.

3) ما هو عدد أرقام العدد $2^{1234}$

**الحل:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**تطبيق 08:** [4] [5] الانتقال الحـــل

1) **احسب** $\log(1)$ و $\log(10)$، ثم $\log(100)$ و $\log(1000)$ و $\log(10000)$.

2) **احسب المجموع :** $S = \log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+\ldots+\log\frac{98}{99}+\log\frac{99}{100}$

3) **حل في** $\mathbb{R}$ **المعادلات و المتراجحات التالية :**

- $\log x+\log(x-1)=\log 6$
- $2(\log x)^2+5\log x-3=0$
- $\log x>3$
- $\log(x-6)>2\log x$

**الحل:**

## 7 بعض استعمالات اللوغاريتم العشري :

### في علم الزلازل:

**تطبيق 09:** [5] الانتقال إلى الحل

• يشير المقدار $I_0$ إلى شدة قاعدية مرجعية، وعندها نقول إن درجة زلزال شدته $I$ تساوي $M$ .

◂ إذا كان $M = \log(I/I_0)$ ، فما درجة الزلزال الذي وقع في لوس أنجلس عام 1971 إذا علمت أنّ $I = 50.01 \times 10^6 I_0$ .

**الحل:**

.....

.....

.....

.....

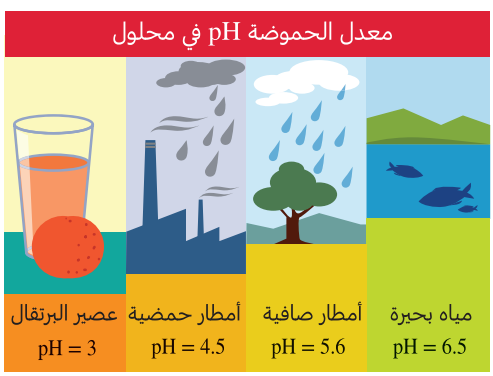
### في الكيمياء:

**تطبيق 10:** [7] الانتقال إلى الحل

• يُقاس التركيز المولي لأيونات الهيدروجين في محلول معيّن من خلال صيغة pH المعرّفة كما يلي: $\text{pH} = log\ \frac{1}{[H^+]}$ .

حيث $[H^+]$ التركيز المولي لأيونات الهيدروجين بوحدة المول لكل ليتر (mol/L).

◂ أوجد التركيز المولي لأيونات الهيدروجين في الأمطار الحمضية.




**الحل:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 8 تحقق من فهمك الجيد للدرس :

الانتقال الـــى الحـــل

### أجب ب "صح" أو " خطأ":

[4] [6]

1. $e^{5\ln(2)} \times e^{7\ln(4)} = 2^{19}$ ☐
2. الدالة: $x \mapsto (\ln x)^2$ معرفة على $\mathbb{R}^*_+$ ☐
3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $\alpha$ فإن
$\ln 2^{\alpha} = \ln \alpha^2$ ☐
4. من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $x$ :
$\ln|x| > 0$ ☐
5. إذا كان $|x| < 1$ فإن : $\ln|x| < 0$ ☐
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$ ☐
7. $Lim\limits_{x \to -\infty} [\ln(-x)] = +\infty$ ☐
8. $\ln(-2)^{1830} = 1830\ln 2$ ☐
9. $\dfrac{\ln 12}{\ln 3} = \ln\dfrac{12}{3} = \ln 4$ ☐
10. للمعادلة $x\ln(x) = 3\ln(x)$ في المجال $]0 ; +\infty[$
حلان مختلفان هما : 1 وَ 3 . ☐
11. من أجل كل عددان حقيقيان موجبان تماما :
$\ln(a+b) = \ln a + \ln b$ ☐
12. من أجل كل عددان حقيقيان موجبان تماما :
$\ln(a) \times \ln(b) = \ln(a \times b)$ ☐
13. $(\ln(a))^n = n\ln(a) : n \in \mathbb{N}, a > 0$ ☐
14. $x$ وَ $y$ عددان حقيقيان غير معدومين :
إذا كان $\ln(x^2) = \ln(y^2)$ فإن $x = y$ ☐

### وضّح إشارة كل عدد حقيقي مما يلي:

☐ $\ln(3)$ ☐ $\ln(0,5)$ ☐ $\ln(1,01)$
☐ $\ln(0,95)$ ☐ $\ln(e^{-1})$ ☐ $\ln(\sqrt{2})$

### أتمم مايلي:

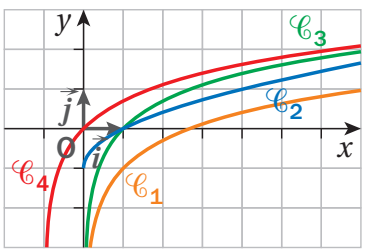
[6]

a. $\ln(e^{-5}) = \ldots$ b. $e^{\ln(\frac{1}{2})} = \ldots$
c. $\ln(\ldots) = -1$ d. $\ln(e^{\cdots}) = \dfrac{1}{e}$
e. $e^{\ln(\ldots)} = \sqrt{2}$ f. $\ln(\ldots) = \dfrac{3}{7}$

### أكمل بعلامة = أو ≠ مايلي:

$\ln(6) + \ln(11)$ ..... $\ln(17)$
$\ln(8) - \ln(4)$ ..... $\ln(2)$
$\ln(7) \times \ln(9)$ ..... $\ln(63)$
$\ln[(\sqrt{2}-1)^{142}] + \ln[(\sqrt{2}+1)^{142}]$ ..... $0$

### اختر الاجابة الصحيحة:




من بين المنحنيات المقابلة ، أي منها يمثل الدالة اللوغاريتمية النيبيرية؟

☐ $\mathscr{C}_4$ ☐ $\mathscr{C}_3$ ☐ $\mathscr{C}_2$ ☐ $\mathscr{C}_1$

### أجزاء مفقودة:

وجد معاذ تمريناً في الرياضيات مع حلّه ، لكنه يتضمن أجزاء غير مقروءة بسبب ملامسته للحبر. ساعد معاذ على إيجاد الأجزاء التي خالطت بقع الحبر.

**النص**

أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، لدينا:
$\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

**الحـــل**

من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، لدينا:

$$x + \ln(1 + e^{-x}) = \ln(\quad) + \ln(1 + e^{-x})$$
$$= \ln(e^x (\quad))$$
$$= \ln(\quad + e^{x-x})$$
$$= \ln(e^x + \quad)$$

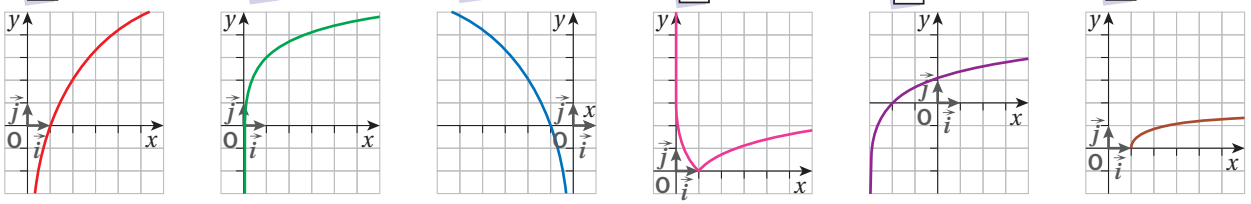
# مـــراجعة سريعة

**في أقل من دقـيقة !** [6] الانتقال الـــى الحـــل

أرفق كل عبارة دالة بالتمثيل البياني الموافق لها:

**1.** $f(x) = \ln(x) + 3$ **2.** $g(x) = |\ln(x)|$ **3.** $h(x) = 3\ln(-x)$ **4.** $k(x) = \sqrt{\ln(x)}$ **5.** $l(x) = \ln(x^3)$ **6.** $m(x) = \ln(x + 3)$

a. ☐ b. ☐ c. ☐ d. ☐ e. ☐ f. ☐



**أسئلة الإختيار من متعدد:** لكل سؤال من الأسئلة التالية ، ضع إطار حول الإجابة ( أو الأجوبة ) الصحيحة.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **01** $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ldots$ | $-\ln(6)$ | $\ln(6)$ | $\ln\left(\frac{1}{6}\right)$ | $\ln\left(\frac{5}{6}\right)$ |
| **02** $\ln(10e^2) = \ldots$ | $2\ln(10) + 2$ | 4,302585 093 | $2\ln(10e)$ | $\ln(10) + 2$ |
| **03** $e^{\ln(a) + \ln(b)} = \ldots$ | $ab$ | $a + b$ | $\frac{a}{b}$ | $a + \ln(b)$ |
| **04** $\ln(5a) - \ln(a) = \ldots$ | $\ln(4a)$ | $\ln(5)$ | $4\ln(a)$ | $\ln(5a - a)$ |
| **05** $\ln(e + e^2) = \ldots$ | $\ln(e) + \ln(e^2)$ | $\ln(e + 1) + 1$ | $\ln(e^3)$ | $\ln(3e)$ |
| **06** $\ln(64) = \ldots$ | $2\ln(8)$ | $\ln(2) \times \ln(32)$ | $6\ln(2)$ | $\ln(4) + \ln(16)$ |
| **07** الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{-x}$ **1.** صورة $\ln(2)$ بـ $f$ هي: | $-2\ln(2)$ | $\ln(2)$ | $\frac{1}{2}\ln(2)$ | $2\ln(2)$ |
| **2.** صورة $\ln(e^3)$ بـ $f$ هي: | $3e^{-3}$ | $\frac{3\ln(e)}{e^3}$ | $-3e^{\ln(3)}$ | $\frac{3}{e^3}$ |
| **08** $g(x) = \ln(\ln(x))$ . $D_g = ]1 ; +\infty[$ $g'(x) = \ldots$ | $\frac{1}{\ln(x)}$ | $\frac{1}{x} \times \frac{1}{x}$ | $\frac{1}{x\ln(x)}$ | $\frac{1}{x}\ln(x)$ |

# حلول التطبيقات

**تطبيق 01:** [3] [4] [5]

1. $\ln 3 - \ln 3 = 0$

2. $ln\sqrt{\sqrt{2}+1} + ln\sqrt{\sqrt{2}-1} = ln\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) = ln\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = ln\sqrt{2-1} = ln1 = 0$

3. $\ln\sqrt{e^3} - \ln\frac{\sqrt{e}}{e^2} = \ln\left(e^3\right)^{\frac{1}{2}} - \ln e^{\frac{1}{2}} + \ln e^2 = \ln e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\ln e + 2\ln e = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2 = 3$

4. $\ln\left(128\right)^2 - \ln\left(16\times 32\right) = \ln\left(2^7\right)^2 - \ln\left(2^4\times 2^5\right) = \ln 2^{14} - \ln 2^9 = 14\ln 2 - 9\ln 2 = 5\ln 2$

**تطبيق 02:** [4] [5]

1. $\ln(x^2)$ معرف عندما $x^2 > 0$، أي $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2. $\ln(1-x)$ معرف عندما $1-x>0$، أي $x<1$، إذن $x \in ]-\infty,1[$.

3. $\ln(x-3)$ معرف عندما $x-3>0$، أي $x>3$، إذن $x \in ]3,+\infty[$.

4. $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ معرف في حالة $(1+x>0$ و $x\neq 0)$ أي $(x>-1$ و $x\neq 0)$، إذن

$$x \in ]-1,+\infty[\setminus\{0\} = ]-1,0[\cup]0,+\infty[$$

5. $\frac{1}{\ln x}$ معرف في حالة $(x>0$ و $\ln x \neq 0)$ أي $(x>0$ و $x\neq 1)$، إذن

$$x \in ]0,+\infty[\setminus\{1\} = ]0,1[\cup]1,+\infty[$$

6. $\ln(x^2+4x)$ معرف عندما $x^2+4x>0$. $x^2+4x$ ثلاثي حدود من الدرجة الثانية، جذراه 0 و $-4$، فتتحق المتراجحة $x^2+4x>0$ خارج هذين الجذرين، بمعنى أنَّ $x \mapsto \ln(x^2+4x)$ معرف على $]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$.

7. $-x>0$ تكافئ: $x<0$ ومنه: $D = ]-\infty;0[$

8. $\ln|x+1| - \ln|x-1|$ معرف في حالة $x+1\neq 0$ و $x-1\neq 0$ أي على $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$،

9. $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$ معرف عندما $\frac{x-3}{2-x}>0$. أي على المجال $]2,3[$.

**تطبيق 03:** [3] [4] [6]

**1** $2\ln x = \ln 9$ هذه المعادلة معرفة من أجل $x > 0$ أي $D = ]0, +\infty[$

$2\ln x = \ln 9$ تكافئ $2\ln x = 2\ln 3$ ومنه $x = 3$ وأخيرا $S = \{3\}$.

**2** لدينا : $\ln x^2 = 4$ مجموعة التعريف : $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ ومنه : $D = \mathbb{R}^*$

وعليه المعادلة تكافئ : $\ln x^2 = 4\ln e$ أي : $\ln x^2 = \ln e^4$ ومنه : $x^2 = e^4$ أي : $x = e^2$ أو $x = -e^2$

إذن الحلول هي : $e^2$ , $-e^2$

**3** لدينا : $\ln x - \ln(x-2) = 1$ مجموعة التعريف $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0; x > 2\}$

ومنه : $D = ]2; +\infty[$ وعليه المعادلة تكافئ : $\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) = \ln e$ أي أن : $\frac{x}{x-2} = e$ ومنه : $x = xe - 2e$

إذن : $(1-e)x = -2e$ ومنه : $x = \frac{-2e}{1-e}$ مقبول ( لأن $\frac{-2e}{1-e} > 2$ ) .

**4** $(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$ مجموعة التعريف : $x > 0 \Rightarrow D = ]0; +\infty[$ ; $\ln x = X$

$(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0 \Rightarrow X^2 - X - 6 = 0 \Rightarrow (X-3)(X+2) = 0$

$\Rightarrow X = 3$ أو $X = -2 \Rightarrow x = e^3$ أو $x = e^{-2}$; $\begin{cases} e^{-2} \in D \\ e^3 \in D \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{e^{-2}; e^3\}}$

**5** $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

المعادلة معرّفة على $I = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ . وهي تكافئ $|x-2||x+2| = 1$ أو $|x^2-4| = 1$ . فإمّا أن يكون $x^2 = 5$ أو يكون $x^2 = 3$ . فمجموعة حلول المعادلة المعطاة هي $S = \{-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$

**تطبيق 04:** [3] [4] [6] [5]

**1** المتراجحة $-1 \leq \ln x \leq 2$ معرفة من أجل $x > 0$ أي $D = ]0, +\infty[$

$-1 \leq \ln x \leq 2$ تكافئ $e^{-1} \leq x \leq e^2$ أي $S = \left[\frac{1}{e}, e^2\right]$

**2** المتراجحة $\ln(x^2-1) \geq 0$ معرفة من أجل $x^2 - 1 > 0$ أي $D = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$

$\ln(x^2-1) \geq 0$ تكافئ $(x^2-1) \geq 1$ أي $x^2 \geq 2$ أي $x \geq \sqrt{2}$ أو $x \leq -\sqrt{2}$ إذن $S = ]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$

**3** لدينا : $\ln|x| < 1$ مجموعة التعريف : $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ و المتراجحة تكافئ : $\ln|x| < \ln e$

ومنه : $|x| < e$ إذن : $-e < x < e$ وعليه حلول المتراجحة هي المجموعة : $]-e; 0[ \cup ]0; e[$ .

**4** $(\ln x)^2 - 1 \leq 0$ ; $D = ]0; +\infty[$

$(\ln x)^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq \ln x \leq 1$

$\Rightarrow e^{-1} \leq x \leq e \Rightarrow \boxed{S = [e^{-1}; e]}$

つづく

**5** لدينا : $(x^2-4x)\ln x \geq 0$ مجموعة التعريف : $D=]0;+\infty[$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4x$ | - | | - | 0 | + | |
| $\ln x$ | - | 0 | + | | + | |
| $(x^2-4x)\ln x$ | + | 0 | - | 0 | + | |

مجموعة حلول المتراجحة : $]0\ ;\ 1]\cup[4\ ;\ +\infty[$ .

**6** لدينا : $\ln x+\ln(x-1)>\ln 6$ مجموعة التعريف : $D=\{x\in\mathbb{R}: x>0, x>1\}$ حيث : $D=]1;+\infty[$

و المتراجحة تكافئ : $\ln x(x-1)<\ln 6$ إذن : $x^2-x>6$

وعليه : $x^2-x-6>0$ ومنه : $\Delta=25$ , $x_1=-2$ , $x_2=3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | $\infty+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x-6$ | + | 0 | - | 0 | + | |

وعليه حلول المتراجحة هي المجموعة : $]-\infty;-2[\cup]3;+\infty[$

لكن $D=]1;+\infty[$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي : $]3;+\infty[$

## تطبيق 05 : [3] [4] [5]

**1** لدينا : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln x$ الدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث : $f'(x)=x-1+\frac{1}{x}=\frac{x^2-x+1}{x}$

**2** الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على $]-\infty;\ln 2[\cup]\ln 3;+\infty[$ حيث : $f'(x)=\frac{2e^{2x}-5e^x}{e^{2x}-5e^x+6}$

**3** $h(x)=ln\frac{x-1}{x+1}$ . $h$ معرفة على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ .

$h(x)=ln\frac{x-1}{x+1}=ln|x-1|-ln|x+1|$ ومنه $h'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$.

**4** الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ حيث: $f'(x)=1\ln|x|+x\times\frac{1}{x}=\ln|x|+1$

つづく

5 الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث: $f'(x)=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\times(\ln x)=\frac{\ln x}{x}$

6 $f(x)=-\frac{x}{2}+1+2\ln x$ . $f$ معرفة على $D_f=]0,+\infty[$ و $f'(x)=\frac{4-x}{2x}$

7 $k(x)=\frac{x}{1-\ln x}$ . $k$ معرفة على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ و $k'(x)=\frac{1\times(1-\ln x)-\left(-\frac{1}{x}\right)x}{(1-\ln x)^2}=\frac{2-\ln x}{(1-\ln x)^2}$.

8 $f(x)=\frac{e}{\ln x}$ . $f$ معرفة على $D_f=]0,+\infty[$ و $f'(x)=-\frac{e}{x(\ln x)^2}$

## تطبيق 06: [5] [4] [2]

1 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x-\frac{1}{x}\ln x\right)=+\infty$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

3 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{e^x}{x\ln x}=-\infty$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{1+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)=-\infty$

5 $\frac{\ln(x+1)}{x^2}=\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{1}{x}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ و $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ x>0}}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ x<0}}\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty$

وعليه : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)=-\infty$

6 في جوار $+\infty$ لدينا $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{x}{\ln x}$ . ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)=+\infty$ ،

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ .

7 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\substack{\tau\to 0\\ >}}\frac{\ln(1+\tau)}{\tau}=1$ ( بوضع $\frac{1}{x}=\tau$ لما $x\longmapsto+\infty$ فإن : $\tau\overset{>}{\longmapsto}0$

つづ

**8**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{z\to+\infty}\frac{\left[\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right]^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[2\ln\left(\sqrt{x}\right)\right]^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$$

( بوضع $\sqrt{x}=t$ لما : $x\mapsto+\infty$ فإن : $t\mapsto+\infty$

## تطبيق 07 : [3]

**1** $\log n=\log 2^{1234}=1234\log 2$ باستعمال الآلة الحاسبة نجد $\log n\simeq 371,47101....$

إذن الجزء الصحيح للعدد $\log n$ هو 371 .

**2** بمأن الجزء الصحيح للعدد $\log n$ هو 371 فإن $371\le log\,n<372$ ومنه $10^{371}\le 10^{\log n}<10^{372}$ ومنه $10^{371}\le n<10$.

**3** لدينا $10^{371}\le 2^{1234}<10^{372}$ ومنه عدد أرقام العدد $2^{1234}$ هو إذن 372 رقما.

## تطبيق 08 : [4] [5]

**1** نعلم أنّ $\log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$ ، إذن، $\log(10^n)=\frac{\ln 10^n}{\ln 10}=\frac{n\ln 10}{\ln 10}=n$ ومنه

$\log(1)=0$ و $\log(10)=1$ و $\log(100)=2$ و $\log(1000)=3$ و $\log(10000)=4$ .

**2** حساب $S$ : $S=log\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times.....\times\frac{88}{99}\times\frac{99}{1000}\right)=log\left(\frac{1}{1000}\right)=-log1000=-log10^3=-3$

**3** حل كل المعادلات و المتراجحات :

- $log6=logx+log(x-1)$ تكون المعادلة معرفة من أجل : $x>0$ و $x-1>0$

و منه $x>1$ و عليه فالمعادلة معرفة على $]1;+\infty[$ و المعادلة $(1)$ تكافئ : $logx(x-1)=log6$ و هي تكافئ : $x(x-1)=6$

إذن : $x^2-x-6=0$ ومنه : $\Delta=25$ ; $x_1=-2$ ; $x_2=3$ و عليه للمعادلة حل وحيد $s=\{3\}$

- $2(logx)^2+5logx-3=0$ المعادلة معرفة من أجل $x>0$ بوضع $logx=t$ نجد $2t^2+5t-3=0$ ومنه :

$\Delta=49$ ; $t_1=\frac{1}{2}$ ; $t_2=-3$ لما : $t=\frac{1}{2}$ : $logx=\frac{1}{2}$ ومنه : $\frac{\ln x}{\ln 10}=\frac{1}{2}$ وعليه : $\ln x=\frac{1}{2}\ln 10$

ومنه : $\ln x=\ln\sqrt{10}$ وعليه : $x=\sqrt{10}$

لما $\tau=-3$ : $\log x=-3$ وعليه : $\frac{\ln x}{\ln 10}=-3$ وعليه : $\ln x=\ln 10^{-3}$ و منه : $x=10^{-3}$

مجموعة حلول المعادلة هي : $s=\left\{\sqrt{10};10^{-3}\right\}$

つづ

- $\log x > 3$ المتراجحة تكون معرفة من أجل $x > 0$ وهي تكافئ : $\frac{\ln x}{\ln 10} > 3$ أي : $\ln x > \ln 10^3$ وعليه : $x > 10^3$

مجموعة الحلول : $s = ]10^3; +\infty[$

- $\log(x-6) > 2\log x$ تكون المتراجحة معرفة من أجل $x > 0$ و $x - 6 > 0$ وعليه : $x > 6$ ومنه فهي معرفة على $]6; +\infty[$ .

و المتراجحة تكافئ : $\log(x-6) > \log x^2$ وهي تكافئ : $x - 6 > x^2$ إذن : $-x^2 + x - 6 < 0$ وعليه ليس للمتراجحة حلول .

**تطبيق 09 :** [5]

- حساب درجة زلزال لوس انجلس : $M = \log(I/I_0) = \log \frac{50.01 \times 10^6 I_0}{I_0} = \log\left(50.01 \times 10^6\right) \approx 7.7$

**تطبيق 10 :** [7]

- عوّض $pH = 4.5$ : $4.5 = \log \frac{1}{[H^+]}$

قاعدة القسمة : $4.5 = \log 1 - \log [H^+]$

أوجد قيمة $[H^+]$ : $-4.5 = \log [H^+]$

اكتب بالصيغة الأسيّة : $10^{-4.5} = H^+$

إذن، التركيز المولي لأيونات الهيدروجين في الأمطار الحمضية هي $10^{-4.5}$ mol/L

# حل المراجعة السريعة

## 8 تحقق من فهمك الجيد للدرس :

### أجب ب "صح" أو " خطأ":

[6] [4]

1. $e^{5\ln(2)} \times e^{7\ln(4)} = 2^{19}$ ☑
2. الدالة: $x \mapsto (\ln x)^2$ معرفة على $\mathbb{R}^*_+$ ☑
3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $\alpha$ فإن $\ln 2^{\alpha} = \ln \alpha^2$ ☒
4. من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $x$ : $\ln|x| > 0$ ☒
5. إذا كان $|x| < 1$ فإن : $\ln|x| < 0$ ☑
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$ ☑
7. $Lim\limits_{x \to -\infty} [\ln(-x)] = +\infty$ ☑
8. $\ln(-2)^{1830} = 1830\ln 2$ ☑
9. $\dfrac{\ln 12}{\ln 3} = \ln\dfrac{12}{3} = \ln 4$ ☒
10. للمعادلة $x\ln(x) = 3\ln(x)$ في المجال $]0 ; +\infty[$ حلان مختلفان هما : 1 وَ 3 . ☑
11. من أجل كل عددان حقيقيان موجبان تماما : $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$ ☒
12. من أجل كل عددان حقيقيان موجبان تماما : $\ln(a) \times \ln(b) = \ln(a \times b)$ ☒
13. $(\ln(a))^n = n\ln(a) : n \in \mathbb{N}, a > 0$ ☒
14. $x$ وَ $y$ عددان حقيقيان غير معدومين : إذا كان $\ln(x^2) = \ln(y^2)$ فإن $x = y$ ☒

### وضّح إشارة كل عدد حقيقي مما يلي:

| | | |
|---|---|---|
| ⊞ $\ln(3)$ | ⊟ $\ln(0{,}5)$ | ⊞ $\ln(1{,}01)$ |
| ⊟ $\ln(0{,}95)$ | ⊟ $\ln(e^{-1})$ | ⊞ $\ln(\sqrt{2})$ |

### أتمم مايلي: [6]

a. $\ln(e^{-5}) = -5$

b. $e^{\ln(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$

c. $\ln(e^{-1}) = -1$

d. $\ln(e^{\frac{1}{e}}) = \frac{1}{e}$

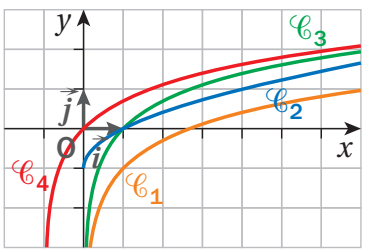
e. $e^{\ln(\sqrt{2})} = \sqrt{2}$

f. $\ln(e^{\frac{3}{7}}) = \frac{3}{7}$

### أكمل بعلامة = أو ≠ مايلي:

| | | |
|---|---|---|
| $\ln(6) + \ln(11)$ | ≠ | $\ln(17)$ |
| $\ln(8) - \ln(4)$ | = | $\ln(2)$ |
| $\ln(7) \times \ln(9)$ | ≠ | $\ln(63)$ |
| $\ln[(\sqrt{2}-1)^{142}] + \ln[(\sqrt{2}+1)^{142}]$ | = | $0$ |

### اختر الاجابة الصحيحة:




من بين المنحنيات المقابلة ، أي منها يمثل الدالة اللوغاريتمية النيبيرية؟

☐ $\mathscr{C}_4$ ☑ $\mathscr{C}_3$ ☐ $\mathscr{C}_2$ ☐ $\mathscr{C}_1$

### أجزاء مفقودة:

وجد معاذ تمريناً في الرياضيات مع حلّه ، لكنه يتضمن أجزاء غير مقروءة بسبب ملامسته للحبر. ساعد معاذ على إيجاد الأجزاء التي خالطت بقع الحبر.

**النص**

أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، لدينا:

$\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

**الحـــل**

من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، لدينا:

$$\begin{aligned} x + \ln(1 + e^{-x}) &= \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \ln\left(e^x (1 + e^{-x})\right) \\ &= \ln(e^x + e^{x-x}) \\ &= \ln(e^x + 1) \end{aligned}$$

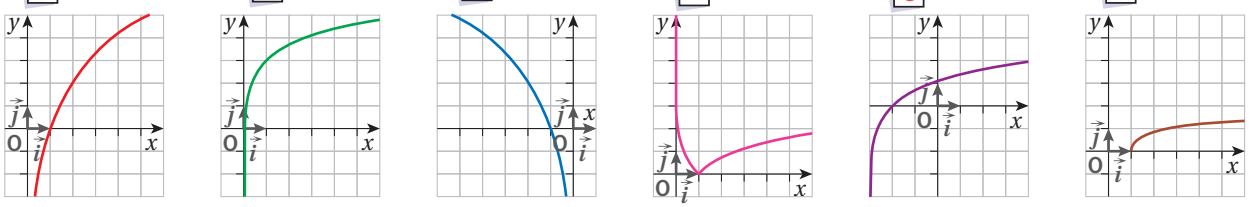
# حل المراجعة السريعة

## في أقل من دقيقة ! [6]

أرفق كل عبارة دالة بالتمثيل البياني الموافق لها:

**1.** $f(x) = \ln(x) + 3$ **2.** $g(x) = |\ln(x)|$ **3.** $h(x) = 3\ln(-x)$ **4.** $k(x) = \sqrt{\ln(x)}$ **5.** $l(x) = \ln(x^3)$ **6.** $m(x) = \ln(x + 3)$

a. 5 b. 1 c. 3 d. 2 e. 6 f. 4



## أسئلة الإختيار من متعدد: لكل سؤال من الأسئلة التالية ، ضع إطار حول الإجابة ( أو الأجوبة ) الصحيحة.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 01 $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ldots$ | $-\ln(6)$ | $\ln(6)$ | $\ln\left(\frac{1}{6}\right)$ | $\ln\left(\frac{5}{6}\right)$ |
| 02 $\ln(10e^2) = \ldots$ | $2\ln(10) + 2$ | 4,302 585 093 | $2\ln(10e)$ | $\ln(10) + 2$ |
| 03 $e^{\ln(a) + \ln(b)} = \ldots$ | $ab$ | $a + b$ | $\frac{a}{b}$ | $a + \ln(b)$ |
| 04 $\ln(5a) - \ln(a) = \ldots$ | $\ln(4a)$ | $\ln(5)$ | $4\ln(a)$ | $\ln(5a - a)$ |
| 05 $\ln(e + e^2) = \ldots$ | $\ln(e) + \ln(e^2)$ | $\ln(e + 1) + 1$ | $\ln(e^3)$ | $\ln(3e)$ |
| 06 $\ln(64) = \ldots$ | $2\ln(8)$ | $\ln(2) \times \ln(32)$ | $6\ln(2)$ | $\ln(4) + \ln(16)$ |
| 07 الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{-x}$ | | | | |
| 1. صورة $\ln(2)$ بـ $f$ هي: | $-2\ln(2)$ | $\ln(2)$ | $\frac{1}{2}\ln(2)$ | $2\ln(2)$ |
| 2. صورة $\ln(e^3)$ بـ $f$ هي: | $3e^{-3}$ | $\frac{3\ln(e)}{e^3}$ | $-3e^{\ln(3)}$ | $\frac{3}{e^3}$ |
| 08 $g(x) = \ln(\ln(x))$ . $D_g = ]1 ; +\infty[$ $g'(x) = \ldots$ | $\frac{1}{\ln(x)}$ | $\frac{1}{x} \times \frac{1}{x}$ | $\frac{1}{x\ln(x)}$ | $\frac{1}{x}\ln(x)$ |

# مسائل المستوى الأول ★

## 1 BAC تسيير واقتصاد 2010 الموضوع الأول (04 نقاط) ★ الانتقال الـــى الحـــل

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=(\ln(x))^2+2\ln(x)-3$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس . ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النبيري)

1 أ- حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f(x)=0$ ثم فسّر النتيجة هندسيا .

ب- حلل $f(x)$ إلى جداء عاملين .

جـ- حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة : $2\ln(x)+2\geq 0$ .

2 أحسب $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ .

3 بيّن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

**أجوبة**



**01** ماهي المسافة القصوى التي يمكنك السفر بها مع دراجة بثلاثة إطارات جديدة. علماً أنّ كل إطار يجب استبداله بعد 6000 km ؟

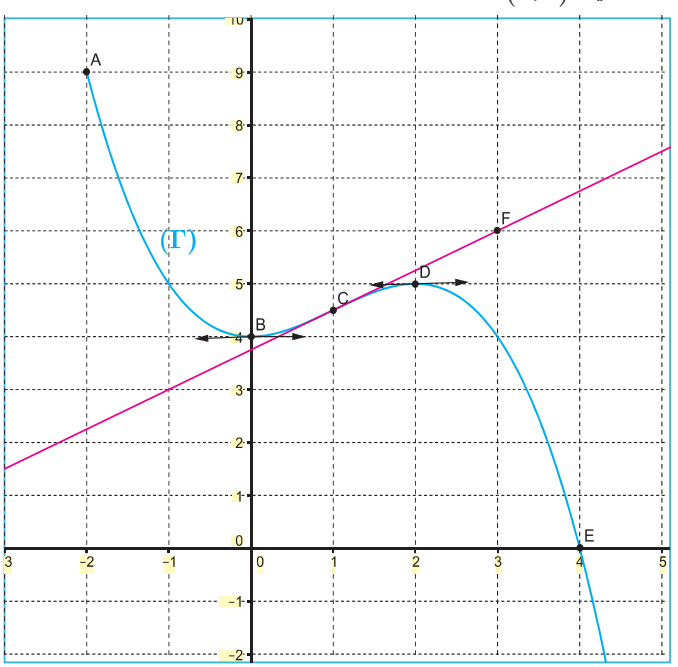
## 2 الممتاز في الرياضيات ( ساعد أحمد ) ★ الانتقال الـــى الحـــل

$f$ الدالة المعرفة على المجال $[-2,5]$ و $(\Gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ والذي يشمل النقط

$A(-2,9)$ ، $B(0,4)$ ، $C\left(1,\frac{9}{2}\right)$ ، $D(2,5)$ ، $E(4,0)$ .

في النقطتين $B$ و $D$ المماس للمنحنى $(\Gamma)$ يوازي محور الفواصل.

المستقيم $(CF)$ هو المماس للمنحنى $(\Gamma)$ عند النقطة $C$ حيث $F(3,6)$




1 بقراءة بيانية :

أ) أدرس اتجاه تغيرات الدالة $f$ حسب قيم $x$ على المجال $[-2,5]$.

ب) أحسب $f(0)$ ، $f'(1)$ ، $f'(2)$.

ت) أدرس حسب قيم $x$ من المجال $[-2,5]$ ، إشارة $f'(x)$.

ث) أدرس حسب قيم $x$ من المجال $[-2,5]$ ، إشارة $f(x)$.

2 أوجد مجموعة تعريف الدالة $g$ حيث الدالة $g$ المعرفة بـ $g(x)=\ln(f(x))$.

3 أحسب $g(-2)$ ، $g(0)$ ، $g(2)$

4 عين $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} g(x)$

5 أحسب $g'(x)$ وانجز جدول تغيرات الدالة $g$ على المجال $]-2,4[$.

## 3 الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات ★

الانتقال إلى الحل

$f$ دالة عددية لمتغير حقيقي $x$ معرفة كما يلي : $f(x)=-x^2+x+2\ln(x+1)$

$(c)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 – أدرس تغيرات الدالة $f$ .

2 – هل توجد مماسات للمنحنى $(c)$ معامل توجيهها 3 حيث يطلب كتابة معادلاتها في حالة وجودها .

3 – بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_0$ حيث $2<x_0<\frac{5}{2}$

4 – أنشئ المماسات ذات معامل التوجيه 3 ثم أنشئ $(c)$ .

5 – نعتبر الدالة $g$ المعرفة بالعبارة: $g(x)=-x^2+|x|+2\ln(|x|+1)$

أ – أثبت أن $g$ دالة زوجية .

ب– أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

ج– أنشئ التمثيل البياني $(\gamma)$ للدالة $g$ انطلاقا من $(c)$.

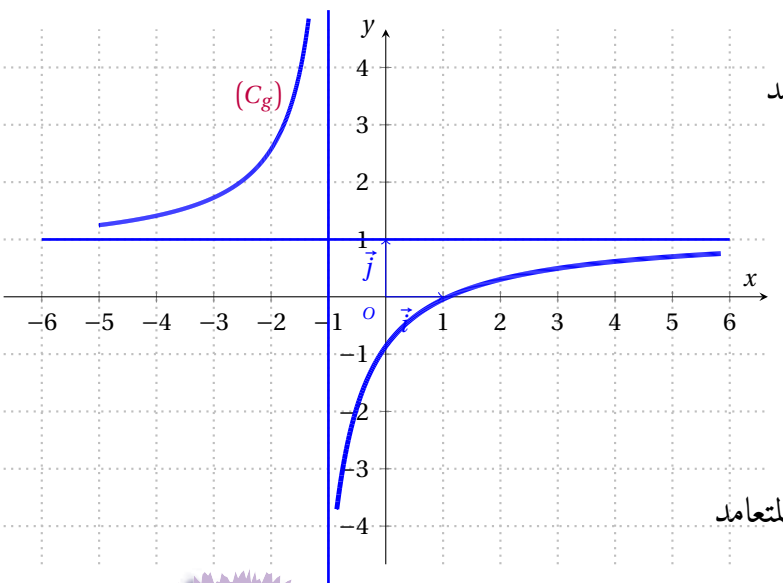
**أحجية**

02 أحد قطعي الذهبية التسع مزيفة.
هي اكثر وزناً من الأخريات.
● كيف يمكن العثور عليها باستعمال ميزان ذو كفتين مرتين فقط.

## 4 BAC علوم تجريبية 2011 الموضوع الأول (07 نقاط) ★

الانتقال إلى الحل

I - نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$
و$(C_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل) بقراءة بيانية :




أ) شكّل جدول تغيرات الدالة $g$.

ب) حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

ج) عيّن بيانيا قيم $x$ التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

II - لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ :
$f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
و$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

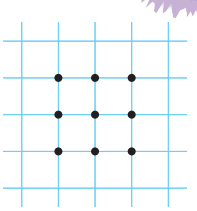
1 أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$ و$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2 أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ : $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$.

ب) أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

**أحجية**

03 كيف نربط بين النقاط التسع برسم أربعة أضلاع و بدون رفع القلم؟



## 5 سلسلة تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية (مصطفاي عبد العزيز) ★

الانتقال الـــى الحـــل

**I -** لتكن الدالة العددية $g$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=-2x^2+2-\ln x$

**1** أُدرس تغيّرات الدالة $g$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

**2** احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ .

**II -** $f$ دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{-1+\ln x}{x}-2x+2e$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1** أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ .

ب - بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-2x+2e$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$ .

جـ - حدّد وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

**2** أ - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

**3** أ - أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_0$ في المجال $]0,4;0,5[$ .

ب - أنشئ $(\Delta)$ و $(C_f)$.

**أحجية**

**04** منبه وينعكس في مرآة .نقرأ الساعة 03:00 عليه ، بينما تشير صورته إلى الساعة 09:00.

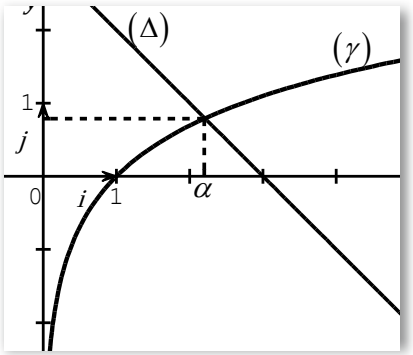
- جد توقيتاً على المنبه بحيث يكون فرق القراءة بين الإثنين هو 3 ساعات.



أولمبياد الرياضيات مقاطعة باريس

# مسائل المستوى الثاني ★★

## 1 BAC علوم تجريبية 2015 الموضوع الأول (06.5 نقطة) ★★ الانتقال الى الحل




المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

**I)** $(\gamma)$ التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ؛ $\alpha$ هي فاصلة نقطة تقاطع $(\gamma)$ و $(\Delta)$ .

1 بقراءة بيانية حدّد وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ على $]0;+\infty[$ .

2 $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$ .
استنتج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$ .

3 تحقّق أن: $2,2<\alpha<2,3$ .

**II)** $f$ الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني.

1 احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2 أثبت أنّه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة $f$ .

3 بيّن أنّ: $f(\alpha)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ؛ ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ .

4 ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ؛ ثمّ أنشئ $(C_f)$ على المجال $]0\,;\,e^2]$ .

**III)** $F$ الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقّق: $F(1)=-3$ .

1 بيّن أنّ منحنى الدالة $F$ يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يُطلب تعيين فاصلتيهما.

2 بيّن أنّ $x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ؛ ثمّ استنتج عبارة الدالة $F$ .

## 2 BAC علوم تجريبية 2012 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★ الانتقال الى الحل

لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أ/ احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2 أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-\infty;0[$ : $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة $f$، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 أ/ بين ان المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلة له: $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

4 بين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث: $-3.5<\alpha<-3.4$ وَ $-1.1<\beta<-1$

5 أنشئ الـ

つづく

6 أ/ نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ وَ $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

بين أنّ $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم $(AB)$.

ب/ بين أنّ المستقيم $(AB)$ يمس المنحنى $(C_f)$ في نقطة $M_0$ يطلب تعيين إحداثيتيها.

7 لتكن $g$ الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي: $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$

- بين أنّ $g$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]-\infty;0[$ .

## 3 BAC علوم تجريبية 2017 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★ الانتقال الـــى الحـــل

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $D$ حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـــ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ،

$(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 بيّن أنّ الدالة $f$ فردية ثم فسّر ذلك بيانيا.

2 احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to 1^{>}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -1^{<}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

استنتج أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب.

أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $D$ ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$ .

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

أحجية

05 يتدرّب ثلاثة عدائين A,B وَ C للماراثون . في نفس الوقت

B يتواجد بيد A وَ C ، A يتواجد بيد B وَ C ، وَ C يتواجد بيد A وَ B.

● كيف يمكن أن يحدث هذا ؟

4 بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1,8<\alpha<1,9$ .

5 بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ ثم أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

6 أنشئ المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$.

7 $m$ وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة: $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ .

## 4 BAC علوم تجريبية 2018 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★ الانتقال الـــى الحـــل

I) $g$ الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$ و $(C_g)$ المنحنى البياني الممثل لها

كما هو مبيّن في الشكل المقابل:

- احسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$ .

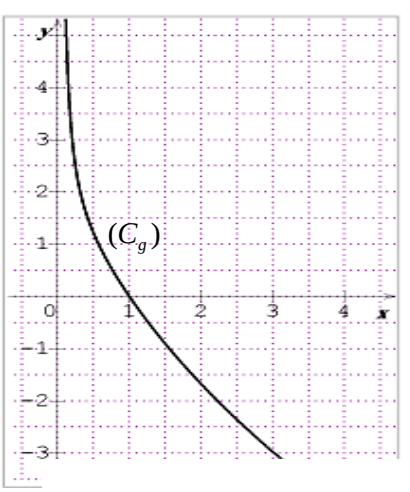
II) $f$ الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $]0;+\infty[$

بـ: $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;i,j)$.

1 احسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ و بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ثم فسر ا




つづく

2 أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$ .

**ب)** استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها.

3 بيّن أنّ $y=\left(\dfrac{e^2}{e-1}\right)x-\dfrac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ $(T)$ مماس المنحنى $(C_f)$ في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل، ثم ارسم المماس $(T)$ و المنحنى $(C_f)$.

4 عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلّين متمايزين.

**III)** $n$ عدد طبيعي حيث $n>1$ ، $I_n$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى $(C_f)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1 بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n>1$ : $I_n=\ln(1+n\ln n)$ .

2 ادرس اتجاه تغير المتتالية $(I_n)$.

## 5 BAC علوم تجريبية 2009 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★

الانتقال الـــى الحـــل

**I)** $h$ دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$

1 احسب $\lim\limits_{x\to-1}h(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$

2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-1;+\infty[$ : $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

واستنتج اتجاه تغير الدالة $h$، ثم أنجز جدول تغيراتها.

3 احسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم $x$.

**II)** لتكن $f$ دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

نسمي $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أ/ احسب $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب/ باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أنّ $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$

ج/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

د/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ .

ه/ ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

2 بين أنه من أجل كل $]-1;+\infty[$ : $x\in$ $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

3 بين أن المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3.3 و 3.4

4 ارسم $(C_f)$

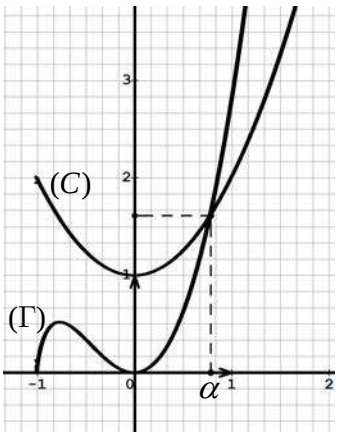
5 احسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها:

$y=x-1$ ; $x=0$ و $x=1$

# مسائل المستوى الثالث ★★★

## 1 BAC رياضيات 2021 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★★

الانتقال الـى الحـل




**I)** المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

في الشّكل المقابل $(C)$ و $(\Gamma)$ هما على التّرتيب التّمثيلان البيانيان للدّالتين العدديتين المعرّفتين على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$x \mapsto 1+x^2$ و $x \mapsto 2x(1+x)\ln(1+x)$

$(C)$ و $(\Gamma)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ تُحقّق: $0,78<\alpha<0,79$

الدّالة العددية $g$ معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)$$

1 بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ وضعية $(C)$ بالنسبة إلى $(\Gamma)$

2 استنتج حسب قيم $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ إشارة $g(x)$

**II)** الدّالة العددية $f$ معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة: $2cm$)

1 أ. احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ و بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ب. فسّر النّهايتين هندسيا.

2 أ. بيّن أنّه من أجل كلّ $x$ من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)(1+x^2)^2}$

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جـ. بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ ثمّ استنتج حصرا لِـ $f(\alpha)$

د. اكتب معادلة لِـ $(T)$ مماس المنحنى $(C_f)$ عند المبدأ $O$

3 ارسُم $(T)$ و $(C_f)$ (نأخذ: $f(\alpha)\approx 0,36$)

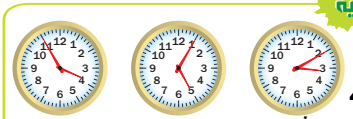
4 الدّالة العددية $h$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\dfrac{\ln(1+|x|)}{1+x^2}$ و $(C_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بيّن أنّ الدّالة $h$ زوجية.

ب. بيّن أنّ الدّالة $h$ غير قابلة للاشتقاق عند الصفر ثمّ فسّر ذلك بيانيا.

جـ. اشرح كيفية رسم $(C_h)$ انطلاقا من $(C_f)$ ثمّ ارسمه.

**أحجية**



**06 إحدى هذه الساعات تتقدم في التوقيت بـ 45min والأخرى تتأخر بـ 1h و 10min، والأخيرة معطلة.**

**كم التوقيت الصحيح؟**

## 2 BAC تقني رياضي 2013 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★★

الانتقال الـى الحـل

**I)** الدّالة $g$ معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$.

1 ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2 بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $0,31<\alpha<0,32$ وأنّ: $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

3 استنتج، حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$.

**II)** الدّالة $f$ معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2$.

يتبع

1 احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ .

2 أثبت أنّه، من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$ .

3 ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

4 بيّن أنّ: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ .

5 مثّل المنحنى $(C_f)$ على المجال $]-1;2]$ .

III $(\Gamma)$ المنحنى الممثل للدّالة $h$ المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$ .

$A$ النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و $M$ نقطة من $(\Gamma)$ فاصلتها $x$ .

1 أثبت أنّ المسافة $AM$ تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$ .

2 الدّالة $k$ معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $k(x)=\sqrt{f(x)}$ .

أ - بيّن أنّ للدالتين $k$ و $f$ نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$ .

ب - عيّن إحداثيتي النقطة $B$ من $(\Gamma)$، بحيث تكون المسافة $AM$ أصغر ما يمكن.

جـ - بيّن أنّ: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$ .

## 3 BAC رياضيات 2013 الموضوع الأول (06 نقاط) ★★★

الانتقال الـــى الحـــل

I 1 الدالة $u$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $u(x)=e^x-3x+4-e$

ا) ادرس اتجاه تغير الدالة $u$.

ب) بين انه، من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x-e>3x-4$

2 الدالة $v$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$

ا) بين ان : $v'(1)=0$ . ( يرمز $v'$ الى الدالة المشتقة للدالة $v$ )

ب) اثبت انه، من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $v(x)\leq 0$

ج) استنتج، انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{-1+\ln x}{x^2}\leq 3x-4$

3 اثبت انه، من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $e^x-e+\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$

II الدالة $f$ معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=e^x-ex+\dfrac{\ln x}{x}$.

$(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 احسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2 بين ان الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 احسب $f(1)$ ، ثم مثل المنحنى $(C_f)$ على المجال $\left]0;\dfrac{5}{2}\right]$.

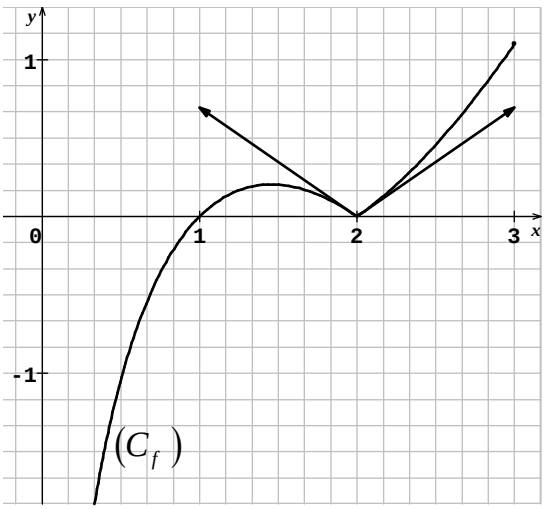
( ناخذ : $f(2)\approx 2.3$ ، $f(1.64)\approx 1$ و $f\left(\dfrac{5}{2}\right)\approx 5.75$ ).

4 احسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ وحامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=\dfrac{1}{2}$ و $x=2$

## 4 BAC تقني رياضي 2014 الموضوع الثاني (06 نقاط) ★★★

الانتقال الـــى الحـــل

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$




**I)** $g$ الدالة المعرفة على المجال $]0;3]$ بـ: $g(x)=x\ln x+x$

1 أدرس تغيرات الدالة $g$

2 أ) بيّن أن المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $]0;3]$

ثم تحقق أن $1,45<\alpha<1,46$

ب) استنتج إشارة $g(x)-2$

**II)** التمثيل البياني المقابل $(C_f)$ هو للدالة $f$ المعرفة على المجال $]0;3]$ بـ: $f(x)=|x-2|\ln x$

1 باستعمال $(C_f)$ ضع تخمينا حول قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند 2

2 أثبت صحة تخمينك.

3 أدرس تغيرات الدالة $f$

**III)** $h$ الدالة المعرفة على $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ كما يلي: $h(x)=(2-\cos x)\ln(\cos x)$

1 بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى $(C_h)$؛ حيث $(C_h)$ هو التمثيل البياني للدالة $h$

2 أدرس اتجاه تغير الدالة $h$، ثم شكل جدول تغيراتها وارسم $(\Delta)$ و $(C_h)$

## 5 BAC شعبة علوم الطبيعة والحياة 2004 (النظام القديم) ★★★

الانتقال الـــى الحـــل

لتكن $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=1-\frac{\ln x^2}{x}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيّرات الدالة $f$ .

2. أثبت أنّ المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم $(\Delta): y=1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.

3. احسب $f(x)+f(-x)$ ، ماذا تستنتج ؟

4. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha\in]-0,71;-0,70[$

5. أثبت أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى $(C_f)$ في نقطتين يطلب حساب إحداثيات كل منهما، اكتب معادلة المماس $(T)$.

6. أُرسم المماس $(T)$ والمنحنى $(C_f)$.

7. ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx+1$

8. $h$ الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي $x$ حيث: $h(x)=1+\frac{\ln x^2}{|x|}$.

**أ)** بيّن أنّ $h$ دالة زوجية.

**ب)** دون دراسة

أحجية

07 تعيش زهور "زنبق الماء" في المسطحات المائية ، يحتاج "زنبق الماء" الذي تتضاعف مساحته يومياً 30 يوماً لتغطية



# مسائل المستوى الرابع ★★★★

## 1 BAC رياضيات 2020 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★★★

الانتقال الـــى الحـــل

الدالة العددية $f$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)$.

ليكن $(C_f)$ المنحنى البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$.

جـ. استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2 نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=f(x)-x$.

أ. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[0;+\infty[$ : $g'(x)=\dfrac{-9x^2+8}{\left(\sqrt{9x^2+1}\right)\left(3+\sqrt{9x^2+1}\right)}$

جـ. ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ على المجال $[0;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها. $\left(g\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\approx 0{,}8\right)$ نأخذ

3 أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left[\dfrac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$ ثمّ تحقّق أنّ: $2.83<\alpha<2.84$.

ب. استنتج إشارة $g(x)$ على $[0;+\infty[$.

جـ. حدّد الوضع النسبي للمستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=x$ و المنحنى $(C_f)$ على المجال $[0;+\infty[$.

4 نعتبر الدالة $k$ المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ: $k(x)=\ln(6x)$ و ليكن $(\gamma)$ منحنيها البياني في المعلم السابق.

أ. بيّن أنّ $(\gamma)$ هو صورة منحنى الدالة: $x\mapsto \ln x$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه.

ب. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-k(x)\right]$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

5 أ. بيّن الدالة $f$ فردية.

ب. انشئ كلا من $(\Delta)$ ، $(\gamma)$ و $(C_f)$ على المجال $[0;+\infty[$ ثمّ استنتج انشاء المنحنى $(C_f)$ على $\mathbb{R}$.

**أجوبة**

**08** كيف يمكنك صنع 4 مثلثات متقايسة الأضلاع باستعمال 6 أعواد ثقاب فقط ؟



## 2 بكالوريا 1996 كاليدونيا الجديدة (فرنسا) ★★★★

الانتقال الـــى الحـــل

### الجزء الأول :

نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}$

1 حدّد نهاية $g$ عند $-\infty$ ثم عند $+\infty$ .

2 اوجد $g'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير $g$ ، شكل جدول تغيرات $g(x)$ .

3 احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ الحقيقية .

### الجزء الثاني:

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x)=\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|$

و نسمي $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

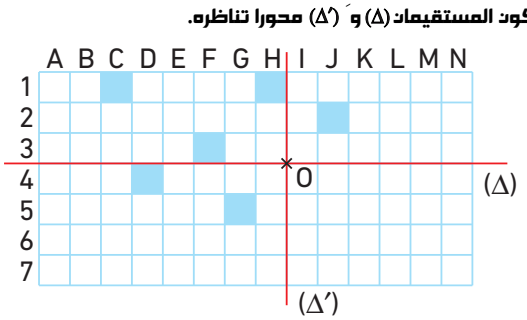
1 حدد نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ و عند $0$ .

2 احسب (

**أجوبة**

**09** أكمل الشكل بتلوين الحد الأدنى من المربعات بحيث:

- تكون النقطة O مركز تناظر الشكل النهائي ،
- يكون المستقيمان $(\Delta)$ و $(\Delta')$ محورا تناظره.




C6, D3, F4, G2, H6, I1, I6, J5, K3, K4, M3, M4, N1, N6 :يمكن تلوين المربعات

つづく

3 استنتج اتجاه تغير $f$ ثم شكل جدول تغيراتها .

4 اوجد فاصلة نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ بيان $f$ مع محور الفواصل .

5 أ)- بين أنه من أجل كل $x \in ]0;+\infty[$ لدينا $f(x)-x=\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)$ .

ب)- استنتج أن المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحني $(\mathscr{C})$ بجوار $(+\infty)$.

جـ)- ثم ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمقارب $(D)$ في المجال $]0;+\infty[$ .

6 أ)- بين أنه من أجل كل $x \in ]-\infty;0[$ لدينا $f(x)-\frac{x}{2}=\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$ .

ب)- استنتج ان المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=\frac{x}{2}$ مقارب للمنحني $(\mathscr{C})$ بجوار $(-\infty)$ .

جـ)- ثم ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمقارب $(\Delta)$ في المجال $]-\infty;0[$ .

7 ارسم $(\mathscr{C})$ ، $(D)$ و $(\Delta)$ في المعلم السابق .

8 $m$ عدد حقيقي نعتبر المعادلة (1) ذات المجهول الحقيقي $x$ حيث $\ln\left|e^{x\left(\frac{1}{2}-m\right)}-e^{x(1-m)}\right|=0$

أ)- بين انه (1) تكافئ $f(x)=mx$ .

ب)- استنتج بيانيا عدد واشارة حلول المعادلة (1) .

**أجوبة**

**10** ما قيس الزاوية التي يصنعها عقربا ساعة تشير إلى 12 h 05 ؟



## 3 كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق) ★★★★ الانتقال الـــى الحـــل

### الجزء الأول :

نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $]1;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=2-x-\ln(x-1)^2$ .

و ليكن $(C_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1 عيّن نهايتي الدالة $g$ عند 1 وَ عند $+\infty$ .

2 أدرس إتجاه تغيّر الدالة $g$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

3 أحسب $g(2)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]1;+\infty[$ .

4 بيّن أنّ المعادلة $|g(x)|=1$ على المجال $]1;+\infty[$ تقبل حلان $\alpha$ وَ $\beta$ ، حيث : $1,70<\alpha<1,71$ وَ $2,37<\beta<2,38$ .

5 أ) أكتب معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحني $(C_g)$ عند النقطة ذات الترتيبة 1 ، ثم جد حصراً للعدد $\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}$ .

ب) أنشئ كلاً من $(\Delta)$ و المنحني $(C_g)$ .

ج) $m$ عدد حقيقي ، ناقش بيانيا و حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة : $2-2\ln(x-1)=\frac{-2}{\alpha-1}x+m$ .

**أجوبة**

**11** قسم ، به 9 أولاد و 13 فتاة. نصف التلاميذ يعانون من نزلات البرد.

● ماهو الحد الأدنى لعدد الفتيات المصابات بنزلات البرد؟

a. 0 b. 1 c. 2 d. 3 e. 4

### الجزء الثاني:

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=[x-1+2\ln(x-1)][x-3+2\ln(x-1)]$ .

نسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1 بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]1;+\infty[$ يكون : $f(x)=[g(x)]^2-1$ .

2 عيّن نهايتي الدالة $f$ عند 1 وَ عند $+\infty$ .

3 أ) أحسب $f'(x)$ و هذا من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]1;+\infty[$ .

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

4 أ) جد إحد

つづく

ب) أنشئ المنحنى $(C_f)$ في المعلم السابق .

5 لتكن $h$ هي الدالة المعرّفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ بـ : $h(x)=(\cos x+2\ln(\cos x))(-2+\cos x+2\ln(\cos x))$

أ) بيّن أنّ : $h=f\circ u$ ، حيث $u$ دالة يطلب تعيين عبارتها .

ب) عيّن نهاية الدالة $h$ عند $\frac{\pi}{2}$ ، وَ فسّر النتيجة هندسياً ، ثمّ استنتج إتجاه تغيّر الدالة $h$ .

ج) شكّل جدول تغيرات الدالة $h$ ، ثمّ أنشئ $(\Gamma)$ منحنى الدالة $h$ .

## 4 استعد للبكالوريا مع توامي (توامي عمر) ★★★★ الحل الانتقال

I) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=xe^x-1$

1 أدرس تغيرات الدالة $g$ .

2 أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث $0,567<\alpha<0,568$ .

3 استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

II) لتكن $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بالعبارة : $f(x)=\left(e^x-\ln|x|\right)^2$

وَ ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2\|\vec{j}\|$ .

1 أثبت أنه من أجل كل $x>0$ فإن : $f(x)=x^2\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)^2$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2 أ- بين أن المعادلة $e^x-\ln(-x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\beta$ حيث $\beta\in]-1,4\ ;-1,3[$ .

ب- استنتج على $\mathbb{R}-\{0\}$ حلول المتراجحات : $e^x>\ln(x)$ ، $e^x<\ln(-x)$ وَ $e^x\geq\ln(-x)$ .

3 أ- بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{0\}$ فإن : $f'(x)=\frac{2}{x}\left(e^x-\ln|x|\right)g(x)$ .

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ .

4 بين أن : $f(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)^2$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$ سعته $10^{-2}$ .

5 شكل جدول تغيرات الدالة $f$ ، ثم أرسم $(C_f)$ على المجال $[-7;0[\cup]0;2]$ .

6 ناقش حسب قيم الوسيط $m$ $(m\in\mathbb{R}^+)$ ، عدد وَ إشارة حلول المعادلة : $e^x-\ln|x|-\sqrt{m}=0$ .

## 5 BAC تقني رياضي 2013 الموضوع الثاني (07.5 نقطة) ★★★★ الحل الانتقال

I) الدّالة $g$ معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^x$ .

1 ادرس تغيّرات الدالة $g$ .

2 بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $(x-1)e^x+1\geq 0$ .

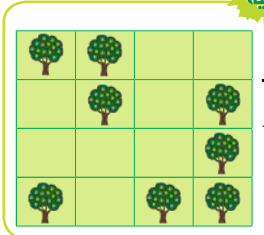
II) الدّالة $f$ معرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{e^x-1}{x};x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$ .

1 أ - بيّن أنّ $f$ مستمرة على $[0;+\infty[$ .

ب - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

أحجية

12 قسّم هذا البستان إلى أربع قطع من نفس المساحة ونفس الشكل بحيث يحتوي كل منها على نفس عدد أشجار البرتقال .



つづく

2 أ ـ تحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}$.

ب ـ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

III $n$ عدد طبيعي حيث $n\geq 1$ ؛ $f_n$ الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x$.

و $(C_n)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f_n$ على $]0;+\infty[$.

2 احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

3 ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(C_n)$ و $(C_{n+1})$.

4 بيّن أنّ جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة $B$ يطلب تعيين إحداثيتيها .

5 أ ـ بيّن انّه، يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_1$ من $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$.

ب ـ بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 1$ فإنّ: $f_n(\alpha_1)<0$، ثمّ برهن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n$ من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.

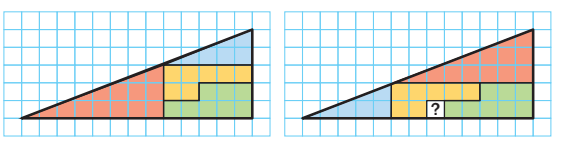
6 أ ـ بالاعتماد على الجزء **II** ـ ؛ بيّن أنّه، من أجل كل $x$ من $]0;1]$ : $\dfrac{e^x-1}{x}\leq e-1$.

ب ـ استنتج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 1$ : $\ln(\alpha_n)\geq\dfrac{1-e}{n}$، ثمّ $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

جـ ـ جد نهاية المتتالية $(\alpha_n)$.

## أحجية

**13** من أيد أتى المربع الأبيض؟




**حل الأحجية**

شاهد الحل عبر الرابط التالي:

2mn

# مسائل المستوى الخامس ★★★★★

## 1 أشبال الأمة 2016 (شعبة العلوم الدقيقة 2005) ★★★★★

الانتقال ← الحل

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $\alpha$ ، نعتبر الدالة $f_\alpha$ المعرفة على المجال $\left]-\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ بـ: $f_\alpha(x)=\ln(\alpha x+1)-\alpha x$.

$(\mathcal{C}_\alpha)$ المنحنى الممثل للدالة $f_\alpha$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**الجزء الأول :**

1 ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f_\alpha$.

2 استنتج أنه من أجل كل عدد $x$ موجب تماما يكون: $\ln(\alpha x+1)<\alpha x$.

3 بيّن أنّ كل المنحنيات $(\mathcal{C}_\alpha)$ تتقاطع في نقطة يُطلب تحديد إحداثييها.

**الجزء الثاني:**

1 باستعمال السؤال **2.** من الجزء الأول، بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $\beta$ يكون: $\ln(1+\beta)-\ln\beta<\frac{1}{\beta}$.

2 استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

3 استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.

4 أ- عيّن إحداثيي النقطة $\omega$ التي يكون عندها معامل توجيه المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_1)$ يساوي 1.

ب- اكتب معادلة للمماس $(\Delta)$ للمنحنى $(\mathcal{C}_1)$ عند النقطة $\omega$.

5 أ- احسب كلا من $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة $f_1$.

ب- أرسم $(\Delta)$ ثمّ المنحنى $(\mathcal{C}_1)$.

**الجزء الثالث :**

لتكن $g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\ln(1+|x|)-|x|$. $(\mathcal{C}_g)$ منحنها الممثل في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 ادرس قابلية اشتقاق الدالة $g$ عند الصفر.

2 بيّن كيف يمكن إنشاء $(\mathcal{C}_g)$ اعتمادا على $(\mathcal{C}_1)$ ؛ ثمّ أرسم $(\mathcal{C}_g)$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

## 2 كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق) ★★★★★

الانتقال ← الحل

ليكن $m$ وسيط حقيقي ، نعتبر الدالة $f_m$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f_m(x)=\frac{x^2-1}{2}-m\ln x$ .

وليكن $(C_m)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1 أحسب نهاية الدالة $f_m$ عند $+\infty$ .

2 حسب قيم $m$ ، أحسب نهاية الدالة $f_m$ عند $0$ .

3 أ) أحسب $f_m'(x)$ ، حيث : $f_m'$ هي الدالة المشتقة للدالة $f_m$ .

ب) ثم استنتج حسب قيم $m$ جداول تغيرات الدالة $f_m$ المكنة .

つづく

4 لتكن $M_0(x_0;y_0)$ نقطة من المستوي ، حيث : $x_0>0$ .

- بين أنه يوجد منحني وحيد $(C_m)$ يشمل النقطة $M_0$ .

5 أثبت أن جميع المنحنيات $(C_m)$ تشمل نقطة ثابتة $A$ يطلب تعيين إحداثياها .

6 أنشئ كلا من : $(C_0)$ و $(C_4)$ ، $(C_{-1})$ في نفس المعلم .

## 3 مجلة Top Maths في الدوال الوسيطية والمدمجة ★★★★★ الانتقال الـــى الحـــل ☹ 😐 🙂

نعتبر الدالة $f_k$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f_k(x)=x(\ln x)^2+kx$ حيث : $(k\in\mathbb{R})$ و ليكن $(C_k)$ هو المنحني الممثل للدالة $f_k$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

**I)** نفرض فيما يلي : $k=0$ و لنعتبر $(C_0)$ المنحني الممثل للدالة $f_0$ .

1 أحسب نهاية الدالة $f_0$ عند 0 و عند $+\infty$ ( يمكن وضع : $X=\sqrt{x}$ عند حساب النهاية عند 0 ) .

2 أدرس إتجاه تغير الدالة $f_0$ و شكل جدول تغيراتها .

3 أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_0)$ عند النقطة ذات الفاصلة $e$ .

4 أنشئ المماس $(T)$ و المنحني $(C_0)$ .

**II)** نفرض فيما يلي : $k$ عدد حقيقي كيفي .

1 أحسب نهاية الدالة $f_k$ عند كل من 0 و $+\infty$ .

2 أحسب : $f_k'(x)$ ، ثم أدرس إشارتها و ذلك حسب قيم $k$ .

3 نعتبر $A_k$ هي النقطة من المنحني $(C_k)$ التي فاصلتها 1 .

- بين أن المماس $(T_k)$ عند النقطة $A_k$ للمنحني $(C_k)$ هو المستقيم $(OA_k)$ .

4 بين أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ الوضع النسبي للمنحنيين $(C_k)$ و $(C_{k'})$ يترتب على مقارنة العددين $k$ و $k'$ .

- إستنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(C_{-3})$ و $(C_{-2})$ .

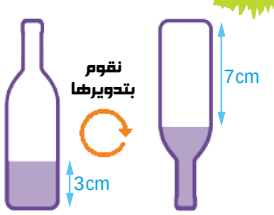
5 نعرف على المجال $[0;+\infty[$ الدالة $g_k$ كما يلي : $\begin{cases} g_k(x)=f_k(x) \;;\; x>0 \\ g_k(0)=0 \end{cases}$ .

- أحسب : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g_k(x)-g_k(0)}{x}$ . مـاذا تعني هذه النتيجة المحصل عليها ؟ .

**أجوبة**

**14** قارورة مكوّنة من أسطوانة وعنق سعتها 1,5 لتر.

- ما كمية السائل الموجودة في القارورة؟



## 4 كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق) ★★★★★ الانتقال الـــى الحـــل

$n$ عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر الدالة $f_n$ المعرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f_n(x)=x^n\ln(1+x)$ .

و ليكن $(C_n)$ المنحنى الممثل للدالة $f_n$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ . و حدته : $2cm$ .

1 نعتبر الدالة $h_n$ المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـــ : $h_n(x)=n\ln(1+x)+\dfrac{x}{x+1}$ .

أ) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $h_n$ .

ب) أحسب $h_n(0)$ ، ثمّ عيّن إشارة $h_n(x)$ من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ .

2 أ) تحقّق أنّه من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ تكون : $f_1'(x)=h_1(x)$ وَ $f_n'(x)=x^{n-1}\times h_n(x)$ .

ب) نفرض $n$ فردي ، بيّن أنّ : $f_n'(x)$ وَ $h_n(x)$ من نفس الإشارة .

❖ شكّل عندئذ جدول تغيّرات الدالة $f_n$ في حالة $n$ فردي ، مع حساب النهايات عند $-1$ وَ $+\infty$ .

ج) نفرض $n$ زوجي ، شكل جدول تغيرات الدالة $f_n$ ، مع حساب النهايات عند $-1$ وَ $+\infty$ .

3 أ) حدّد وضعية المنحنيين $(C_1)$ وَ $(C_2)$ .

ب) أنشئ كلاً من $(C_1)$ وَ $(C_2)$ .

## 5 تمارين مهمة للأساتذة لتعميق المفاهيم (قليل مصطفى) ★★★★★ الانتقال الـــى الحـــل

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+x\ln x$ نرمز بـ $(C)$ إلى التمثيل البياني للدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ( الرسم المرفق )

**الجزء الأول :** الهدف من هذا الجزء هو حصر $A$ مساحة الحيز المحدد بـ $(C)$ ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=2$

نسمي $M$ و $N$ النقطتين من $(C)$ فاصلتاهما 1 و 2 على الترتيب و $P$ و $Q$ مسقطاهما العموديان على محور الفواصل

1 أ) بين ان الدالة $f$ موجبة على $[1;2]$

ب) بين ان معامل توجيه المستقيم $(MN)$ هو $2\ln 2$

ج) لتكن $E$ النقطة ذات الفاصلة $\dfrac{4}{e}$ . بين انه على المجال $[1;2]$ النقطة $E$ هي الوحيدة من $(C)$ التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم $(MN)$

د) نسمي $(T)$ المماس عند النقطة $E$ . بين ان معادلة $(T)$ هي : $y=(2\ln 2)x-\dfrac{4}{e}+1$

2 لتكن الدالة $g$ المعرفة على $[1;2]$ بـ: $g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\dfrac{4}{e}+1\right]$

أ) عين مشتقة الدالة $g$ وبين ان $g'(x)=1+\ln\left(\dfrac{x}{4}\right)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ على $[1;2]$ ثم استنتج وضعية $(C)$ بالنسبة الى $(T)$ على هذا المجال

3 لتكن $M'$ و $N'$ النقطتين من $(T)$ فاصلتاهما 1 و 2 على الترتيب . نقبل ان $(C)$ يبقى تحت المستقيم $(MN)$ على المجال $[1;2]$ وان النقطتين $M'$ و $N'$ ترتيباهما موجبان تماما

أ) احسب مساحة كلا من شبه المنحرف $MNQP$ و $M'N'QP$

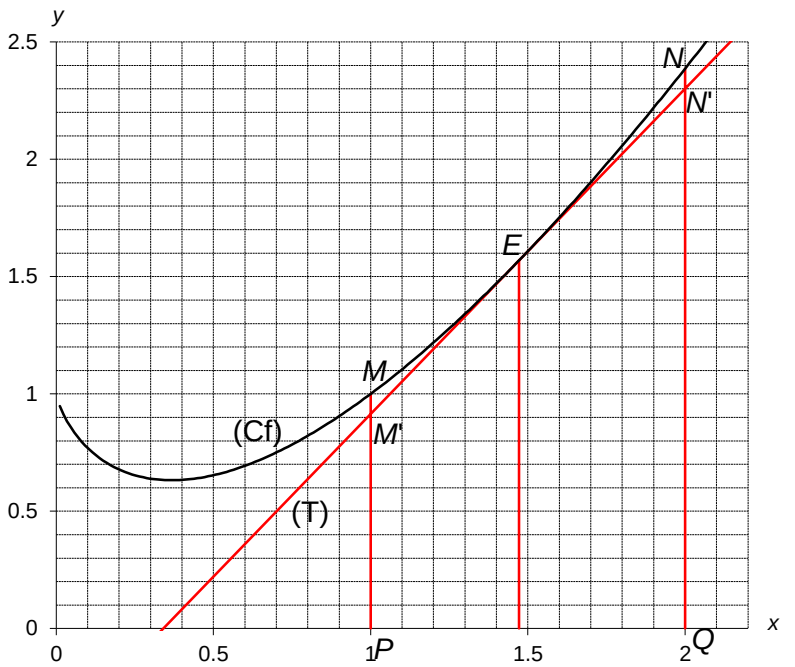
ب) استنتج حصرا للمساحة $A$ بتقريب $10^{-1}$

つづく

**الجزء الثاني:** الهدف من هذا الجزء هو تعيين القيمة المضبوطة للمساحة $A$

1 باستعمال مكاملة بالتجزئة احسب $\int_1^2 x\ln x dx$

2 استنتج القيمة المضبوطة لـ $A$




## أحجية

**15** من بين 100 شخص تم استجوابهم ، أجاب 96 بأن لديهم تلفازاً و أجاب 72 شخصاً بامتلاكهم جهاز لوحي رقمي.

- ما هو العدد الأدنى من الأشخاص الذين لديهم كلا الجهازين؟



**التمرين 01**

مجلة العبقري في الرياضيات (بوعزة مصطفى)

لدينا: $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3$ و $D_f = ]0; +\infty[$.

و$(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النيبيري)

**1) أ) حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$:**

لدينا: $f(x) = 0$ يعني: $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$

وبوضع: $\ln x = Y$ نجد: $Y^2 + 2Y - 3 = 0$ ... (1)

مميزها: $\Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16 > 0$

المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين هما، $Y' = \frac{-2+\sqrt{16}}{2(1)} = 1$ و $Y'' = \frac{-2-\sqrt{16}}{2(1)} = -3$.

- من أجل $Y' = 1$ يكون $\ln x = 1$ ومنه: $\boxed{x = e}$.
- من أجل $Y'' = -3$ يكون $\ln x = -3$ ومنه: $\boxed{x = e^{-3}}$. إذن: $\boxed{S = \{e^{-3}; e\}}$.

**تفسير النتيجة هندسيا:** $(C_f)$ يقطع **حامل محور الفواصل** في نقطتين فاصلتيهما، $e$ و $e^{-3}$.

**ب) تحليل $f(x)$ إلى جداء عاملين:**

كثير الحدود $Y^2 + 2Y - 3$ يقبل **جذرين متمايزين** هما، $Y' = 1$ و $Y'' = -3$.

فيكتب من الشكل: $Y^2 + 2Y - 3 = 1(Y - Y')(Y - Y'') = (Y - 1)(Y + 3)$

ومن أجل $\ln x = Y$ نجد: $\boxed{f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = (\ln x - 1)(\ln x + 3)}$.

**جـ) حل في المجال $]0; +\infty[$ المتراجحة $2\ln x + 2 \geq 0$:**

$2\ln x + 2 \geq 0$ تكافئ $\ln x \geq -1$ ومنه: $x \geq e^{-1}$ أي: $x \geq \frac{1}{e}$ إذن: $\boxed{S = \left[\frac{1}{e}; +\infty\right[}$.

**2) حساب $f'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة $f$:**

$f$ قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$، ولدينا: $\boxed{f'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x) + 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln x + 2}{x}}$.

ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(2\ln x + 2)$ على المجال $]0; +\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2\ln x + 2$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $f'(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |

إذن: $f$ **متناقصة تماما** على المجال $\left]0; \frac{1}{e}\right]$، و**متزايدة تماما** على المجال $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$.

**3) تبيان أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها:**

لدينا: $f''(x) = \frac{2(-\ln x)}{x^2} = \frac{-2\ln x}{x^2} = \frac{2-(2\ln x+2)}{x^2} = \frac{2\left(\frac{1}{x}\right)\times x - 1\times(2\ln x+2)}{x^2}$.

ومنه: إشارة $f''(x)$ من إشارة $(-\ln x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $f''(x)$ | ‖ | + | 0 | - | |

نلاحظ أن: $f''(x)$ **تنعدم عند 1 مغيرة إشارتها**، إذن: $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف هي: $I(1; f(1))$ أي: $\boxed{I(1; -3)}$.

## مسائل المستوى الأول ★

**التمرين 02**

**الممتاز في الرياضيات ( ساعد أحمد )**

1.

أ) دراسة اتجاه تغيرات الدالة $f$ حسب قيم $x$ على المجال $[-2,5]$:

- الدالة $f$ متناقصة على كل من المجالين $[-2,0]$ و $[2,5]$ .
- الدالة $f$ متزايدة على المجال $[0,2]$ .

ب) حساب $f(0)$ ، $f'(2)$ ، $f'(1)$ .

حساب $f(0)$ : المنحني يشمل النقطة $B(0,4)$ إذن $f(0)=4$ .

حساب $f'(2)$ : في النقطة $D(2,5)$ المماس للمنحني يوازي حامل محور الفواصل وبالتالي $f'(2)=0$ .

حساب $f'(1)$ : ليكن $T$ هو المماس للمنحني في النقطة التي فاصلتها 1 أي في النقطة $C\left(1,\frac{9}{2}\right)$ ، إذن $f'(1)$ هو معامل توجيه المماس $T$ . نختار نقطة ثانية من هذا المماس ولتكن $F(3,6)$ .

$$f'(1)=\frac{y_F-y_C}{x_F-x_C}=\frac{6-\frac{9}{2}}{3-1}=\frac{3}{4}$$

ت) دراسة إشارة $f'(x)$ على المجال $[-2,5]$:

- بما أن الدالة $f$ متناقصة على كل من المجالين $[-2,0]$ و $[2,5]$ فإن $f'$ سالبة على هذين المجالين.
- بما أن الدالة $f$ متزايدة على المجال $[0,2]$ فإن $f'$ موجبة على هذا المجال .

ث) دراسة إشارة $f(x)$ المجال $[-2,5]$:

- المنحني يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $E(4,0)$ وبالتالي $f(x)$ تنعدم عند $x=4$ .
- المنحني يقع فوق حامل محور الفواصل في المجال $[-2,4[$ وبالتالي $f(x)>0$ على هذا المجال.
- المنحني يقع تحت حامل محور الفواصل في المجال $]4,5]$ وبالتالي $f(x)<0$ على هذا المجال.

2) مجموعة تعريف الدالة $g$ حيث $g(x)=\ln(f(x))$.

تكون الدالة $g$ معرفة إذا وفقط إذا كانت $f(x)>0$ أي $D_g=[-2,4[$ .

3) حساب $g(2)$ ، $g(0)$ ، $g(-2)$ :

$g(2)=\ln f(2)=\ln 5$ ، $g(0)=\ln f(0)=\ln 4=2\ln 2$ ، $g(-2)=\ln f(-2)=\ln 9=2\ln 3$

つづく

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \ln f(x)=-\infty$ لأن $f(4)=0$ .

5) $g$ معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق على $D_g=]-2,4[$ ودالتها المشتقة $g'$ حيث $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ .

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $f'(x)$ لأن $f(x)>0$ حسب مجموعة التعريف.

إذن $g'(x)>0$ على المجال $]0,2[$ وفي هذا المجال تكون الدالة $g$ متزايدة.

$g'(x)<0$ على كل من $]0,-2[$ و $]2,4[$ وفي هذين المجالين تكون الدالة $g$ متناقصة.

$g'(x)=0$ من أجل $f'(x)=0$ أي إذا كان $x=0$ أو $x=2$ .

جدول تغيرات الدالة $g$ .

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $2\ln 3$ | ↘ | $2\ln 2$ | ↗ | $\ln 5$ | ↘ | $-\infty$ |

## التمرين 03

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

**1- دراسة تغيرات $f$ :**

لدينا : $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+1>0\}$ حيث : $D_f=]-1;+\infty[$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\left(-x^2+x+2\ln(x+1)\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-x^2+x+2\ln(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{-x^2+x}{x+1}+\frac{2\ln(x+1)}{x+1}\right]=-\infty$$

- $f'(x)=-2x+1+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{(-2x+1)(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{-2x^2-2x+x+1+2}{x+1}$

$$f'(x)=\frac{-2x^2-x+3}{x+1}$$

$f'(x)$ له نفس إشارة البسط .

ندرس إشارة $-2x^2-x+3$ : $\Delta=25$ , $x_1=1$ , $x_2=-\dfrac{3}{2}$

つづ

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2-x+3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

إذن $f$ متناقصة تماما على $[1;+\infty[$ و متزايدة تماما على $]-1\ ;\ 1]$

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2.\ln 2$ | ↘ | $-\infty$ |

$f(1)=2\ln 2$ بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=-\infty$ فإن : $x=-1$ معادلة مستقيم مقارب

2- إيجاد المماسات ذات معامل التوجيه 3 :

نحل المعادلة $f'(x)=3$ و عليه : $\dfrac{-2x^2-x+3}{x+1}=3$ إذن : $-2x^2-x+3=3x+3$

و عليه : $-2x^2-4x=0$ و عليه : $-2x(x+2)=0$ و منه : $x=0$ أو $x=-2$

إذن : $x=0$ ( $-2$ قيمة مرفوضة )

إذن هناك مماس واحد عند النقطة ذات الفاصلة 0 ومعادلته $y=f'(0)\times(x-0)+f(0)$

حيث $f(0)=0$ و عليه : $y=3x$

3- نبين أن $f(x)=0$ تقبل حلا :

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{25}{4}+\frac{5}{2}+2\ln\frac{7}{2}=\frac{-15}{4}+2\ln\frac{7}{2}\simeq -1,24$$

$$f(2)=-2+2\ln 3\simeq 0,19$$

وعليه الدالة $f$ مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left[2\ ;\ \frac{5}{2}\right]$ و لدينا : $f(2).f\left(\frac{5}{2}\right)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $x_0$ بحيث : $f(x_0)=0$ ; $2<x_0<\dfrac{5}{2}$

つづく

4 - إنشاء المماسات و $(C)$:

5- أ) إثبات أن $g$ زوجية :

لدينا: $D_g = \mathbb{R}$ و عليه من أجل كل عدد $x$ من $D_g$ :

$-x \in D_g$ و $g(-x) = g(x)$ و منه $g$ زوجية .

ب) كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

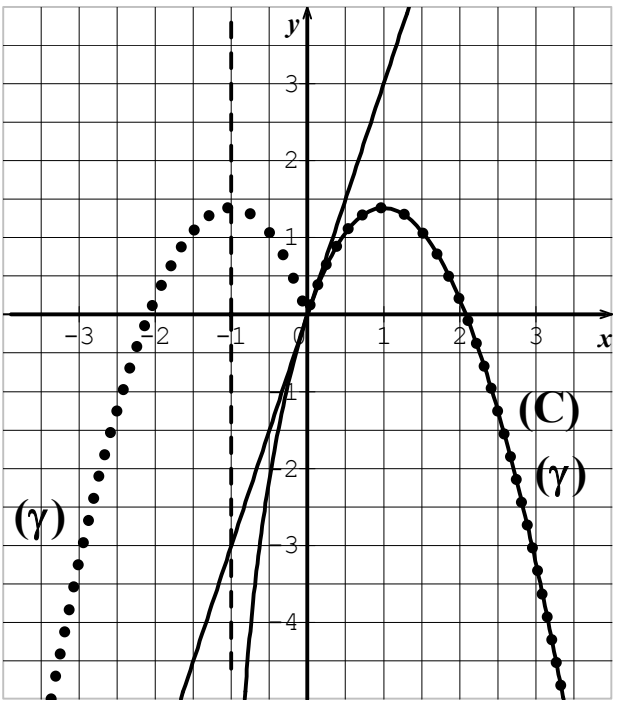
$$\begin{cases} g(x) = -x^2 + x + 2\ln(x+1) & ; \quad x > 0 \\ g(x) = -x^2 - x + 2\ln(-x+1) & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

ج) إنشاء $(\gamma)$ : ( في الرسم السابق )

- من أجل $x > 0$ : $g(x) = f(x)$

و منه $(\gamma)$ ينطبق على $(c)$

- من أجل $x < 0$ : الدالة $g$ زوجية و عليه بيانها متناظر بالنسبة لمحور التراتيب .




التمرين 04

مجلة الخليل للرياضيات (قويسم ابراهيم الخليل)

I) أ/ تشكيل جدول تغيرات الدالة $g$:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $1$ ↗ $+\infty$ | | $-\infty$ ↗ $1$ |

ب/ حل بيانيا المتراجحة $g(x) > 0$.

لدينا من البيان $g(x) = 0$ لما $x = 1$

إذن: $g(x) > 0$ لما $x \in ]-\infty;-1[ \cup ]1;+\infty[$

ج/ تعيين بيانيا قيم $x$ التي من أجلها $0 < g(x) < 1$.

من البيان نجد القيم التي من أجلها $0 < g(x) < 1$ هي لما $x \in ]1;+\infty[$

ↄↄ

**II) ❶** حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وتفسير النتيجتين هندسيا:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \left[\underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_{0} + \ln\left(\underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_{0^+}\right)\right] = -\infty$$

ومنه $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_{1} + \ln\left(\underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_{1}\right)\right] = 1$$

ومنه $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$

**❷** أ/ تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ : $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$:

$$g'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب/ حساب $f'(x)$، ودراسة إشارتها:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} + \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{2(x-1+x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{2(2x)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$$

لدينا: $f'(x) > 0$ لما $x \in ]1;+\infty[$ ومنه:

- جدول تغيرات الدالة $f$:

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $1$ |

**التمرين 05**

سلسلة تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية (مصطفاي عبد العزيز)

**I-** لتكن الدالة العددية $g$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = -2x^2 + 2 - \ln x$

**1. دراسة تغيّرات الدالة $g$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها.**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} -2x^2 + 2 = 2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(-2x + \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$$

つづ

الدالة $g$ تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=-4x-\frac{1}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$، $-4x<0$ و $-\frac{1}{x}<0$ عندئذ $g'(x)<0$ وبالتالي الدالة $g$ متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

**جدول تغيرات الدالة $g$.**

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ ↘ | $-\infty$ |

**2. حساب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.**

$g(1)=2(1)^2+2-\ln 1=0$

من أجل $x\in]0;1[$، $g(x)>0$

من أجل $x\in]1;+\infty[$، $g(x)<0$

**II - $f$** دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{-1+\ln x}{x}-2x+2e$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1. أ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}+\frac{\ln x}{x}-2x+2e=-\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{-1+\ln x}{x}=-\infty$ عندئذ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{-1+\ln x}{x}-2x+2e=-\infty$

**ب - تبيين أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-2x+2e$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.**

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-2x+2e)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}+\frac{\ln x}{x}=0$ ومنه المنحنى $(C_f)$ يقبل المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-2x+2e$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

**جـ - تحديد وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.**

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.

لدينا $x>0$ ومنه إشارة $f(x)-y=\frac{-1+\ln x}{x}$ هي نفس إشارة $-1+\ln x$.

$f(x)-y=0$ يكافئ $-1+\ln x=0$ ويكافئ $\ln x=1$ أي $x=e$.

$f(x)-y>0$ يكافئ $-1+\ln x>0$ ويكافئ $\ln x>1$ أي $x>e$.

つづ

| $x$ | $0$ | $e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| الوضعية النسبية | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $B(e;0)$ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |

**2. أ ـ تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ :** $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-(-1+\ln x)}{x^2}-2=\frac{2-\ln x-2x^2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

**ب ـ استنتاج اتجاه تغيّر الدالة $f$ .**

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ .

من أجل $x\in]-\infty;1[$ ، $f'(x)>0$ ؛ ومن أجل $x\in]1;+\infty[$ ، $f'(x)<0$ .

إذن الدالة $f$ متزايدة تماما على $]-\infty;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$ .

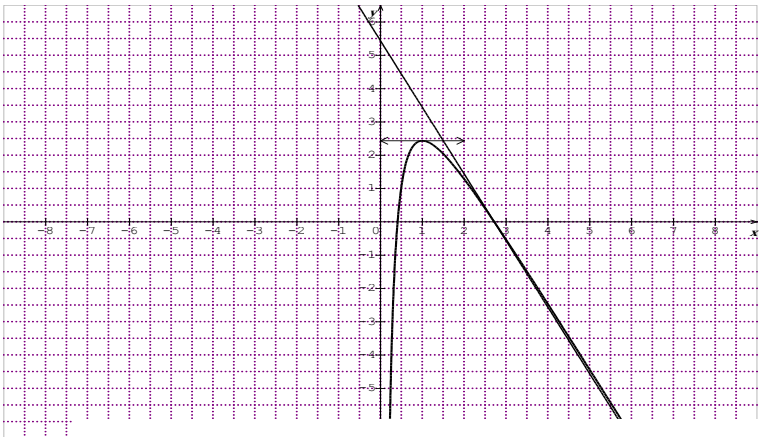
**جدول تغيّرات الدالة $f$ .**

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $2e-3$ | $-\infty$ |

**3. أ ـ إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_0$ في المجال $]0,4;0,5[$ .**

الدالة $f$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1[$ وخاصة على المجال $[0,4;0,5]$ ولدينا $f(0,4)\approx -0,15$ و $f(0,5)\approx 1,04$ إذن يوجد عدد حقيقي وحيد $x_0$ من المجال $]0,4;0,5[$ بحيث $f(x_1)=0$ وهذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

**ب ـ رسم $(\Delta)$ و $(C_f)$.**



**التمرين 01**

سلسلة تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية (مصطفاي عبد العزيز)

1) **بقراءة بيانية تحديد وضعية** $(\gamma)$ **بالنسبة إلى** $(\Delta)$.

في المجال $]0;\alpha[$، $(\gamma)$ يقع أسفل $(\Delta)$.

وفي المجال $]\alpha;+\infty[$، $(\gamma)$ يقع فوق $(\Delta)$.

$(\gamma)$ **و** $(\Delta)$ يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(\alpha;\ln\alpha)$.

2) $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$.

**استنتاج حسب قيم** $x$ **إشارة** $g(x)$.

لدينا حسب السؤال السابق من أجل كل $x\in]0;\alpha[$ : $\ln x-(-x+3)<0$ أي $g(x)<0$.

ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ : $\ln x-(-x+3)>0$ أي $g(x)>0$.

ومن أجل $x=\alpha$ : $\ln\alpha-(-\alpha+3)=0$ أي $g(\alpha)=0$.

3) **التحقق أنّ** $2,2<\alpha<2,3$.

الدالة $g$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[2,2;2,3]$ ولدينا $g(2,2)\approx-0,01$ و $g(2,3)\approx0,13$ أي $g(2,3)\times g(2,3)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، $g(\alpha)=0$ حيث $2,2<\alpha<2,3$

II) $f$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)$.

1) **حساب** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln(x)-2=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=+\infty$ . $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)-2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=+\infty$ . $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=+\infty$

2) **إثبات أنه من أجل كل** $x$ **من** $]0;+\infty[$ **:** $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\ln x-2}{x^2}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

**جدول تغيّرات الدالة** $f$.

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

لدينا $\ln\alpha=-\alpha+3$

ومنه $f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha-2)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(-\alpha+3-2)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha+1)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا $2,2<\alpha<2,3$ يكافئ $1,2<\alpha-1<1,3$ يكافئ $1,44<(\alpha-1)^2<1,69$ إذن $\frac{1,44}{2,3}<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\frac{1,69}{2,2}$

つづく

أي $0,62<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<0,77$ وعليه $-0,77<f(\alpha)<-0,62$.

4) **دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.**

من أجل ذلك ندرس إشارة $f(x)$.

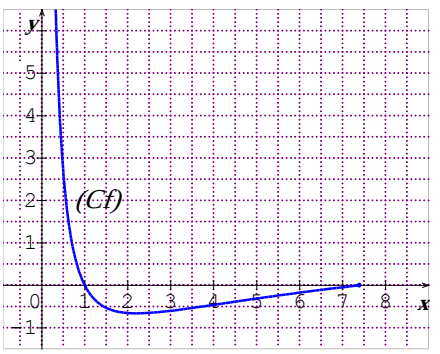
$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=\frac{1}{x}(x-1)(\ln x-2)$$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $\|$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | |
| $\ln x-2$ | $-$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $0$ | $+$ | |

$(C_f)$ فوق محور الفواصل في المجالين $]0;1]$ و $[e^2;+\infty[$ و $(C_f)$ تحت محور الفواصل في المجال $[1;e^2]$.

و $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و $e^2$.

**الرسم**




III) $F$ الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقق: $F(1)=-3$

1) **تبيين أن منحنى الدالة $F$ يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل.**

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=0$ تعني $f(x)=0$ ومنه $x=1$ أو $x=e^2$.

وبالتالي منحنى الدالة $F$ يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل عند النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و $e^2$.

2) **تبيين أنّ $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدّالة $x\mapsto\ln x$ على $]0;+\infty[$.**

نضع $h(x)=x\ln x-x$ ومنه $h'(x)=\ln x+\frac{1}{x}\times x-1=\ln x+1-1=\ln x$

وعليه الدالة $h$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln x$ على $]0;+\infty[$.

**استنتاج عبارة $F$.**

لدينا $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)=\ln x-2-\frac{1}{x}\ln x+2\frac{1}{x}$

ومنه $F(x)=x\ln x-x-2x-\frac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln x+\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$

أي $F(x)=x\ln x-3x-\frac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln x+\lambda$

بما أنّ $F(1)=-3$ فإن $-3+\lambda=-3$ أي $\lambda=0$ إذن $F(x)=x\ln x-3x-\frac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln x$.

**التمرين 02**

إعداد (راهم ف.)

**1. أ- حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$.**

لدينا : $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left(x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)$ ، وبالتالي $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=-\infty$.

التفسير الهند

つづ

ب- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)$ ، وبالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ .

**2. حساب المشتقة** $f'(x)$ .

من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-\infty;0[$ لدينا : $f'(x)=1+6\dfrac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}=\dfrac{x(x-1)-6}{x(x-1)}$

ومنه $f'(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{x(x-1)}$ .

- استنتاج إتجاه تغير الدالة $f$ .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-(x+2)$ .

ومنه : الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2[$

ومتناقصة تماما على المجال $]-2;0[$

وتبلغ قيمة حدية محلية كبرى $f(-2)=3+6\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(-2)$ | ↘ | $-\infty$ |

**3. أ- إثبات أن المستقيم** $(\Delta)$ **مستقيم مقارب مائل للمنحني** $(C_f)$ **بجوار** $-\infty$ .

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-y\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-x-5\right)$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-y\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)=0$ .

ومنه المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x+5$ مستقيم مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ بجوار $-\infty$ .

**ب- دراسة وضع المنحني** $(C_f)$ **بالنسبة للمستقيم** $(\Delta)$ .

لدينا : $f(x)-y=6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ .

من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-\infty;0[$ لدينا $x>x-1$ وبالتالي : $\frac{x}{x-1}<1$ .

إذن : $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)<0$ ، ومنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-\infty;0[$ المنحني $(C_f)$ تحت المستقيم $(\Delta)$ .

**4. إثبات أن المعادلة** $f(x)=0$ **تقبل حلين** $\alpha$ **و** $\beta$ .

- الدالة $f$ معرفة ومستمرة على المجال $[-3,5;-3,4]$ ومتزايدة تماما على المجال $]-3,5;-3,4[$ .

ولدينا : 01

つづ

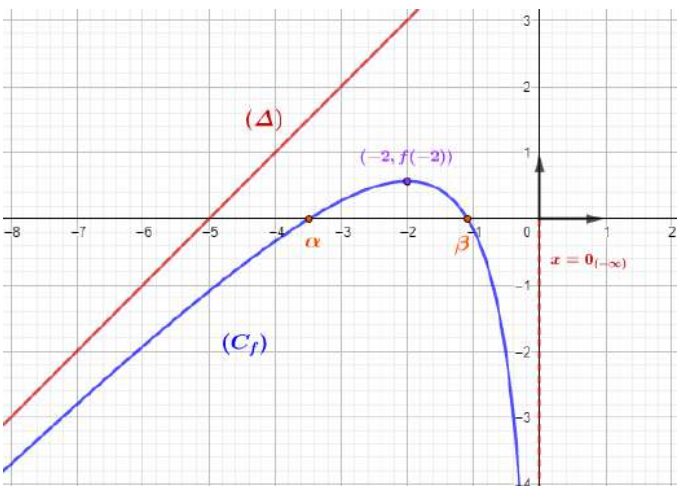
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد $\alpha$ وحيد حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ حل للمعادلة $f(x)=0$ .

- الدالة $f$ معرفة ومستمرة على المجال $[-1,1;-1,0]$ ومتزايدة تماما على المجال $]-1,1;-1,0[$ .

ولدينا : $f(-1,0)=-0,16$ و $f(-1,1)=0,02$ ، أي : $f(-1,0)\times f(-1,1)<0$ .

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد $\beta$ وحيد حيث $-1,1<\beta<-1,0$ حل للمعادلة $f(x)=0$ .

**5. إنشاء المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ .**




التمثيل بالشكل المقابل

**6. أ- كتابة معادلة ديكارتية للمستقيم $(AB)$ .**

لدينا : $\vec{AB}\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ ، نعتبر $M(x;y)\in(AB)$

وبالتالي : $\vec{AM}=t.\vec{AB}$ .

إذن : $t\in\mathbb{R}$ ; $\begin{cases}x+1=-t\\ y-3-6\ln\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2}t\end{cases}$ ، وبالتالي : $y-3-6\ln\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}(x+1)$ .

ومنه المعادلة الديكارتية للمستقيم : $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ .

**ب- إثبات أن المستقيم $(AB)$ يمس المنحنى $(C_f)$ في نقطة $M_0$ يطلب تعيين إحداثيتها .**

نضع : $f'(x)=\frac{1}{2}$ ، وبالتالي : $\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\frac{1}{2}$ ، إذن : $2x^2-2x-12=x^2-x$ ، أي : $x^2-x-12=0$ .

نحسب المميز : $\Delta=b^2-4.a.c=(-1)^2-4(1)(-12)=49=(7)^2$ .

إذن : $x_1=\frac{1-7}{2}=-3$ ( مقبول ) ، و $x_2=\frac{1+7}{2}=4$ ( مرفوض ) .

ولدينا : $f(-3)=-3+5+6\ln\left(\frac{-3}{-3-1}\right)=2+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ .

نعوض $x=-3$ في معادلة المستقيم نجد : $y=\frac{1}{2}(-3)+\frac{7}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)=f(-3)$ ،

ومنه : المستقيم $(AB)$ يمس المنحنى $(C_f)$ في نقطة $M_0$ إحداثيتها $\left(-3;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ .

つづ

7. إثبات أن الدالة $g$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]-\infty;0[$ .

الدالة $g$ معرفة وقابلة للإشتقاق على $]-\infty;0[$ و دالتها المشتقة هي : $g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-6x\frac{1}{x(x-1)}-\frac{6}{1-x}$ .

إذن : $g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=f(x)$ . ومنه الدالة $g$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]-\infty;0[$ .

## التمرين 03

مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)

1) إثبات ان $f$ فردية : هي معرفة على مجال اتحاد مجالين متناظرين بالنسبة إلى $O$ و

$f(-x)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)=-\frac{2}{3}+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\frac{2}{3}-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-f(-x)$ و منه $f$ فردية و منه $(C_f)$

يقبل مركز تناظر هو $O$ .

2) حساب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{3}x\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{3}x\right]=+\infty$ لأن

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\ln(1)=0$

و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}+\infty}\left[\frac{2}{3}+\ln\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\left[-\frac{2}{3}+\ln\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]=+\infty$

و منه $(C_f)$ يقبل مستقيمين موازيين لحامل محور التراتيب معادلاتهما هي $x=-1$ ; $x=1$ .

3) لدينا $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

أ) ومنه $f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}$ و منه $f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}$ أي ان

$f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{2x^2-2+6}{3(x^2-1)}=\frac{2x^2+4}{3(x^2-1)}$ إذن $f'(x)=\frac{2(x^2+2)}{3(x^2-1)}$ و هو المطلوب .

ب)استنتاج اتجاه تغير $f$ : من ما سبق $f'(x)=\frac{2(x^2+2)}{3(x^2-1)}$ اشارتها من إشارة $x^2-1$ و هي موجبة على المجالين

$]-\infty;-1[$ و $]1;+\infty[$ .

جدول تغيراتها

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | ‖ | | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+\infty$ ↗ | ‖ | | ‖ | ↗ $+\infty$ | |

つづ

4) تبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1,8<\alpha<1,9$ الدالة $f$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

و $f(1,8)=-0,05$ ; $f(1,9)=0,1$ و منه حسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا و حيدا $\alpha$ حيث $1,8<\alpha<1,9$.

5) إثبات أن $(\Delta): y=\frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ : لدينا $f(x)-\frac{2}{3}x=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و منه

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$$

ومنه $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ .

دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

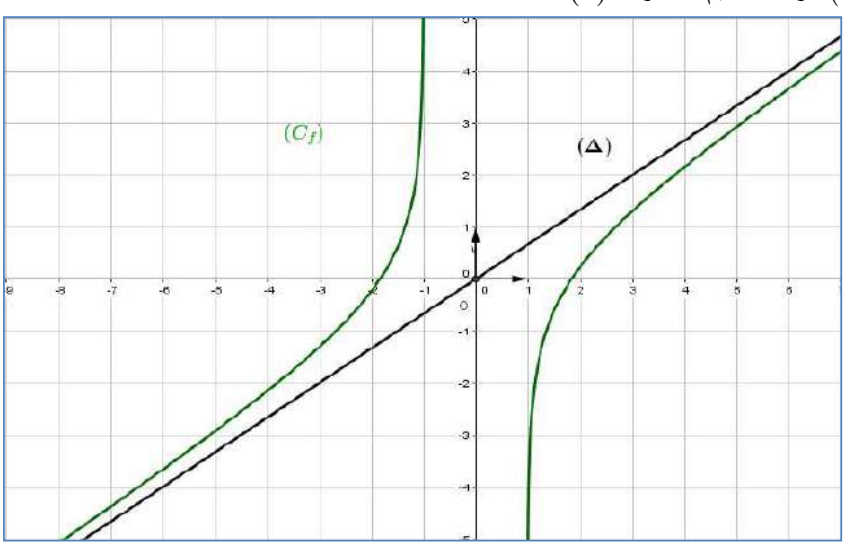
$\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right]=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و منه $\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right]>0$ يكافئ $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)>0$ و هذا يعني $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)>1$

لما $x\in]1;+\infty[$ فإن $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)>1$ يعني $x-1>x+1$ (الضرب في عدد موجب ) و هذا يعني $-2>0$ و هذا مستحيل و منه $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)<1$ على المجال $]1;+\infty[$ و منه $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ على هذا المجال

لما $x\in]-\infty;-1[$ فإن $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)>1$ يعني $x-1<x+1$ (الضرب في عدد سالب ) و هذا يعني $-2<0$ و محققة أي ان

$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)>1$ على المجال $]-\infty;-1[$ و منه $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ على هذا المجال

6) إنشاء المنحنى $(C_f)$ و المستقيم المقارب $(\Delta)$




つづ

## مسائل المستوى الثاني ★★

7) المناقشة بيانيا : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ يعني ان $\left(\frac{2}{3}-|m|\right)x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ و منه

$|m|x=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ يكافئ $|m|x=f(x)$ و حلها هو ايجاد فواصل تقاطع $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta_m)$ الذي معادلته $y=|m|x$

لما $|m|<\frac{2}{3}$ أي ان $-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$ نلاحظ ان $(C_f)$ و $(\Delta_m)$ يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حلين متمايزان

لما $|m|\geq\frac{2}{3}$ أي ان $m\geq\frac{2}{3}$ او $m<-\frac{2}{3}$ نلاحظ ان $(C_f)$ و $(\Delta_m)$ لا يتقاطعان و منه المعادلة ليس لها حلول .

**التمرين 04**

كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

**الجزء الأول:** لدينا : $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$ .

**- حساب : $g(1)$ و استنتاج إشارة $g(x)$ :**

بعد حساب $g(1)=0$ نجد جدول إشارة $g(x)$ بيانيا فيكون كما يلي : $g(x)>0$ لمّا : $0<x<1$ و $g(x)=0$ لمّا : $x=1$ و $g(x)<0$ لمّا : $x>1$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**الجزء الثاني :** لدينا $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ .

**1) أ) حساب : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ وَ تبيان أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ :**

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)=-\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 1+\ln x=-\infty$ وَ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(1+x\ln x)=1$ .

و منه : $x=0$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ بجوار $-\infty$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}\right)=0$ . و منه : $y=0$ مقارب للمنحني $(C_f)$ بجوار $+\infty$ .

**2) أ) بيان أنه من أجل كل : $x\in]0;+\infty[$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$ :**

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالته المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1+x\ln x)-(\ln x+1)(1+\ln x)}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-(1+\ln x)^2}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1}{(1+x\ln x)^2}$$ ،

و منه : $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$ ، **و هو المطلوب .**

つづ

**ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة $f$ وَ تشكيل جدول تغيّراتها :**

نلاحظ أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، أي : الدالة $f$ متزايدة تماما على $[0;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$ .

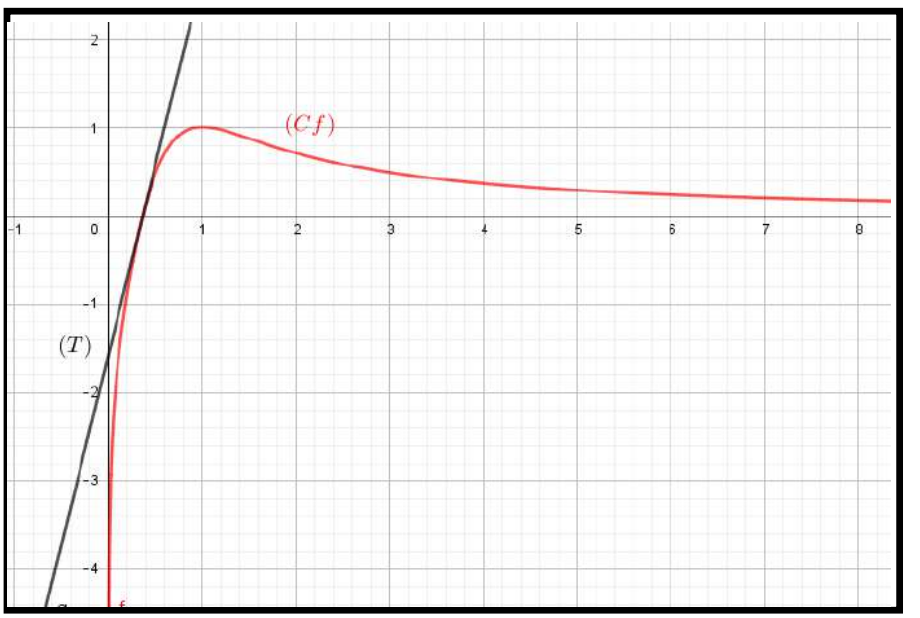
**جدول التغيّرات :**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ | ↗ | $1$ | ↘ | |
| | ‖ $-\infty$ | | | | $0$ |

**3) بيان أنّ : $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة $(T)$ مماس $(C_f)$ عند نقطة تقاطعه مع محور الفواصل:**

لدينا : بعد حل المعادلة : $f(x)=0$ نجد : $(C_f)\cap(xx')=\{(e^{-1};0)\}$ ، أي : $f'(e^{-1})=\frac{e^2}{e-1}$ ، و منه معادلة المماس تكون : $(T):y=f'(e^{-1})(x-e^{-1})+f(e^{-1})$ ، إذن : $(T):y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ .

**رسم كلا من $(T)$ المنحني $(C)$ :**




**4) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ :**

$(e-1)f(x)=e^2x-me$ ، أي : $f(x)=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}m$ ، أي : $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x+m'$ و بعد المقارنة مع المماس $(T)$ نجد $m=1$ ومنه : المعادلة تقبل حلّان لمّا : $m'\in\left]-\infty;-\frac{e}{e-1}\right[$ ، أي : $m\in]1;+\infty[$ .

つづ

**الجزء الثالث :**

**1) بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n>1$ : $I_n=\ln(1+n\ln n)$**

لدينا : $I_n=\int_1^n f(x)dx$ ، أي : $I_n=\int_1^n\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)dx$ ، نلاحظ أنّ : $I_n=\int_1^n\frac{u'(x)}{u(x)}dx$ ، و منه : $I_n=\left[\ln|u(x)|\right]_1^n$ ،

أي : $I_n=\ln(u(n))-\ln(u(1))$ ، أي : $I_n=\ln(1+n\ln n)-\ln(1)$ ، و منه : $I_n=\ln(1+n\ln n)$ .

**2) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية $(I_n)$ :**

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1}-I_n$ ، لدينا : $I_{n+1}=\int_1^{n+1}f(x)dx$ ، أي : $I_{n+1}=\int_1^n f(x)dx+\int_n^{n+1}f(x)dx$ ، أي :

$I_{n+1}=I_n+\int_n^{n+1}f(x)dx$ ، و منه : $I_{n+1}-I_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$ ، بما أنّ : $n>1$ فإنّ : $\int_n^{n+1}f(x)dx>0$ ،

إذن : من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، المتتالية $(I_n)$ متزايدة تماما .

**التمرين 05**

مجلة الخليل للرياضيات (قويسم ابراهيم الخليل)

**I) ❶ حساب $\lim\limits_{x\to-1}h(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$ :**

- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}h(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}(x^2+2x+\ln(x+1))=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x+\ln(x+1))=+\infty$

**❷ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-1;+\infty[$ : $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ :**

$$h'(x)=2x+2+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة $h$:

لدينا: $\left(\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}\right)>0$ لما $x\in\ ]-1;+\infty[$، ومنه $h'(x)>0$

- جدول تغيرات الدالة $h$:

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | |
| $h(x)$ | | ↗ | $+\infty$ |
| | $-\infty$ | | |

**❸ حساب $h(0)$ واستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم $x$:**

ومنه: $h(0)=0^2+2(0)+\ln(0+1)=0$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

つづ

**II) ❶ أ/** حساب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} h(x)$ :

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} h(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \left(x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = +\infty$$ لأن: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} (x+1) = 0^+$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \left(\frac{\ln(x+1)}{0^+}\right) = -\infty$

- التفسير الهندسي:

$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

**ب/** برهان أنّ $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ :

لدينا: $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{\ln t}\right) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{\ln e^t}{\ln t}\right) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{e^t}{t}\right) = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{\ln t}{t}\right) = 0 \quad \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{t}{\ln t}\right)}\right) = 0$$

**ج/** استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ :

نضع $t = x+1$ ومنه $x-1 = t-2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = \lim\limits_{t\to+\infty} t$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(t-2-\frac{\ln(t)}{t}\right) = +\infty$

**د/** حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(x-1)]$ :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right] = 0$$

ومنه $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = x-1$

**ه/** دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل $(d)$:

$$f(x)-(x-1) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

لدينا $x+1 > 0$ لما $x \in\ ]-1;+\infty[$ ومنه:

$$-\ln(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 = 1 \Rightarrow x = 0$$

ومنه:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y_{(d)}$ | $+$ | $0$ | $-$ |

- الوضعية:

- $(C_f)$ فوق $(d)$ لما $x \in\ ]-1;0[$
- $(C_f)$ فوق $(d)$ لما $x = 0$
-

つづ

❷ تبيين أنه من أجل كل $x \in ]-1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

- جدول تغيرات الدالة $f$:

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\|\|$ | $-\infty$ ↘ | | ↗ | $+\infty$ |
| | $\|\|$ | | $-1$ | | |

❸ تبيين أن المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3.3 و 3.4:

نضع $f(x) = k$ حيث $k = 2$ ونطبق نظرية القيم المتوسطة:

لدينا الدالة $f$ مستمرة ومتزايدة على المجال $]-1;+\infty[$

ولدينا: $f(3.3) \approx 1.96$ و $f(3.4) \approx 2.06$

إذن $k = 2$ محصورة بين $1.96 < 2 < 2.06$

وعليه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد $c$ حقيقي محصور بين $3.3 < c < 3.4$

❹ رسم $(C_f)$ :

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = -1$ بجوار $+\infty$
- نعين النقطة ذات الاحداثيات $(0;-1)$ نقطة تقاطع $(C_f)$ مع $(d)$
- نرسم المستقيم المقارب المائل $(d)$ ذو المعادلة $y = x - 1$ بواسطة جدول القيم المساعدة.
- نعين نقطة تقاطع $(C_f)$ مع المستقيم الأفقي $y = 2$
- باستعمال جدول التغيرات نكمل رسم $(C_f)$ مع الاستعانة بجدول الوضعية.

❺ حساب مساحة الحيز:

نضع: $A$ مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x - 1$ و $x = 0$ و $x = 1$

لدينا:

$$A = \int_0^1 (y_d - f(x))dx = \int_0^1 \left(x - 1 - \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx$$

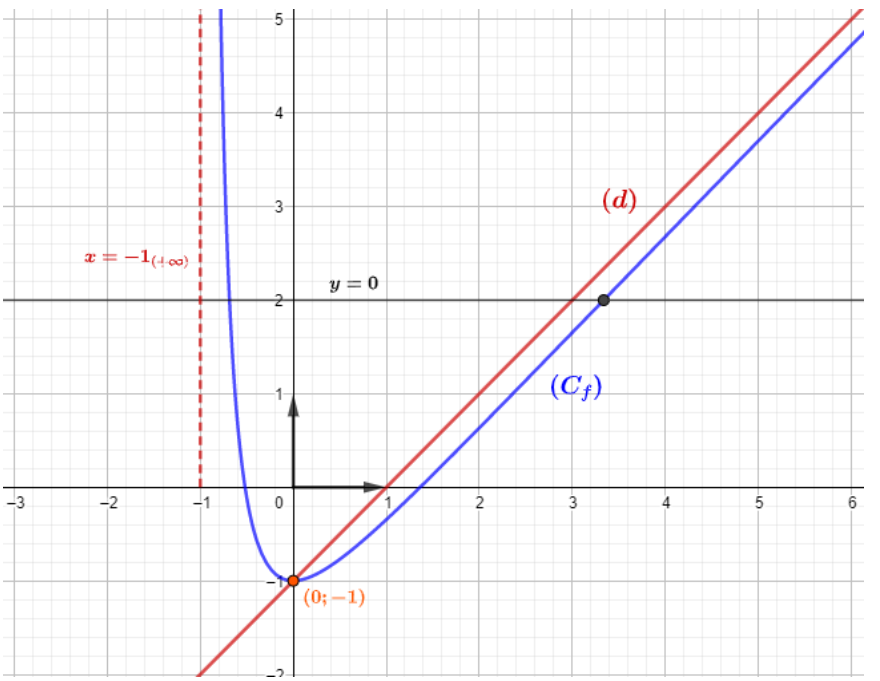
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}\ln(x+1)\right)dx = \left[\frac{\ln(x+1)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{(\ln 2)^2}{2} u.a$$

تذكير:

$$\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

つづ

## مسائل المستوى الثاني ★★



التمرين 01

مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)

I - الدالة العددية $g$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $g(x)=1+x^2-2x.(1+x)\ln(1+x)$

1. تحديد الوضعية

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| الوضعية | | $(C)$ يقع فوق $(\Gamma)$ | | $(C)$ يقع تحت $(\Gamma)$ | |
| | | | $(C)$ و $(\Gamma)$ يتقاطعان | | |

2. إشارة $g(x)$

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

II - الدالة العددية $f$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

1. أ- حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to -1^{>}} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^{>}} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to -1^{>}} \ln(1+x)=-\infty$

إثبات النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}$ أي أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}$ أي أن

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$ بالتزايد المقارن .

ب-التفسير الهندسي للنهايتين هو أن المستقيمان اللذان معادلاتهما $x=-1$ و $y=0$ مستقيمان مقاربان للمنحنى $(C_f)$.

2. أ- إثبات عبارة المشتقة : $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ أي أن $f'(x)=\dfrac{\frac{1+x^2}{1+x}-2x.\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}$ و منه

$f'(x)=\dfrac{1+x^2-2x(1+x).\ln(1+x)}{(1+x).(1+x^2)^2}$ إذن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x).(1+x^2)^2}$ محققة .

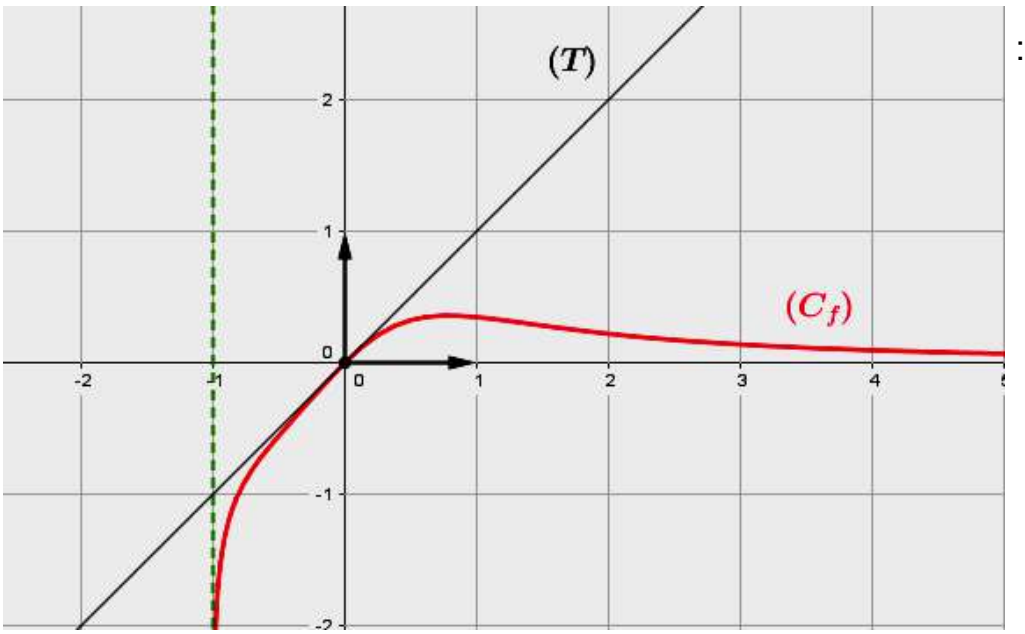
ب-إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ : ومنه الدالة $f$ متناقصة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-1;\alpha]$.

جدول تغيراتها

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\|$ $-\infty$ | ↗ | $f'(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

つづ

3. رسم $(T)$ و $(C_f)$:




4. الدالة العددية $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=\dfrac{\ln(1+|x|)}{1+x^2}$

أ - إثبات أن $h$ دالة زوجية : $h(-x)=\dfrac{\ln(1+|-x|)}{1+(-x)^2}=\dfrac{\ln(1+|x|)}{1+x^2}$ إذن $h(-x)=h(x)$ و منه محققة

ب -قابلية الاشتقاق للدالة $h$ عند $0$ :

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ بوضع $t(x)=\ln(1-x)$ و منه $t(0)=0$ و

أي أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{\ln(1-x)}{x(1+x^2)}$

$t'(x)=\dfrac{-1}{1-x}$ و منه $t'(0)=-1$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{h(x)}{x}=-1$ و منه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{t(x)-t(0)}{x-0}=t'(0)=-1$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ بوضع $m(x)=\ln(1+x)$ و منه $m(0)=0$ و

أي أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln(1+x)}{x(1+x^2)}$

و $m'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ و منه $m'(0)=1$

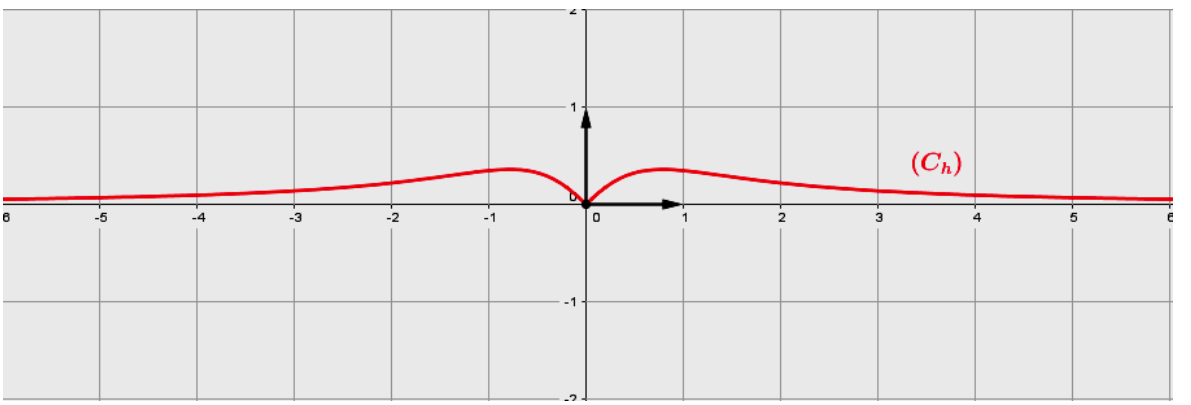
$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{h(x)}{x}=1$ و منه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{m(x)-m(0)}{x-0}=m'(0)=1$

بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{h(x)}{x}\neq\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{h(x)}{x}$ و منه الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $0$.

つづ

ج- من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $[0;+\infty[$ : $h(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}=f(x)$ و منه $(C_f)$ و $(C_h)$ منطبقان على المجال $[0;+\infty[$.

و بما أن $h$ دالة زوجية فإن $(C_h)$ متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب




**التمرين 02**

**سلسلة تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية (مصطفاي عبد العزيز)**

**I-** الدّالة $g$ معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$ .

**1- دراسة اتجاه تغيّر الدالة $g$ على المجال $]-1;+\infty[$ .**

الدّالة $g$ تقبل على الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ :

$$g'(x)=2(x+1)+\frac{1}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$، $x+1>0$ و $\frac{1}{x+1}>0$ ومنه $g'(x)>0$ إذن الدالة $g$ متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ .

**2-تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $0,31<\alpha<0,32$ وأنّ: $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$ .**

الدّالة $g$ مستمرة على $]-1;+\infty[$ لأنها تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ وهي متزايدة تماما على هذا المجال و خاصة على المجال $[0,31;0,32]$ ولدينا $g(0,31)\approx -0,01$ ، $g(0,32)\approx 0,02$ أي $g(0,31)\times g(0,32)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $]0,31;0,32[$ بحيث $g(\alpha)=0$

$g(\alpha)=0$ معناه $(\alpha+1)^2-2+\ln(\alpha+1)=0$ أي $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$ .

**3- استنتاج، حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$ .**

من أجل $x\in]-1;\alpha[$ لدينا $g(x)<g(\alpha)$ أي $g(x)<0$

ومن أجل $\alpha+\infty[$ $\in$ $\alpha$ $>$ $\alpha$ $=$

يتبع

**II-** الدّالة $f$ معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2$ .

$(C_f)$ منحنى $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1- حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ .

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\ln(x+1))^2=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2=+\infty$ .

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}(2-\ln(x+1))^2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2=+\infty$ .

**2- إثبات أنّه، من أجل كل** $x$ **من** $]-1;+\infty[$ **:** $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$ .

الدّالة $f$ تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=2(x+1)+2\left(\frac{-1}{x+1}\right)(2-\ln(x+1))=2(x+1)-\frac{2(2-\ln(x+1))}{x+1}=\frac{2(x+1)^2-2(2-\ln(x+1))}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{2\left[(x+1)^2-2+\ln(x+1)\right]}{x+1}=\frac{2g(x)}{x+1}$$

**3- دراسة اتجاه تغيّر الدالة** $f$ .

من أجل كل $x$ من المجال $]-1;+\infty[$، $\dfrac{2}{x+1}>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ .

أي $f$ سالبة على $]-1;\alpha[$ وموجبة على $]\alpha;+\infty[$

نستنتج هكذا أنّ الدالة $f$ متناقصة تماما على $]-1;\alpha[$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$.

**جدول تغيّرات الدالة** $f$.

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**4- تبيين أنّ:** $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$

لدينا $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$ إذن $f(\alpha)=(\alpha+1)^2+(2-\ln(\alpha+1))^2=(\alpha+1)^2+\left(2-\left(2-(\alpha+1)^2\right)\right)^2$

$$f(\alpha)=(\alpha+1)^2+(\alpha+1)^4=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$$

**استنتاج حصرا للعدد** $f(\alpha)$ .

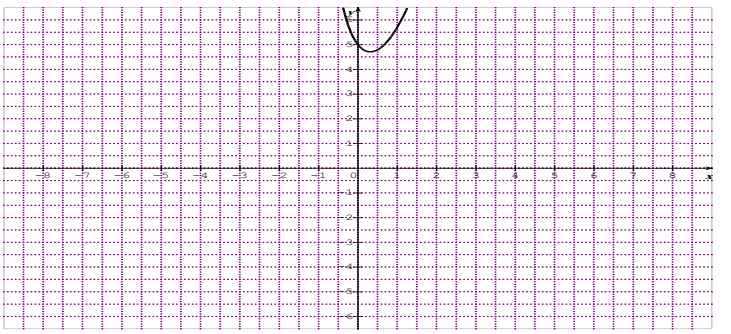
$0,31<\alpha<0,32$ معناه $1,31<\alpha+1<1,32$ يكافئ $1,7161<(\alpha+1)^2<1,7424$ ويكافئ

つづ

$2,7161<1+(\alpha+1)^2<2,7424$ ومنه $1,7161\times 2,7161<(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)<1,7424\times 2,7424$ أي

$4,6611<f(\alpha)<4,7789$ .

**5-تمثيل المنحنى** $(C_f)$ **على المجال** $]-1;2]$ .



**III-** $(\Gamma)$ المنحنى الممثل للدّالة $h$ المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$ .

$A$ النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و $M$ نقطة من $(\Gamma)$ فاصلتها $x$ .

**1-إثبات أنّ المسافة** $AM$ **تعطى بالعبارة** $AM=\sqrt{f(x)}$ .

لدينا $M\left(x;\ln(x+1)\right)$ ومنه

$$AM=\sqrt{(x+1)^2+\left(\ln(x+1)-2\right)^2}=\sqrt{(x+1)^2+\left(2-\ln(x+1)\right)^2}=\sqrt{f(x)}$$

2- الدّالة $k$ معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $k(x)=\sqrt{f(x)}$ .

**أ - تبيين أنّ للدالتين** $k$ **و** $f$ **نفس اتجاه التغيّر على المجال** $]-1;+\infty[$ .

الدالة $f$ تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ وهي موجبة على هذا المجال إذن الدالة $k$ تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$

ولدينا $k'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

من أجل كل $x$ من المجال $]-1;+\infty[$، $2\sqrt{f(x)}>0$ ومنه إشارة $k'(x)$ هي نفس إشارة $f'(x)$ وبالتالي للدالتين $k$ و $f$ نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$ .

**ملاحظة: يمكن إتباع طريقة اتجاه تغير مركب دالتين.**

**ب - تعيين إحداثيتي النقطة** $B$ **من** $(\Gamma)$**، بحيث تكون المسافة** $AM$ **أصغر ما يمكن.**

لدينا الدّالة $k$ متناقصة تماما على $]-1;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ فهي تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]-1;+\infty[$ تبلغها من أجل $x=\alpha$ ومنه $AM$ تكون أصغر ما يمكن من أجل $x=\alpha$ أي عند النقطة $B\left(\alpha;\ln(\alpha+1)\right)$

**جـ - تبيين أنّ:** $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$ .

$$AB=k(\alpha)=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)}=(\alpha+1)\sqrt{1+(\alpha+1)^2}$$

التمرين 03

رياضيات 2013 الموضوع الأول (06 نقاط)

$I-1$.أ- من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ لدينا: $u'(x)=e^x-3$ وعليه إشارة $u'(x)$ هي :

| $0$ | | $\ln 3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| | - | $0$ | + | |

وعليه الدالة $u$ متناقصة تماما على المجال $]0;\ln 3]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\ln 3;+\infty[$.

ب- للدالة $u$ قيمة حدية صغرى هي $u(\ln 3)=e^{\ln 3}-3\ln 3+4-e=7-3\ln 3-e\simeq 0.986>0$

ومنه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $u(x)>0$ أي $e^x-3x+4-e>0$ وعليه $\boxed{e^x-e>3x-4}$.

2.أ- من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ لدينا: $v'(x)=-9x^2+8x+\frac{1}{x}=\frac{-9x^3+8x^2+1}{x}$

ومنه $v'(1)=-9\times 1^2+8\times 1+\frac{1}{1}=0$.

ب- العدد 1 جذر لـ $v'(x)$ وبتحليل $v'(x)$ نجد : $v'(x)=-\frac{(x-1)(9x^2+x+1)}{x}$

ولكون $9x^2+x+1>0$ ( مميزه $\Delta=-35<0$ و $9>0$) فإن إشارة $v'(x)$ عكس إشارة $x-1$

أي أن $v'(x)>0$ على المجال $]0;1[$ و $v'(x)<0$ على المجال $]1;+\infty[$ أي أن الدالة $v$ متزايدة تماما على المجال $]0;1]$

و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ ومنه للدالة $v$ قيمة حدية كبرى هي $v(1)=-3\times 1^3+4\times 1^2-1+\ln 1=0$

أي أنه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $v(x)\le 0$.

جـ- $v(x)\le 0$ معناه $-3x^3+4x^2-1+\ln x\le 0$ ومنه $-1+\ln x\le 3x^3-4x^2$

وعليه $-1+\ln x\le x^2(3x-4)$ ولكون $x\neq 0$ ينتج أن $\boxed{\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4}$.

3. من $e^x-e>3x-4$ و $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$ نستنتج أن $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4<e^x-e$

أي أن $\frac{-1+\ln x}{x^2}<e^x-e$ ومنه $\boxed{e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0}$.

$II-1$. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty}$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x-ex=1$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}}=\lim\limits_{X\to+\infty}-X\ln X=-\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-ex=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}-e\right)=+\infty$.

つづく

## مسائل المستوى الثالث ★★★

2.من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ لدينا

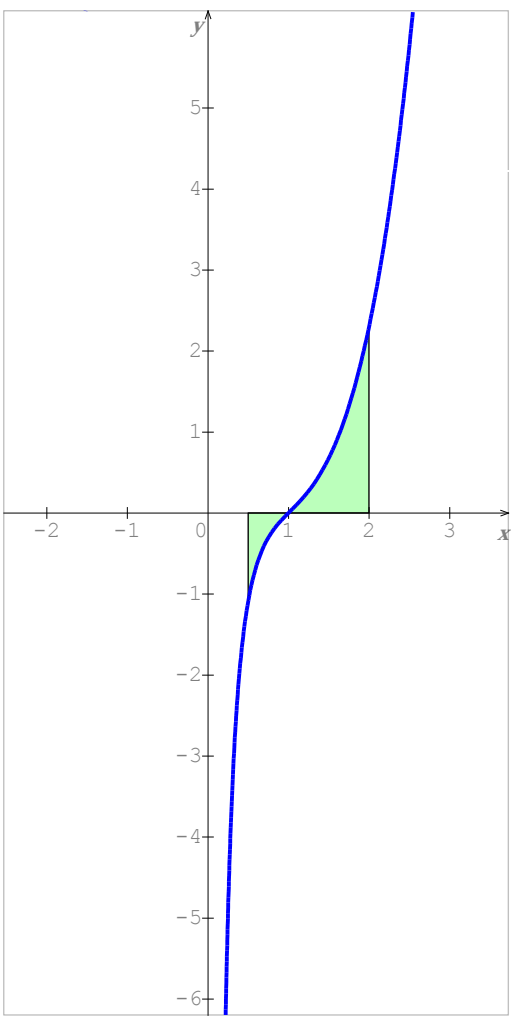
$f'(x)=e^x-e+\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$ ( من السؤال $I-3.$ ) ومنه

الدالة $f$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وجدول تغيراتها هو

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\|$ | $+\infty$ |
| | $-\infty$ | |

3.لدينا $f(1)=e^1-e\times1+\dfrac{\ln1}{1}=\boxed{0}$.

تمثيل $(C_f)$ :




4.لتكن $A$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$

وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\dfrac{1}{2}$ و $x=2$

عندئذ : $A=\int_{\frac{1}{2}}^{1}-f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$

لدينا الدالة $F$ المعرفة بـ $F(x)=e^x-\dfrac{e}{2}x^2+\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

هي دالة أصلية لـ $f$ على $]0;+\infty[$ ومنه :

أي $A=-\left[F(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[F(x)\right]_{1}^{2}=-F(1)+F\left(\dfrac{1}{2}\right)+F(2)-F(1)=F(2)+F\left(\dfrac{1}{2}\right)-2F(1)$

أي $A=e^2-\dfrac{e}{2}\times2^2+\dfrac{1}{2}(\ln2)^2+e^{\frac{1}{2}}-\dfrac{e}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)^2-2\left(e^1-\dfrac{e}{2}\times1+\dfrac{1}{2}(\ln1)^2\right)=\boxed{e^2+e^{\frac{1}{2}}-\dfrac{25}{8}e+(\ln2)^2}$

$\boxed{A\approx1.024}$

التمرين 04

إعداد الأستاذ: شداني عبد المالك

I) $g(x)=x\ln x+x$ ، $D_g=]0;3]$

**1) دراسة تغيرات الدالة $g$ :**

النهايات: $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x+x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$ .

إتجاه التغير: لدينا من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0;3]$ : $g'(x)=\left(1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)+1$ ومنه $g'(x)=2+\ln x$

إشارة $g'(x)$ : $g'(x)=0$ يكافئ $2+\ln x=0$ يكافئ $\ln x=-2$ أي $x=e^{-2}$ .

$g'(x)>0$ يكافئ $2+\ln x>0$ يكافئ $\ln x>-2$ أي $x>e^{-2}$ .

$g'(x)<0$ يكافئ $2+\ln x<0$ يكافئ $\ln x<-2$ أي $x<e^{-2}$ .

الخلاصة: $g$ دالة متزايدة تماما على $[e^{-2};3]$ ومتناقصة تماما على $]0;e^{-2}[$ .

**جدول التغيرات:**

| $x$ | $0$ | | $e^{-2}$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ $0$ | ↘ | $-e^{-2}$ | ↗ | $3+3\ln 3$ |

**2) أ) تبيان أن المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]0;3]$ :**

- الدالة $g$ مستمرة و متناقصة تماما على $]0;e^{-2}]$ و لكن $2\notin]0;-e^{-2}]$ و بتالي المعادلة $g(x)=2$ لا تقبل حلول على المجال $]0;e^{-2}]$ .
- الدالة $g$ مستمرة و متزايدة تماما على $[e^{-2};3]$ و $2\in[-e^{-2};3+3\ln 3]$ و بتالي المعادلة $g(x)=2$ تقبل حل وحيد $\alpha$ على المجال $[e^{-2};3]$ .
- بما أن $g(1,46)=2,01$ و $g(1,45)=1,99$ ، نلاحظ أن $g(1,45)<2<g(1,46)$ إذن : $1,45<\alpha<1,46$ .

**ب) إستنتاج إشـــارة $g(x)-2$ :**

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)-2$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

II) $f(x)=|x-2|\ln x$ ، $D_f=]0;3]$ .

1) تخمين حول قابلية الإشتقاق للدالة $f$ عند 2:

الدالة $f$ غير قابلة للإشتقاق عند 2 لان المنحنى $(C_f)$ لا يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 2

(المنحنى $(C_f)$ يقبل نصفي مماسين)

**2) إثبات صحة التخمين:**

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|\ln x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\ln x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\ln x=\ln 2$$

العدد المشتق من يمين العدد 2 هو $\ell_1=\ln 2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|\ln x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)\ln x}{x-2}=\lim_{x\to 2}-\ln x=-\ln 2$$

العدد المشتق من يسار العدد 2 هو $\ell_2=-\ln 2$

つづく

**3) دراسة تغيرات الدالة $f$ :**

النهايات: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} |x-2|\ln x = -\infty$

إتجاه التغير: من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0;3]$ ، لدينا: $f(x) = \begin{cases} (x-2)\ln x & ; 3 \geq x > 2 \\ -(x-2)\ln x & ; 0 < x < 2 \end{cases}$

ومنه من اجل $x \in ]2;3]$ : $f'(x) = 1 \times \ln x + (x-2) \times \frac{1}{x} = \frac{x\ln x + x - 2}{x}$ أي $f'(x) = \frac{g(x)-2}{x}$

و من أجل $x \in ]0;2[$ : $f'(x) = -1 \times \ln x - (x-2) \times \frac{1}{x} = \frac{-x\ln x - x + 2}{x}$ أي $f'(x) = -\frac{g(x)-2}{x}$

**الخلاصة:**

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | |

$f$ دالة متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha[$ و على $]2;3[$ و متناقصة تماما على المجال $]\alpha;2[$ .

**جدول التغيرات:**

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\ln 3$ |

III) $h(x) = (2-\cos x)\ln(\cos x)$ ، $D_h = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

1) تبيان أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب لـ $(C_h)$ :

لدينا، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} h(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (2-\cos x)\ln(\cos x) = -\infty$ ومنه المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب لـ $(C_h)$.

**2) دراسة إتجاه تغير الدالة $h$ :**

من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ، $h(x) = f(\cos x)$ ( $h$ مركب الدالة $x \mapsto \cos x$ متبوعة بالدالة $x \mapsto f(x)$ )

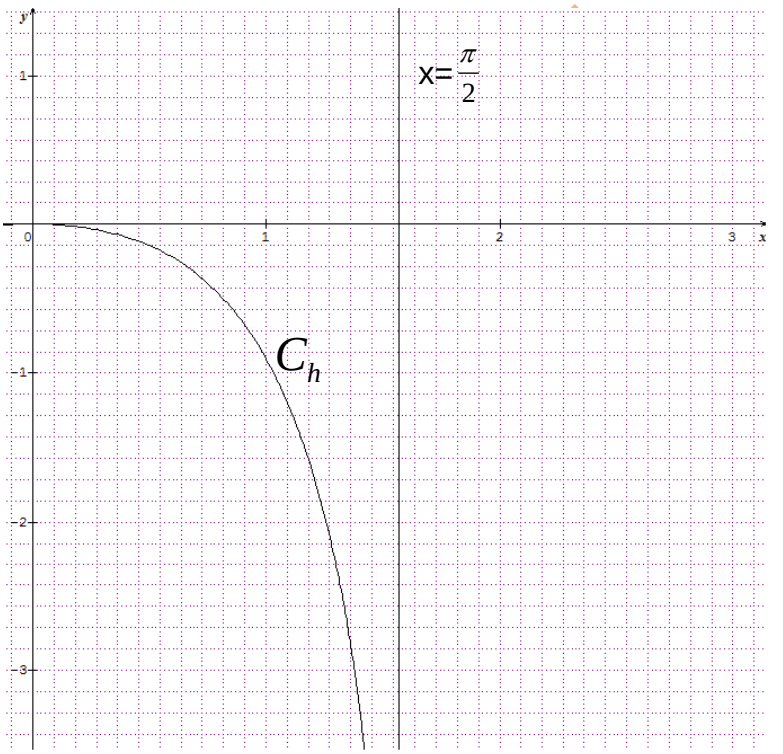
الدالة "cos" متناقصة تماما على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ و $f$ متزايدة تماما $]0;1]$ ومنه $h$ متناقصة تماما على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ .

**جدول تغيرات :**

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | - | ‖ |
| $h(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ |

## مسائل المستوى الثالث ★★★

الرسم:




**التمرين 05**

**سلسلة تمارين محلولة في الدوال اللوغاريتمية (مصطفاي عبد العزيز)**

لتكن $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=1-\dfrac{\ln x^2}{x}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **دراسة تغيّرات الدالة** $f$ .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{2\ln -x}{x}=\lim_{t\to+\infty} 1+\frac{2\ln t}{t}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2\ln x}{x}=1$$

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} \ln x^2=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} \dfrac{\ln x^2}{x}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} 1-\dfrac{\ln x^2}{x}=-\infty$

و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x^2=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \dfrac{\ln x^2}{x}=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 1-\dfrac{\ln x^2}{x}=+\infty$ .

$$f'(x)=-\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x-\ln x^2}{x^2}=\frac{\ln x^2-2}{x^2}$$

つづ

## مسائل المستوى الثالث ★★★

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x^2-2$.

$f'(x)=0$ معناه $\ln x^2-2=0$ ويكافئ $\ln x^2=2$ ويكافئ $x^2=e^2$ أي $x=e$ أو $x=-e$

$f'(x)>0$ معناه $\ln x^2-2>0$ ويكافئ $\ln x^2>2$ ويكافئ $x^2>e^2$ أي $x>e$ أو $x<-e$

إشارة $f'(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-e$ | | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

الدّالة $f$ متزايدة على كل من $]-\infty;-e]$ و $[e;+\infty[$ ومتناقصة على كل من $[-e;0[$ و $]0;e]$.

**جدول تغيّرات الدّالة $f$.**

| $x$ | $-\infty$ | | $-e$ | | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $\frac{e+2}{e}$ | $\searrow$ | $-\infty \Vert +\infty$ | $\searrow$ | $\frac{e-2}{e}$ | $\nearrow$ | $1$ |

**2. إثبات أنّ المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم $(\Delta): y=1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.**

$f(x)=1$ معناه $1-\frac{\ln x^2}{x}=1$ يكافئ $\ln x^2=0$ ويكافئ $x^2=1$ أي $x=1$ أو $x=-1$

إذن $(C_f)\cap(\Delta)=\{A(1;1),B(-1;1)\}$

**3. حساب $f(-x)+f(x)$.**

$$f(-x)+f(x)=1-\frac{\ln(-x)^2}{-x}+1-\frac{\ln x^2}{x}=2+\frac{\ln x^2}{x}-\frac{\ln x^2}{x}=2$$

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$ ولدينا $f(-x)+f(x)=2$ وعليه النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$

**4. تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-0,71;-0,70[$**

الدّالة $f$ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-0,71;-0,70]$ ولدينا $f(-0,71)\approx 0,04$ ، $f(-0,70)\approx -0,02$ أي $f(-0,71)\times f(-0,70)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ في المجال $]-0,71;-0,70[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

**5. إثبات أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى $(C_f)$ في نقطتين.**

لدينا معادلة المماس $(T)$ من الشكل: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$A(0;1)\in(T)$ معناه $1=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$ وتكافئ $-x_0\left(\frac{\ln x_0^2-2}{x_0^2}\right)+1-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=1$

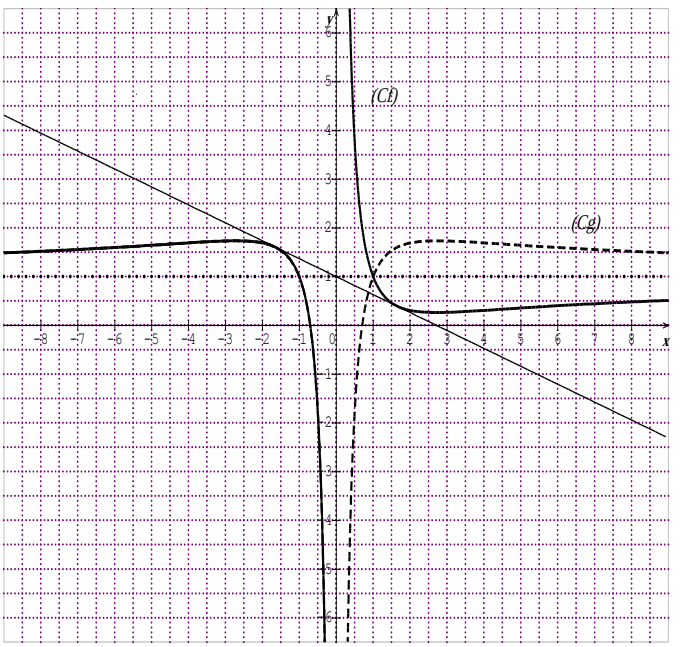
وتكافئ $\left(\frac{-\ln x_0^2+2}{x_0}\right)-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=0$ وتكافئ $\frac{-2\ln x_0^2+2}{x_0}=0$ وتكافئ $\ln x_0^2=1$ ومنه $x_0^2=e$

つづ

أي $x_0=\sqrt{e}$ أو $x_0=-\sqrt{e}$. إذن $(C_f)$ يقبل مماسين يشملان النقطة $A(0;1)$ عند النقطتين اللتين فاصلتيهما $\sqrt{e}$ و $-\sqrt{e}$ ولدينا $f'\left(\sqrt{e}\right)=-\frac{1}{e}$ و $f'\left(-\sqrt{e}\right)=-\frac{1}{e}$ إذن المماسان متوازيان وبالتالي هما متطابقان أي أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى $(C_f)$ في النقطتين اللتين إحداثيتيهما $\left(\sqrt{e};f\left(\sqrt{e}\right)\right)$ و $\left(-\sqrt{e};f\left(-\sqrt{e}\right)\right)$.

**كتابة معادلة المماس $(T)$.**

$y=f'\left(\sqrt{e}\right)\left(x-\sqrt{e}\right)+f\left(\sqrt{e}\right)$ ومنه $y=\frac{-1}{e}x+1$.




6. **رسم المماس $(T)$ والمنحنى $(C_f)$.**

7. **المناقشة بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة:** $f(x)=mx+1$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ والمستقيم ذي المعادلة $y=mx+1$.

إذا كان $m<-\frac{1}{e}$ فإنّ المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m=-\frac{1}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

إذا كان $-\frac{1}{e}<m<0$ فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m\geq 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

8. $h$ الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي $x$ حيث: $h(x)=1+\frac{\ln x^2}{|x|}$.

**أ) تبيين أنّ $h$ دالة زوجية.**

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$.

ولدينا $h(-x)=1+\frac{\ln(-x)^2}{|-x|}=1+\frac{\ln x^2}{|x|}=h(x)$

$$\begin{cases}h(x)=f(-x);x>0\\h(x)=f(x);x<0\end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases}h(x)=1+\frac{\ln x^2}{x};x>0\\h(x)=1+\frac{\ln x^2}{-x};x<0\end{cases}$$

إذن $(C_h)$ ينطبق على $(C_f)$ في المجال $]-\infty;0[$ وبما أنّ $h$ زوجية فإنّ $(C_h)$ متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.

## مسائل المستوى الرابع ★★★★

**التمرين 01**

**مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)**

لدينا $f(x)=\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)$ .

1. حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(6x)=+\infty$

و النهاية الثانية نضرب في المرافق داخل اللوغاريتم النيبري لانها حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}-3x}\right)=-\infty$ لأن

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}-3x}\right)=0$ ; $\lim\limits_{t\xrightarrow{>}0}\ln t=-\infty$ .

ب.حساب المشتقة $f'(x)=\dfrac{\dfrac{18x}{2\sqrt{9x^2+1}}+3}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$ أي $f'(x)=\dfrac{\dfrac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}+3}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$ أي $f'(x)=\dfrac{\dfrac{3.\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)}{\sqrt{9x^2+1}}}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$ أي

$f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$ و هو المطلوب .

ج. $f$ متزايدة على $\mathbb{R}$ لأن المشتقة موجبة

جدول تغيرات

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

2. لدينا $g(x)=f(x)-x$ .

أ- إثبات النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\dfrac{\ln(6x)}{x}-1\right]=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(6x)}{x}\right]=0$

ب.إثبات عبارة المشتقة $g'(x)=f'(x)-1=\dfrac{3}{\sqrt{9x^2+1}}-1$ أي $g'(x)=\dfrac{3-\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{9x^2+1}}$ ومنه $g'(x)=\dfrac{9-\left(9x^2+1\right)}{\left(3+\sqrt{9x^2+1}\right)\sqrt{9x^2+1}}$

أي أن $g'(x)=\dfrac{8-9x^2}{\left(3+\sqrt{9x^2+1}\right)\sqrt{9x^2+1}}$ و هو المطلوب .

ج. إشارة المشتقة من إشارة البسط $8-9x^2$ و التي تنعدم عند $\dfrac{\sqrt{8}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ و هي موجبة على المجال $\left[0\,;\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ و سالبة على المجال

$\left[\dfrac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$ و منه $g$ متزايدة على المجال $\left[0\,;\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\dfrac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$

| $x$ | $0$ | $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $0$ ↗ | $0{,}8$ | ↘ $-\infty$ |

3.أ إثبات أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $2{,}83<\alpha<2{,}84$

حساب $g(2{,}83)=0{,}005$ و $g(2{,}84)=-0{,}001$ بما أن الدالة مستمرة و متناقصة على المجال $]2{,}83;2{,}84[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة للمعادلة حل وحيد $\alpha$

ب-استنتاج إشارة $g(x)$ :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

つづ

## مسائل المستوى الرابع ★★★★

ج-تحديد وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمنصف الأول $(\Delta)$ : من إشارة $g(x)$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| الوضعية | | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ | |
| | | | $(C_f)$ و $(\Delta)$ يتقاطعان | | |

4. نعتبر $k(x)=\ln(6x)$ و $(\gamma)$ التمثيل البياني للدالة $k$

أ. إثبات أن $(\gamma)$ صورة للمنحنى الدالة $x\mapsto \ln(x)$ بتحويل نقطي بسيط $k(x)=\ln(6x)$ يعني أن $k(x)=\ln 6+\ln(x)$ أي أن $(\gamma)$

صورة المنحنى الدالة $x\mapsto \ln(x)$ بتحويل نقطي عبارته التحليلية $\begin{cases}x'=x\\ y'=y+\ln 6\end{cases}$ و هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;\ \ln(6))$ .

ب. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-k(x)]$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-k(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)-\ln(6x)\right]$. أي

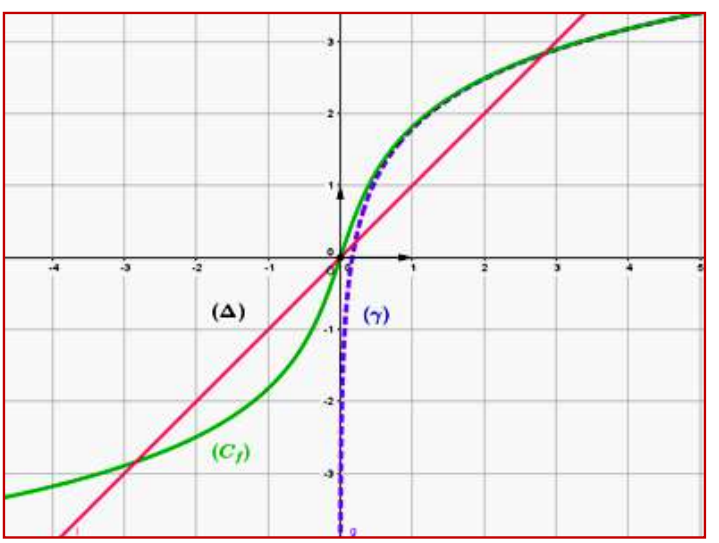
$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-k(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{9x^2+1}+3x}{6x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{6x}{6x}\right)=0$ التفسير البياني أن المنحنى $(\gamma)$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ جهة $+\infty$ .

5. أ. إثبات أن $f$ دالة فردية : مجموعة تعريفها متناظرة بالنسبة الى $0$ و

$f(-x)=\ln\left(\sqrt{9(-x)^2+1}+3(-x)\right)=\ln\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$ أي $f(-x)=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}\right)=-\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)$ إذن

$f(-x)=-f(x)$ و منه الدالة فردية محققة .

ب. إنشاء المنحنى من ما سبق نستنتج أن $(C_f)$ متناظر بالنسبة للمبدأ $O$




**التمرين 02**

**تمارين مقترحة (إبراهيم وعلي حسين)**

1. تحديّد نهاية $g$ عند $-\infty$ ثم عند $+\infty$ :

- لدينا $g(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}=e^{\frac{x}{2}}\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x}{2}}=0^{+}$ ومنه $\lim g(x)=0^{+}$ .

つづ

- لدينا $g(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}=e^{x}\left(e^{-\frac{x}{2}}-1\right)$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-\frac{x}{2}}-1\right)=-1\end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ .

2. ايجاد $g'(x)$ :

- لدينا $g(x)=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}$ ومنه $g'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'-\left(e^{x}\right)'=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}-\left(e^{x}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(1-2e^{\frac{x}{2}}\right)$ وذلك من اجل كل $x\in\mathbb{R}$ .

- دراسة اتجاه تغير $g$ :

- ندرس إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$

وبما ان $g'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(1-2e^{\frac{x}{2}}\right)$ فان اشارتها من إشارة $\left(1-2e^{\frac{x}{2}}\right)$ على $\mathbb{R}$

- لدينا $1-2e^{\frac{x}{2}}=0$ من اجل $e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}$ ومنه $\frac{x}{2}=-\ln 2$ ومنه $x=-2\ln 2$

وبذلك متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2\ln 2]$

و متناقصة تمام على المجال $[-2\ln 2;+\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | $-2ln2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $1-e^{\frac{x}{2}}$ | $+$ | $0$ | $-$ |

- تشكيل جدول تغيرات $g(x)$ :

$g(-2\ln 2)=e^{-\ln 2}-e^{-2\ln 2}=e^{\ln\frac{1}{2}}-e^{\ln\frac{1}{4}}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

| $x$ | $-\infty$ | $-2ln2$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |
| $g(x)$ | $0+$ | $\nearrow$ $\frac{1}{4}$ | $\searrow$ $0$ | $\searrow$ $-\infty$ |

3. احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ الحقيقية :

$g(0)=e^{0}-e^{0}=1-1=0$ و من جدول تغيرات $g$ نستنتج إشارة $g(x)$

لدينا

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

إذا $\begin{cases}g(x)>0 & /\ x<0\\ g(x)=0 & /\ x=0\\ g(x)<0 & /\ x>0\end{cases}$

الجزء الثاني :

لدينا الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}^{*}$ حيث $f(x)=\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|$ و $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني .

1. تحديد نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ و عند $0$ :

- لدينا $f(x)=\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|$ ومنه $f(x)=\ln|g(x)|$ من اجل كل $x\in\mathbb{R}^{*}$

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0^{+}$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}|g(x)|=0^{+}$ وبذلك $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln|g(x)|=-\infty$ .

つづ

- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}|g(x)|=+\infty$ وبذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln|g(x)|=-\infty$ .

- لدينا $\lim\limits_{x\to0} g(x)=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to0}|g(x)|=0^+$ وبذلك $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\ln|g(x)|=-\infty$ .

2. حساب $f'(x)$ :

لدينا من اجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ فان $f(x)=\ln|g(x)|$ ومنه $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

- إشارة $f'(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2ln2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |

اذا $\begin{cases} f'(x)>0 & / x\in]-\infty;-2\ln 2[\cup]0;+\infty[ \\ f'(x)=0 & / x=-2\ln 2 \\ f'(x)<0 & / x\in]-2\ln 2;0[ \end{cases}$

3. استنتج اتجاه تغير $f$ :

من إشارة $f'(x)$ نستنتج ان $f$ متناقصة تماما على المجال $[-2\ln 2;0[$

ومتزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-2\ln 2]$ و $]0;+\infty[$ .

- تشكيل جدول تغيرات $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2ln2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-2ln2$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

- $f(-2\ln 2)=\ln g(-2\ln 2)=\ln\dfrac{1}{4}=-2\ln 2$

4. إيجاد فاصلة تقاطع $(\mathcal{C})$ مع محور الفواصل :

- نحل المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}^*$

$f(x)=0$ تكافئ $\ln|e^{x^2}-e^x|=0$ ومنه $|e^{x^2}-e^x|=1$ ومنه $\begin{cases} e^{x^2}-e^x=-1 / x\in]0;+\infty[ \\ e^{x^2}-e^x=1 \quad / x\in]-\infty;0[ \end{cases}$

- $-\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2+e^{\frac{x}{2}}-1=0 \quad / x\in]-\infty;0[$ ومنه $\begin{cases} -t^2+t-1=0 \quad / t\in\mathbb{R}_+^* \\ t=e^{\frac{x}{2}} / x\in]-\infty;0[ \end{cases}$

$\Delta=1^2-4(-1)(-1)=-3$ ومنه المعادلة لا تقبل حلول في المجال $]-\infty;0[$

- $-\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2+e^{\frac{x}{2}}+1=0 / x\in]0;+\infty[$ ومنه $\begin{cases} -t^2+t+1=0 \quad / t\in\mathbb{R}_+^* \\ t=e^{\frac{x}{2}} / x\in]0;+\infty[ \end{cases}$

つづ

- $\Delta=1^2-4(-1)(1)=5$ ومنه $\begin{cases}t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ t=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\notin\mathbb{R}_+^*\end{cases}$ ومنه $e^{\frac{x}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ومنه $x=2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

وبذلك $(\mathcal{C})$ يقطع محور الفواصل في النقطة $\left(2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);0\right)$ .

5. أ)- التحقق أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ لدينا $f(x)-x=\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)$ :

- من اجل كل $x\in]0;+\infty[$ فان $e^{\frac{x}{2}}-e^x<0$ ومنه $\left|e^{\frac{x}{2}}-e^x\right|=e^x-e^{\frac{x}{2}}=e^x\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)$

ومنه $f(x)=\ln\left[e^x\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)\right]=\ln e^x+\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)=x+\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)$

وبذلك $f(x)-x=\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)$ .

ب)- استنتاج أن المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحني $(\mathcal{C})$ بجوار $(+\infty)$ :

- بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty}1-e^{-\frac{x}{2}}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)=0$ وبذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=0$

ومنه المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحني $(\mathcal{C})$ بجوار $(+\infty)$

جـ)- دراسة وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمقارب $(D)$ :

- ندرس إشارة الفرق $[f(x)-x]$ على $\mathbb{R}^*$

لدينا $f(x)-x=\ln|e^{\frac{x}{2}}-e^x|-x=\ln|e^{\frac{x}{2}}-e^x|-\ln(e^x)=\ln\frac{|e^{\frac{x}{2}}-e^x|}{e^x}=\ln|e^{-\frac{x}{2}}-1|$

ومنه إشارة الفرق $[f(x)-x]$ من إشارة $\left[|e^{-\frac{x}{2}}-1|-1\right]$ على $\mathbb{R}^*$ .

لدينا $\left[e^{-\frac{x}{2}}-2\right]$ و بما ان $|e^{-\frac{x}{2}}-1|-1=\frac{\left(e^{-\frac{x}{2}}-1\right)^2-1}{|e^{-\frac{x}{2}}-1|+1}=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{|e^{-\frac{x}{2}}-1|+1}\left[e^{-\frac{x}{2}}-2\right]$ مهما كان $x\in\mathbb{R}^*$ $\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{|e^{-\frac{x}{2}}-1|+1}>0$

وبذلك إشارة الفرق $[f(x)-x]$ من إشارة $\left[e^{-\frac{x}{2}}-2\right]$ على $\mathbb{R}^*$ .

لدينا $e^{-\frac{x}{2}}-2=0$ من اجل $e^{-\frac{x}{2}}=2$ ومنه $-\frac{x}{2}=\ln 2$ وبذلك $x=-2\ln 2$

ومنه $(\mathcal{C})$ يقع فوق $(D)$ في المجال $]-\infty;-2\ln 2[$

つづ

| $x$ | $-\infty$ | $-2ln2$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $e^{-\frac{x}{2}}-2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |

و اسفله في المجال $]-2\ln 2;0[\cup]0;+\infty[$

ويتقاطعان في النقطة $(-2\ln 2;-2\ln 2)$

6. أ)- التحقق أنه من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ لدينا $f(x)-\frac{x}{2}=\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$ :

- من اجل كل $x\in]-\infty;0[$ فان $e^{\frac{x}{2}}-e^{x}>0$ ومنه $\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|=e^{\frac{x}{2}}-e^{x}=e^{\frac{x}{2}}\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$

ومنه $f(x)=\ln\left[e^{\frac{x}{2}}\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)\right]=\ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right)+\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)=\frac{x}{2}+\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$

وبذلك $f(x)-\frac{x}{2}=\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)$ .

ب)- استنتج ان المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=\frac{x}{2}$ مقارب للمنحني بجوار $(-\infty)$ :

- بما ان $\lim\limits_{x\to-\infty}1-e^{\frac{x}{2}}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)=0$ وبذلك $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-\frac{x}{2}=0$

ومنه المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=\frac{x}{2}$ مقارب للمنحني بجوار $(-\infty)$.

جـ)- ثم ادرس وضعية بالنسبة للمقارب $(\Delta)$ :

- ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]$ على $\mathbb{R}^*$

لدينا $f(x)-\frac{x}{2}=\ln|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}|-\frac{x}{2}=\ln|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}|-\ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right)=\ln\frac{|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}|}{e^{\frac{x}{2}}}=\ln|1-e^{\frac{x}{2}}|$

ومنه إشارة الفرق $\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]$ من إشارة $\left[|1-e^{\frac{x}{2}}|-1\right]$ على $\mathbb{R}^*$ .

لدينا $|1-e^{\frac{x}{2}}|-1=\frac{\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)^2-1}{|1-e^{\frac{x}{2}}|+1}=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{|1-e^{\frac{x}{2}}|+1}\left[e^{\frac{x}{2}}-2\right]$

و بما ان $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{|1-e^{\frac{x}{2}}|+1}>0$ مهما كان $x\in\mathbb{R}^*$

つづ

وبذلك إشارة الفرق $\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]$ من إشارة $\left[e^{\frac{x}{2}}-2\right]$ على $\mathbb{R}^*$ .

لدينا $e^{\frac{x}{2}}-2=0$ من اجل $e^{\frac{x}{2}}=2$ ومنه $\frac{x}{2}=\ln 2$ وبذلك $x=2\ln 2$

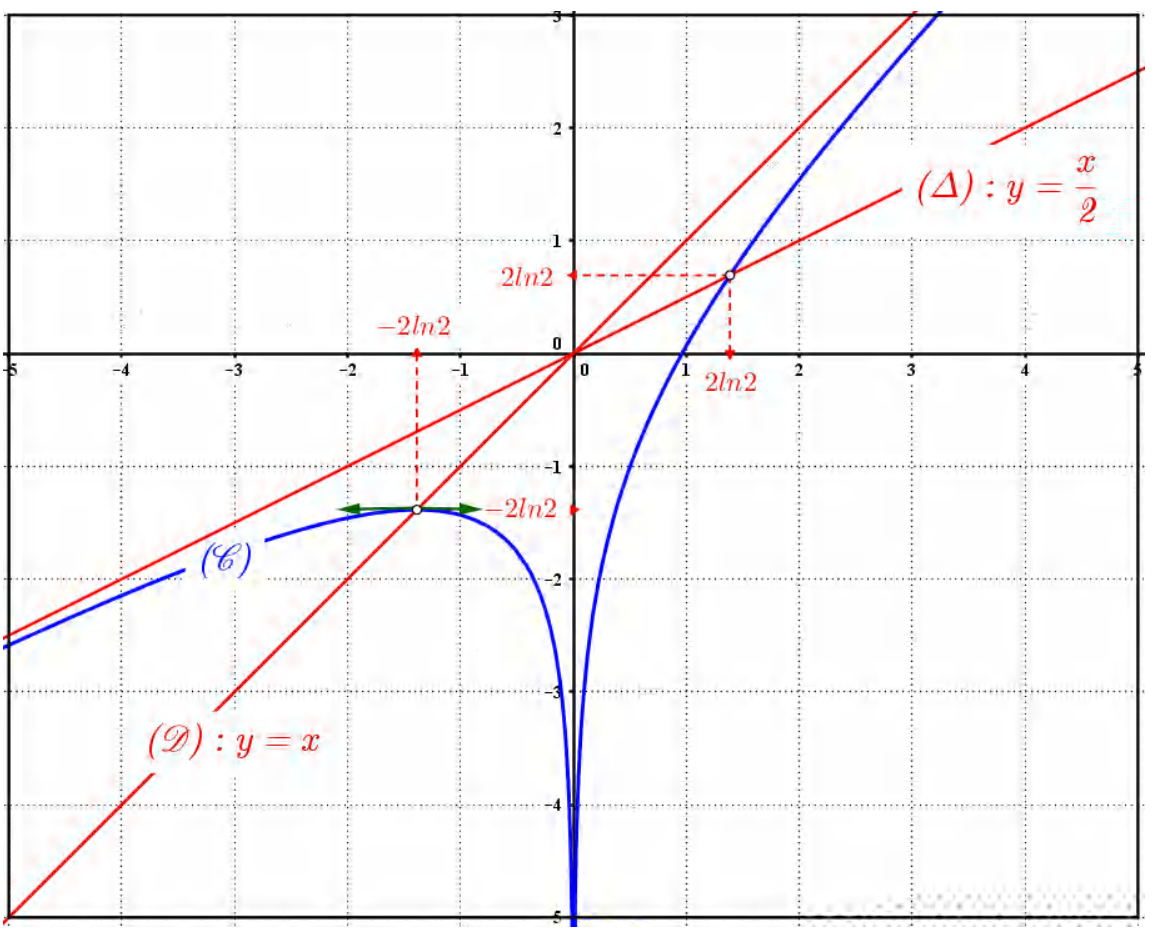
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2ln2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^{\frac{x}{2}}-2$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

ومنه يقع اسفل $(\Delta)$ في المجال $]-\infty;0[\cup]0;2\ln 2[$

و فوقه في المجال $]2\ln 2;+\infty[$

ويتقاطعان في النقطة $(2\ln 2;2\ln 2)$

7. رسم $(\mathcal{C})$، $(D)$ و $(\Delta)$ في المعلم السابق :




8.أ)- التحقق ان المعادلة $(1)$ تكافئ $f(x)=mx$ :

لدينا $\ln\left|e^{x\left(\frac{1}{2}-m\right)}-e^{x(1-m)}\right|=0$ تكافئ $\ln\left|e^{\frac{1}{2}x-xm}-e^{x-xm}\right|=0$ تكافئ $\ln\left(e^{-mx}\right)\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|=0$

تكافئ $\ln\left(e^{-mx}\right)+\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|=0$ تكافئ $-mx+\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|=0$ تكافئ $\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-e^{x}\right|=mx$ تكافئ $f(x)=mx$ .

つづ

ب)- استنتاج بيانيا عدد واشارة حلول المعادلة (1) :

لدينا (1) تكافئ $f(x)=mx$ تكافئ $\begin{cases}y=f(x)\\y=mx\end{cases}$ ومنه حلول (1) هي فواصل نقط تقاطع $(\mathcal{C})$ والمستقيم $y=mx$

من البيان نستنتج : عندما $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ فان المعادلة (1) تقبل حلا موجبا .

عندما $x\in\left]\frac{1}{2};1\right[$ فان المعادلة (1) تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

عندما $x\in[1;+\infty[$ فان المعادلة (1) تقبل حلا سالبا .

**التمرين 03**

كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

**الجزء الأوّل :** $g(x)=2-x-\ln(x-1)^2$

1) **حساب النهايات :**

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}g(x)=+\infty$ ، **لأنّ :** $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}(2-x)=1\\\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}-\ln(x-1)^2=+\infty\end{cases}$.

**المستقيم ذو المعادلة :** $x=1$ **مقارب موازي لحامل محور التراتيب للمنحنى** $(C_g)$ **بجوار** $+\infty$ .

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ ، **لأنّ :** $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty\\\lim\limits_{x\to+\infty}-\ln(x-1)^2=-\infty\end{cases}$.

2) **دراسة إتجاه تغير الدالة** $g$ :

❖) **الدالة المشتقة :** $g'(x)=-1-\frac{2}{x-1}$ ، **أي :** $g'(x)=\frac{-x-1}{x-1}$ .

**نلاحظ أنّه من أجل كل** $x>1$ **تكون :** $g'(x)<0$ ، **و منه : الدالة** $g$ **متناقصة تماما على** $]1;+\infty[$ .

❖) **جدول التغيرات :**

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ ‖ | ↘ | $-\infty$ |

3) **حساب** $g(2)$ :

$g(2)=0$ ، **سنلخص إشارة** $g(x)$ **في الجدول التالي :**

| $x$ | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

يتبع

4) لدينا : $|g(x)|=1$ تكافئ : $g(x)=1$ ، أو $g(x)=-1$ .

❖) على المجال $[1;2[$ ، الدالة $g$ مستمرة و رتيبة ، و صورة هذا المجال هي $[0;+\infty[$ ، وَ $1\in[0;+\infty[$ ،

إذن المعادلة : $g(x)=1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $[1;2[$ ، (حسب مبرهنة القيم المتوسطة) .

❖) على المجال $[2;+\infty[$ : الدالة $g$ مستمرة و رتيبة ، و صورة هذا المجال هي $]-\infty;0[$ ، وَ $-1\in]-\infty;0[$ ،

إذن المعادلة $g(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ من المجال $[2;+\infty[$ ، (حسب مبرهنة القيم المتوسطة) .

❖) نحسب : $\begin{cases} g(1,70)=.... \\ g(1,71)=.... \end{cases}$ و منه : $1,70<\alpha<1,71$ ، و منه : $\begin{cases} g(2,37)=.... \\ g(2,38)=.... \end{cases}$ و منه : $2,37<\beta<2,38$ .

5) كتابة معادلة المماس $(\Delta)$ عند النقطة ذات الترتيبة 1 ، أي عند النقطة $A(\alpha;1)$ :

$(\Delta): y=g'(\alpha)(x-\alpha)+g(\alpha)$ ، أي : $(\Delta): y=\dfrac{-\alpha-1}{\alpha-1}(x-\alpha)+1$ ،

و منه : $(\Delta): y=\dfrac{-\alpha-1}{\alpha-1}x+\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$

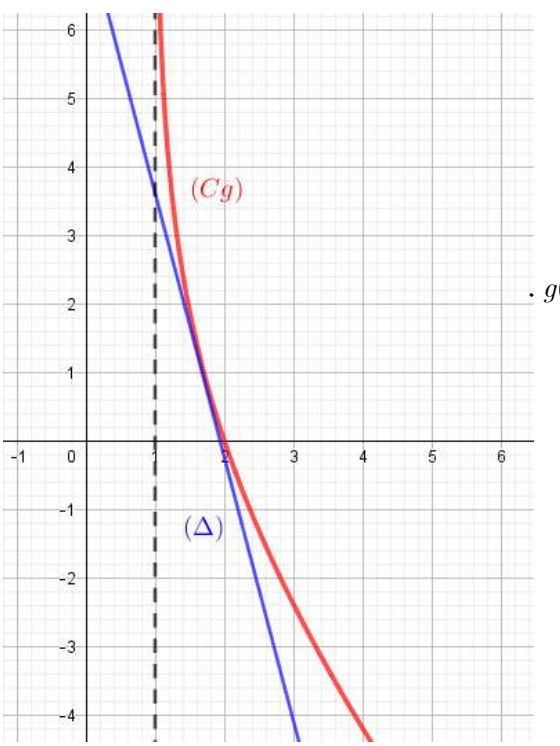
❖) حصر العدد $\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}$ :

لدينا : $1,70<\alpha<1,71$ ، أي : $2,89<\alpha^2<2,92$ ، أي : $4,59<\alpha^2+\alpha<4,63.....(1)$ .

لدينا : $1,70<\alpha<1,71$ ، أي : $0,70<\alpha-1<0,71$ ، أي : $\dfrac{1}{0,71}<\dfrac{1}{\alpha-1}<\dfrac{1}{0,70}.....(2)$ .

بضرب (1) في (2) نجد : $\dfrac{4,59}{0,71}<\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}<\dfrac{4,63}{0,70}$ ، و منه : $6,46<\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}<6,61$ .

ب) إنشاء $(\Delta)$ و المنحنى $(C_g)$ :




ج) المناقشة البيانية :

لدينا من أجل كل $x>1$ : $2-2\ln(x-1)=\dfrac{-2}{\alpha-1}x+m$ ،

أي : $2-x-2\ln(x-1)=\dfrac{-2}{\alpha-1}x-x+m$

أي : $g(x)=(\dfrac{-2}{\alpha-1}-1)x+m$ ، و منه : $g(x)=(\dfrac{-\alpha-1}{\alpha-1})x+m$ .

و لدينا : $(\Delta): y=\dfrac{-\alpha-1}{\alpha-1}x+\underbrace{\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1}_{m}$

، و منه المناقشة تكون كالتالي :

❖) إذا كان : $m>\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$ فإنّ المعادلة تقبل حلين متمايزين .

❖) إذا كان : $m=\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$ فإنّ المعادلة تقبل حل وحيد .

❖) إذا كان : $m<\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}+1$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلول .

つづ

**الجزء الثاني :** $f(x)=\left[x-1+2\ln(x-1)\right]\left[x-3+2\ln(x-1)\right]$ .

1) **نعلم أنّ :**

$\left[g(x)\right]^2-1=\left[g(x)-1\right]\left[g(x)+1\right]=\left[2-x-\ln(x-1)^2-1\right]\left[2-x-\ln(x-1)^2+1\right]$ ،

**و منه من أجل كل عدد حقيقي** $x>1$ **فإنّ :** $\left[g(x)\right]^2-1=\left[1-x-2\ln(x-1)\right]\left[3-x-2\ln(x-1)\right]$

**و بحكم :** $(-a)\times(-b)=a\times b$ **، أي :** $\left[g(x)\right]^2-1=\left[x-1+2\ln(x-1)\right]\left[x-3+2\ln(x-1)\right]$ .

**و عليه :** $f(x)=\left[g(x)\right]^2-1$ .

2) **حساب النهايات :** ( **نستعمل الشكل :** $f(x)=\left[g(x)\right]^2-1$ ).

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left[g(x)\right]^2-1=+\infty$ ، **لأنّ :** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}g(x)=+\infty$ .

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)\right]^2-1=+\infty$ ، **لأنّ :** $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ .

3) أ) **حساب** $f'(x)$ **من أجل كل عددي حقيقي من** $\left]1;+\infty\right[$ **:** (**نستعمل الشكل :** $f(x)=\left[g(x)\right]^2-1$ )

$f'(x)=2\times g(x)\times g'(x)$ ، **و منه : إشارة** $f'(x)$ **من إشارة** $g(x)\times g'(x)$ .

| $x$ | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | | $-$ | |
| $g(x)\times g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

ب) **الدالة** $f$ **متناقصة على المجال** $\left]1;2\right]$ **، و متزايدة على المجال** $\left[2;+\infty\right[$ .

❖ **جدول التغيرات :**

| $x$ | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

4) **نقط تقاطع المنحنى** $(C_f)$ **مع حامل محور الفواصل :**

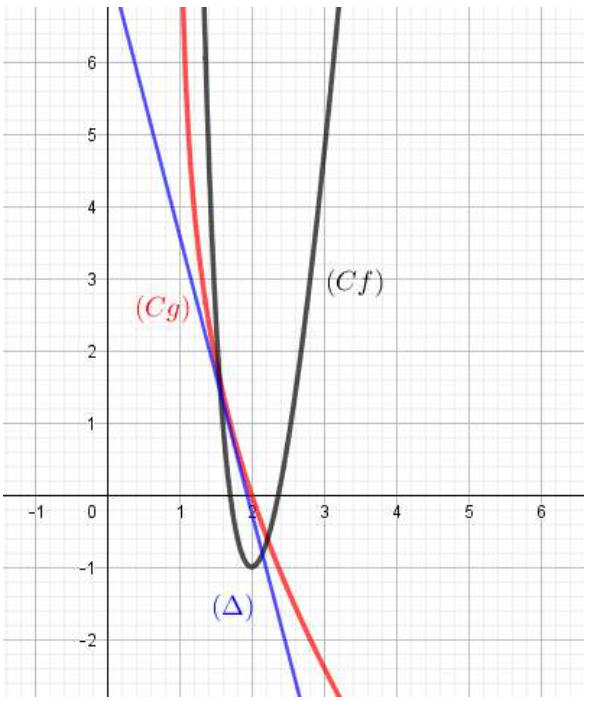
❖ **نحل المعادلة** $f(x)=0$ **، أي :** $\left[g(x)\right]^2-1=0$ **، أي :** $\left[g(x)\right]^2=1$ **، و منه :** $\begin{cases}g(x)=1\\g(x)=-1\end{cases}$

**و عليه :** $x=\alpha$ **، أو** $x=\beta$ . **إذن :** $(C_f)$ **يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين :** $A(\alpha;0)$ **و** $B(\beta;0)$ .

つづ

## مسائل المستوى الرابع ★★★★

❖) الإنشـاء :




5) لدينا : $h(x)=(\cos x+2\ln\cos x)(-2+\cos x+2\ln\cos x)$ .

أ) نلاحظ أنّ : $h(x)=f(1+\cos x)$ ، و منه : $h=f\circ u$ ، حيث : $u(x)=1+\cos x$ .

ب)

❖) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}} h(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}} f(1+\cos x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)=1\\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty\end{cases}$ .

❖) التفسير الهندسي : المنحني $(\Gamma)$ يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور التراتيب معادلته : $x=\frac{\pi}{2}$ .

❖) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة $h$ : لدينا $h(x)=f(1+\cos x)$ .

- من أجل كل $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ، يكون : $0<\cos x\leq 1$ ، أي : $1<1+\cos x\leq 2$ ، ومنه : $1+\cos x\in\left]1;2\right]$

و الدالة $f$ متناقصة على $\left]1;2\right]$ .

- و من جهة أخرى لدينا الدالة $x\mapsto 1+\cos x$ متناقصة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ .

و منه : الدالة $h$ متزايدة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ، و ذلك حسب مبرهنة إتجاه تغيّر دالة مركبة .

ج) جدول التغيرات للدالة $h$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ ‖ |

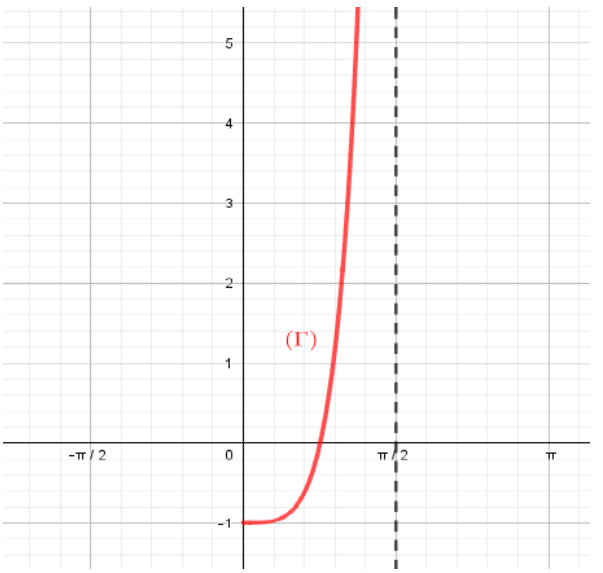
❖) $h(0)=f(1+\cos(0))$ ، أي :

$h(0)=f(2)=-1$

つづ

## مسائل المستوى الرابع ★★★★

❖) الإنشـاء :




### التمرين 04

استعد للبكالوريا مع توامي (توامي عمر)

**I- 1/ دراسة تغيرات الدالة $g$ :**

① مجموعة التعريف: لدينا $D_g = ]-\infty;+\infty[$ .

② حساب النـهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x - 1\right) = 0 - 1 = -1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^x - 1\right) = +\infty - 1 = +\infty$

③ اتجاه التغير: الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $g'(x) = e^x(x+1)$ .

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x+1)$ لأن $e^x$ دوما موجب إذن:

- إذا كان: $x \in ]-\infty;-1[$ فإن: $g'(x) < 0$ أي الدالة $g$ متناقصة تماماً .
- إذا كان: $x \in [-1;+\infty[$ فإن: $g'(x) \geq 0$ أي الدالة $g$ متزايدة تماماً .

④ جدول التغيرات: $g(-1) = -\dfrac{1}{e} - 1 \approx -1,37$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | | $+$ | | |
| $g(x)$ | $-1$ | ↘ | $g(-1)$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**2/ لنبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$:**

لدينا: $g(0,567) \approx -0,22$ وَ $g(0,568) \approx 0,0006$ منه: $g(0,567) \times g(0,568) < 0$

وَ $g$ دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0,567;0,568]$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث $0,567 < \alpha < 0,568$ .

**3/ استنتاج إشارة $g(x)$ :**

من جدول تغيرات الدالة $g$ نستنتج:

- إذا كان: $x \in ]-\infty;\alpha[$ فإن: $g(x) < 0$
- إذا كان: $x \in ]\alpha;+\infty[$ فإن: $g(x) > 0$ .

つづ

**II- 1/ إثبات أنه من أجل $x>0$ يكون لدينا :** $f(x)=x^2\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)^2$

نعلم أنه إذا كان: $x>0$ فإن: $x=|x|$ منه: $f(x)=\left(e^x-\ln x\right)^2=\left(x\times\frac{e^x-\ln x}{x}\right)^2$ إذن: $f(x)=x^2\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)^2$.

- استنتاج : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)^2=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

**2/ أ- لنبين أن المعادلة $e^x-\ln(-x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\beta$ :**

نعتبر الدالة $h$ المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $h(x)=e^x-\ln(-x)$

منه: $h'(x)=e^x-\frac{1}{x}>0$ أي الدالة $h$ مستمرة و رتيبة تماماً على المجال $]-\infty;0[$

و $h(-1,3)\approx 0,01$ ، $h(-1,4)\approx -0,08$ أي: $h(-1,4)\times h(-1,3)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيداً $\beta$ حيث $\beta\in]-1,4;-1,3[$.

ب- استنتاج حلول المتراجحتين :

⇦ لدينا من أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x>\ln(x)$ إذن مجموعة حلول المتراجحة هي: $S_1=]0;+\infty[$

⇦ وَ من أجل كل $x$ من المجال $]-\infty;0[$ ، $h$ دالة متزايدة تماماً وَ $h(\beta)=0$ وعليه مجموعة حلول المتراجحة $e^x<\ln(-x)$ هي: $S_2=]-\infty;\beta[$ وَ مجموعة حلول المتراجحة $e^x\geq\ln(-x)$ هي: $S_3=[\beta;0[$.

**3/ أ- لنبين أن :** $f'(x)=\frac{2}{x}\left(e^x-\ln|x|\right)g(x)$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ حيث: $f'(x)=2\left(e^x-\ln|x|\right)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)=2\left(e^x-\ln|x|\right)\left(\frac{xe^x-1}{x}\right)$

منه: $f'(x)=\frac{2}{x}\left(e^x-\ln|x|\right)g(x)$.

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :

الجدول المقابل يوضح إشارة $f'(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | $\beta$ | | $0$ | | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2}{x}$ | $-$ | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| $ex-\ln\lvert x\rvert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $-$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

⊂ إذا كان: $x\in]-\infty;\beta]\cup]0;\alpha]$ فإن: $f'(x)\leq 0$ أي الدالة $f$ متناقصة .

⊂ إذا كان: $x\in[\beta,0[\cup[\alpha;+\infty[$ فإن: $f'(x)\geq 0$ أي الدالة $f$ متزايدة .

**4/ لنبين أن :** $f(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)^2$

لدينا: $f(x)=\left(e^x-\ln|x|\right)^2$ منه: $f(\alpha)=\left(e^\alpha-\ln\alpha\right)^2$ ...(1)

وَ حسب الجزء الأول لدينا: $g(\alpha)=0$ معناه: $\alpha e^\alpha-1=0$ تكافئ: ( $e^\alpha=\frac{1}{\alpha}$ وَ $\alpha=-\ln\alpha$ ) ...(2)

نعوض (2) في (1) نجد: $f(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)^2$.

つづ

- تعيين حصراً للعدد $f(\alpha)$ سعته $10^{-2}$ :

لدينا: $0,567 < \alpha < 0,568$ منه: $\frac{1}{0,568} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0,567}$ و منه: $1,761 < \frac{1}{\alpha} < 1,764$

و منه: $1,761 + 0,567 < \frac{1}{\alpha} + \alpha < 1,764 + 0,568$ أي: $2,328 < \frac{1}{\alpha} + \alpha < 2,331$ بالتربيع نجد: $5,42 < f(\alpha) < 5,43$ .

**5/ جدول تغيرات الدالة $f$ :**

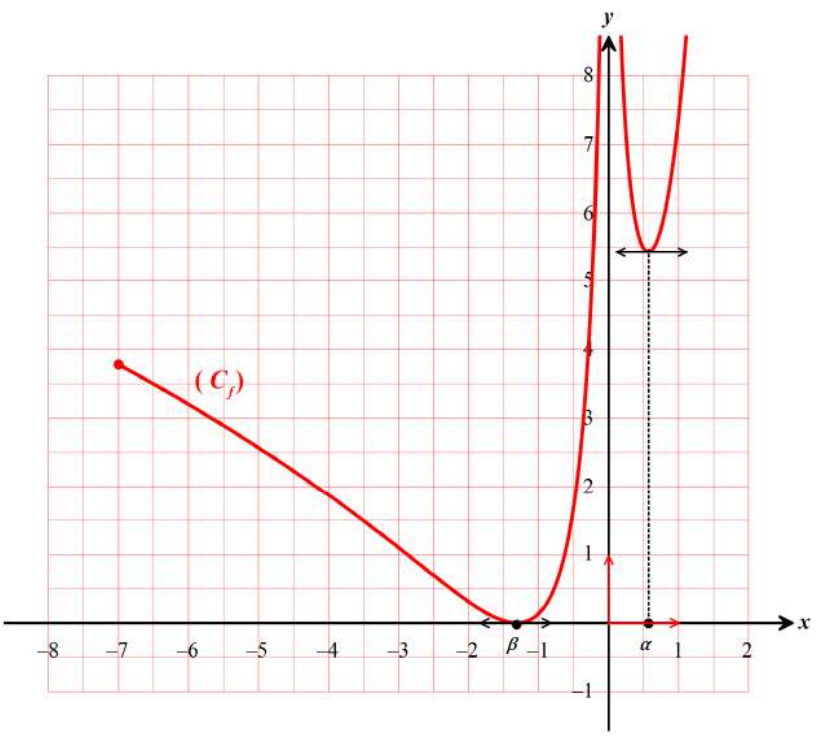
| $x$ | $-\infty$ | | $\beta$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\beta)=0$ | ↗ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**6/ المناقشة البيانية :**

لدينا: $e^x - \ln|x| - \sqrt{m} = 0$ تكافئ: $e^x - \ln|x| = \sqrt{m}$ بالتربيع الطرفين نجد: $\begin{cases} m = f(x) \\ e^x > \ln|x| \end{cases}$ أي: $\begin{cases} m = f(x) \\ x \in [\beta;0[ \cup ]0;+\infty[ \end{cases}$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل.

- إذا كان: $m \in ]-\infty;0[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .
- إذا كان: $m = 0$ فإن المعادلة تقبل حل مضاعف سالب وهو $\beta$ .
- إذا كان: $m \in ]0;f(\alpha)[$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد سالب .
- إذا كان: $m = f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب و الأخر مضاعف موجب و هو $\alpha$ .
- إذا كان: $m \in ]f(\alpha);+\infty[$ فإن المعادلة تقبل ثلاث حلول، اثنان موجبان و الأخر سالب.



التمرين 05

الموضوع المقترح الرابع عشر (مصطفاي عبد العزيز)

**I-** الدّالة $g$ معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^x$.

**1- دراسة تغيّرات الدالة $g$.**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty} xe^x-e^x=0$$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

الدالة $g$ تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي $x$:

$$g'(x)=e^x+e^x(x-1)=xe^x$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي، $e^x>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $x$ على $\mathbb{R}$.

من أجل $x\in]-\infty;0[$، $g'(x)<0$

من أجل $x\in]0;+\infty[$، $g'(x)>0$ و $g'(0)=0$

إذن الدالة $g$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

**جدول تغيرات الدالة $g$.**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

**2- تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$: $(x-1)e^x+1\geq 0$.**

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x$، $g(x)\geq -1$ معناه $(x-1)e^x\geq -1$ أي $(x-1)e^x+1\geq 0$

**II-** الدّالة $f$ معرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-1}{x};x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

**1- أ - تبيين أنّ $f$ مستمرة على $[0;+\infty[$.**

لدينا الدالة $x\mapsto e^x-1$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ والدالة $x\mapsto x$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ وهي لاتنعدم على هذا المجال إذن حاصل قسمتهما يكون دالة مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ أي الدالة $f$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$.

ولدينا $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{e^x-1}{x}=1=f(0)$ ومنه الدالة $f$ مستمرة على يمين 0.

وبالتالي الدالة $f$ مستمرة على $[0;+\infty[$.

**ب - حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}=+\infty$$

ↄↄ

**2- أ ـ التحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0;+\infty[$ :** $f'(x)=\dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}$.

ليكن $x\in]0;+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$$

**ب ـ استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$.**

لدينا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$، $(x-1)e^x+1>0$ و $x^2>0$ إذن من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ :

$f'(x)>0$ وبالتالي الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ .

**جدول تغيّرات الدالة $f$.**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $+\infty$ |

**III -** $n$ عدد طبيعي حيث $n\geq 1$ ؛ $f_n$ الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x$.

و $(C_n)$ منحاها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1- دراسة اتجاه تغيّر الدالة $f_n$ على $]0;+\infty[$ .**

الدالة $f_n$ هي مجموع دالتين متزايدتين تماما على المجال $]0;+\infty[$ ( الدالة $f$ والدالة $x\mapsto n\ln x$ )

إذن الدالة $f_n$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ .

**2- حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ .**

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f_n(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{e^x-1}{x}+n\ln x=-\infty$$ لأنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} n\ln x=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}+n\ln x=+\infty$$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} n\ln x=+\infty$

**3- دراسة الوضع النسبي للمنحنيين $(C_n)$ و $(C_{n+1})$.**

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{e^x-1}{x}+(n+1)\ln x-\left[\frac{e^x-1}{x}+n\ln x\right]=n\ln x+\ln x-\ln x=\ln x$$

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=0$ تعني $\ln x=0$ أي $x=1$

$f_{n+1}(x)-f_n(x)>0$ تعني $\ln x>0$ أي $x>1$

$f_{n+1}(x)-f_n(x)<0$ تعني $\ln x<0$ أي $0<x<1$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضعية النسبية | $(C_n)$ تحت $(C_{n+1})$ | | | $(C_n)$ فوق $(C_{n+1})$ | |

$(C_{n+1})$ و $(C_n)$ يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(1;e-1)$.

**4- تبيين أنّ جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة $B$ يطلب تعيين إحداثيتيها.**

من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $f(1)=e-1$ وعليه $B(1;e-1)$.

つづ

**5- أ ـ تبيين انه، يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_1$ من $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$.**

الدالة $f_1$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0,3;0,4]$ و $f_1(0.3)\approx -0.03$ ، $f_1(0.4)\approx 0.31$ أي $f_1(0.3)\times f_1(0.4)<0$ إذن حسب مبرهنة القيّم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_1$ من المجال $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$.

**ب ـ تبيين أنّه، من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 1$ فإنّ: $f_n(\alpha_1)<0$.**

$$f_n(\alpha_1)-f_1(\alpha_1)=\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}+n\ln\alpha_1-\left[\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}+\ln\alpha_1\right]=n\ln\alpha_1-\ln\alpha_1=(n-1)\ln\alpha_1$$

لكن $f_1(\alpha_1)=0$ ومنه $f_n(\alpha_1)=(n-1)\ln\alpha_1$

لدينا من أجل كل $n>1$ ، $n-1>0$ وبما أنّ $0<\alpha_1<1$ فإنّ $\ln\alpha_1<0$ إذن $(n-1)\ln\alpha_1<0$ أي $f_n(\alpha_1)<0$. ( يمكن استعمال عدة طرق ).

**تبيين أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n$ من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.**

الدالة $f_n$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وبالخصوص على $[\alpha_1;1]$ و $f_n(1)=e-1$

ولدينا $f_n(\alpha_1)<0$ إذن $f_n(1)\times f_n(\alpha_1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n$ من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.

**6- أ ـ تبيين أنّه، من أجل كل $x$ من $]0;1]$ : $\frac{e^x-1}{x}\leq e-1$.**

لدينا الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ إذن من أجل كل $x\in]0;1]$ لدينا $f(x)\leq f(1)$

ومنه $f(x)\leq e-1$ أي $\frac{e^x-1}{x}\leq e-1$.

**ب ـ استنتاج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 1$ : $\ln(\alpha_n)\geq\frac{1-e}{n}$ ، ثمّ $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$.**

لدينا $\alpha_n\in]0;1]$ ومنه $\frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n}\leq e-1$

ولدينا $f_n(\alpha_n)=0$ معناه $\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}+n\ln\alpha_1=0$ ومنه $\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}=-n\ln\alpha_1$

إذن $-n\ln\alpha_1\leq e-1$ وتكافئ $\ln\alpha_1\geq\frac{1-e}{n}$ وبالتالي $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

**جـ ـ إيجاد نهاية المتتالية $(\alpha_n)$.**

لدينا $e^{\frac{1-e}{n}}\leq\alpha_n\leq 1$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1-e}{n}}=1$ إذن حسب النهايات بالمقارنة نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=1$.

## مسائل المستوى الخامس ★★★★★

**التمرين 01**

مجلة Top Maths في الدوال الوسيطية والمدمجة (بوشناق يوسف)

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $\alpha$، نعتبر الدالة $f_\alpha$ المعرفة على المجال $\left]-\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ بـ:

$f_\alpha(x)=\ln(\alpha x+1)-\alpha x$.

$(\mathcal{C}_\alpha)$ المنحنى الممثل للدالة $f_\alpha$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**الجزء الأول:**

**1.** ادرس اتجاه تغير الدالة $f_\alpha$.

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ وليكن $x\in\left]-\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$: $f'_\alpha(x)=\frac{\alpha}{\alpha x+1}-\alpha=\frac{-\alpha^2 x}{\alpha x+1}$.

لدينا من أجل كل $x\in\left]-\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$، $\alpha x+1>0$ ومنه: $f'_\alpha(x)=0$ معناه $x=0$؛ $f'_\alpha(x)<0$ معناه $x\in\left]-\frac{1}{\alpha};0\right[$ وعليه فالدالة $f_\alpha$ متزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{1}{\alpha};0\right]$ و$f'_\alpha(x)>0$ معناه $x\in]0;+\infty[$؛ ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

**2.** استنتج أنه من أجل كل عدد $x$ موجب تماما يكون: $\ln(\alpha x+1)<\alpha x$.

الدالة $f_\alpha$ متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومنه إذا كان $x>0$ فإن $f_\alpha(x)<f_\alpha(0)$ أي $\ln(\alpha x+1)-\alpha x<0$ ومعناه $\ln(\alpha x+1)<\alpha x$ إذا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$، $\ln(\alpha x+1)<\alpha x$.

**3.** بيّن أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_\alpha)$ تتقاطع في نقطة يُطلب تحديد إحداثييها.

لدينا من أجل كل $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$، $f_\alpha(0)=0$ ومنه: من أجل كل $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$، $O\in(\mathcal{C}_\alpha)$.

**الجزء الثاني:**

**1.** باستعمال السؤال **2.** من الجزء الأول، بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $\beta$ يكون:

$\ln(1+\beta)-\ln\beta<\frac{1}{\beta}$.

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ وليكن $x\in\mathbb{R}_+^*$ حيث $\alpha x=\frac{1}{\beta}$؛ لدينا $\ln(1+\beta)-\ln\beta=\ln\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)=\ln\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$ معناه $\ln(1+\beta)-\ln\beta=\ln(\alpha x+1)$ وباستعمال السؤال **2.** من الجزء الأول، يكون $\ln(1+\beta)-\ln\beta<\alpha x$ أي

$\ln(1+\beta)-\ln\beta<\frac{1}{\beta}$.

**2.** استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

$\ln 2-\ln 1<\frac{1}{1}$؛ $\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}$؛ $\ln 4-\ln 3<\frac{1}{3}$؛ ...؛ $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$ بجمع طرف إلى طرف نحصل على

$\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

يتبع

**3.** استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1+n)=+\infty$

إذا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$.

**4.أ** عيّن إحداثيي النقطة $\omega$ التي يكون عندها معامل توجيه المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_1)$ يساوي 1.

معامل توجيه المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_1)$ يساوي 1 يكافئ $f'_1(x)=1$ وتكافئ $\frac{-x}{x+1}=1$ معناه $-x=x+1$ أي

$x=-\frac{1}{2}$

ومنه $f_1\left(-\frac{1}{2}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\ln 2$ إذا $\omega\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\ln 2\right)$.

**ب-** اكتب معادلة للمماس $(\Delta)$ للمنحنى $(\mathcal{C}_1)$ عند النقطة $\omega$؛ ثمّ أنشئ المماس والمنحنى $(\mathcal{C}_1)$.

$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-\ln 2$ أي $y=x+1-\ln 2$.

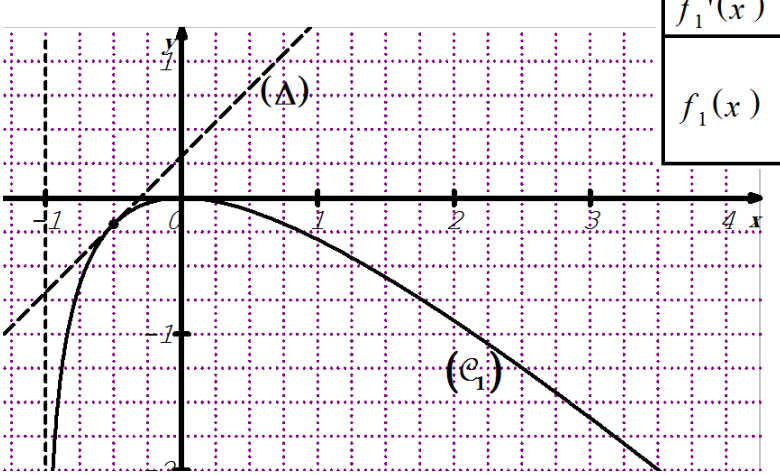
**5.أ-** احسب كلا من $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)$؛ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة $f_1$؛

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f_1(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}[\ln(x+1)-x]=-\infty$؛

$\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x+1)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{\ln(x+1)}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right]=-\infty$ لأن

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x}{x+1}=-1$.

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_1(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |




**ب-** أرسم $(\Delta)$ ثمّ المنحنى $(\mathcal{C}_1)$.

**الجزء الثالث:** لتكن $g$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\ln(1+|x|)-|x|$. $(\mathcal{C}_g)$ منحنها الممثل في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1.** ادرس قابلية اشتقاق الدالة $g$ عند الصفر.

لدينا $g(0)=0$ ؛ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$، $g(x)=\ln(1+x)-x$ ومن أجل كل $x\in]-\infty;0[$،
$g(x)=\ln(1-x)+x$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln(1+x)-x}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln(1+x)}{x}-1=0$$ ؛

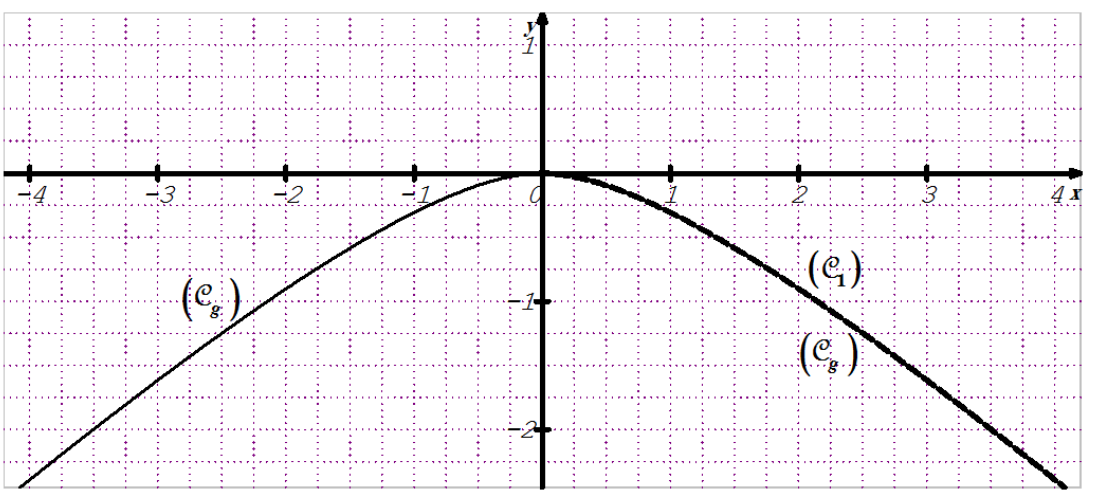
$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\ln(1-x)+x}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\ln(1-x)}{x}+1=0$$ ؛

لدينا إذا $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$ ومنه الدالة $g$ تقبل الاشتقاق عند الصفر.

**2.** بيّن كيف يمكن إنشاء $(\mathcal{C}_g)$ اعتمادا على $(\mathcal{C}_1)$؛ ثمّ أرسم $(\mathcal{C}_g)$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $-x\in\mathbb{R}$ و $g(-x)=\ln(1+|-x|)-|-x|=\ln(1+|x|)-|x|=g(x)$ إذا الدالة $g$ زوجية وبما أن المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ متعامد فإن المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ يكون متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

لدينا من أجل كل $x\in[0;+\infty[$، $g(x)=\ln(1+x)-x=f_1(x)$ إذا $(\mathcal{C}_g)$ ينطبق على $(\mathcal{C}_1)$ في المجال $[0;+\infty[$ أما في المجال $]-\infty;0[$، يرسم $(\mathcal{C}_g)$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.



## مسائل المستوى الخامس ★★★★★

التمرين 02

كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

لدينا من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f_m(x)=\frac{x^2-1}{2}-m\ln x$ .

1) حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2}-m\ln x-\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}\left(1-2m\frac{\ln x}{x^2}\right)-\frac{1}{2}=+\infty$ .

لأن : $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}=+\infty\right)$ و $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0\right)$ . ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=+\infty$ .

2) حساب : $\lim\limits_{x\to0} f_m(x)$ : (حسب قيم $m$) : لدينا : $\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{2}=-\frac{1}{2}\right)$ و $\left(\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty\right)$ .

ومنه : أ – إذا كان : $m<0$ : $\lim\limits_{x\to0} f_m(x)=-\infty$ .

ب – إذا كان : $m=0$ : $\lim\limits_{x\to0} f_m(x)=-\frac{1}{2}$ .

ج – إذا كان : $m>0$ : $\lim\limits_{x\to0} f_m(x)=+\infty$ .

3) الدالة $f_m$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي : $f_m'(x)=x-\frac{m}{x}=\frac{x^2-m}{x}$ .

- عند استنتاج جدول التغيرات للدالة $f_m$ نميز ثلاث حالات :

أ- حالة $m<0$ : من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f_m'(x)>0$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f_m'(x)$ | $+$ | |
| $f_m(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

ب – حالة $m=0$ : من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f_0(x)=\frac{x^2-1}{2}$ ، و $f_0'(x)=x$ . ومنه :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f_m'(x)$ | $+$ | |
| $f_m(x)$ | $-\frac{1}{2}$ ↗ | $+\infty$ |

ج – حالة $m>0$ : من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : إشارة $f_m'(x)$ من إشارة : $x^2-m$ أي : $\begin{cases}x=\sqrt{m}\\x=-\sqrt{m}\end{cases}$

つづ

و عليه :

| $x$ | $0$ | $\sqrt{m}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_m'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f_m(x)$ | $+\infty$ ↘ | $f_m(\sqrt{m})$ | ↗ $+\infty$ |

4) إثبات وجود منحني وحيد $(C_m)$ يشمل النقطة $M_0$ :

لدينا : النقطة $M_0(x_0;y_0)$ حيث : $x_0 \succ 0$ ، ومنه $f_m$ معرفة عند $x_0$ ، ولدينا من جهة أخرى المنحني $(C_m)$ يشمل النقطة $M_0(x_0;y_0)$ أي : $f_m(x_0)=y_0$ . و عليه : $\frac{{x_0}^2-1}{2}-m\ln x_0=y_0$ أي : $(\ln x_0)m=\frac{{x_0}^2-1}{2}-y_0$

أي : $(\ln x_0)m=\frac{{x_0}^2-1-2y_0}{2}$ ، و عليه : $m=\frac{{x_0}^2-1-2y_0}{2\ln x_0}$ . ومنه يوجد حل وحيد هو : $\frac{{x_0}^2-1-2y_0}{2\ln x_0}$ .

إذن نستنتج أنه يوجد منحني وحيد $(C_m)$ يشمل النقطة $M_0$ .

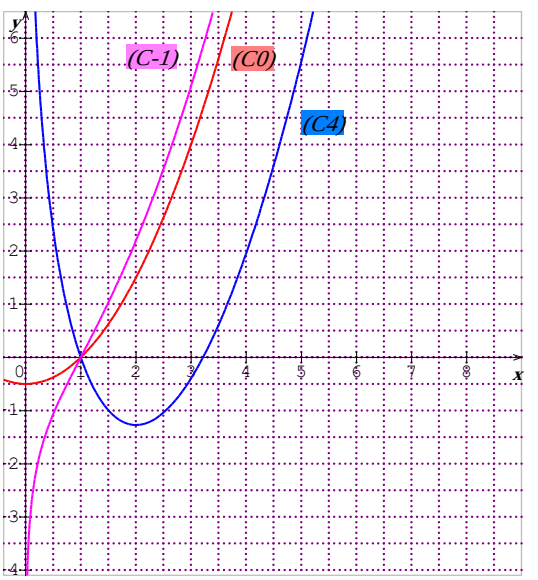
5) إثبات أن جميع المنحنيات $(C_m)$ تشمل نقطة ثابتة $A$ مع تعيين إحداثياها :

ط1) جميع المنحنيات $(C_m)$ تشمل نقطة ثابتة معناه : $f_m(x_0)=y_0$ أي : $y_0=\frac{{x_0}^2-1}{2}-m\ln x_0$ أي :

$m\ln x_0+y_0-\frac{{x_0}^2-1}{2}=0$ معناه : $\begin{cases}\ln x_0=0\\ y_0-\frac{{x_0}^2-1}{2}=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x_0=1\\ y_0=0\end{cases}$ ومنه جميع المنحنيات $(C_m)$ تشمل $A(1;0)$

أو كحالة خاصة : أي أن إحداثيات النقطة $A$ لا تتعلق بـ $m$ أي : ( نعدم الذي هو مضروب في $m$ في العبارة ) ، (نعلم أن : $\ln(1)=0$ ) . أي : نضع $x=1$ و منه : $f_m(1)=0$ ، إذن : كل المنحنيات $(C_m)$ تشمل النقطة $A(1;0)$ .

6) رسم كلا من : $(C_0)$ و $(C_4)$ ، $(C_{-1})$ : باستعمال مبرهن (sine qua non ):



التمرين 03

مجلة Top Maths في الدوال الوسيطية والمدمجة (بوشناق يوسف)

لدينا من أجل $x\in]0;+\infty[$ : $f_k(x)=x(\ln x)^2+kx$ .

I) من أجل $k=0$ يكون : $f_0(x)=x(\ln x)^2$ .

1) حساب نهايات الدالة $f_0$ :

*) نضع : $\begin{cases}\sqrt{x}=X\\ x=X^2\end{cases}$ أي : $\begin{matrix}x\to 0\\ X\to 0\end{matrix}$ و منه :

$$\lim_{x\to 0} f_0(x)=\lim_{x\to 0}\left[x(\ln x)^2\right]=\lim_{X\to 0}\left[X^2(\ln X^2)^2\right]=\lim_{X\to 0}\left[(X\ln X^2)^2\right]$$

أي يكون : $\lim_{x\to 0} f_0(x)=\lim_{X\to 0}\left[\left(2\underbrace{X\ln X}_{0}\right)^2\right]=0$ ، إذن : $\boxed{\lim_{x\to 0} f_0(x)=0}$ .

*) $\lim_{x\to+\infty} f_0(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x(\ln x)^2\right]=+\infty$ ، إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_0(x)=+\infty}$ .

2) دراسة إتجاه تغير الدالة $f_0$ :

*) الدالة $f_0$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و عبارة دالتها المشتقة هي : $f_0'(x)=1\times(\ln x)^2+2\ln x\times\frac{1}{x}\times x$

أي : $f_0'(x)=(\ln x)^2+2\ln x$ و منه : $f_0'(x)=\ln x(\ln x+2)$ .

نضع : $f_0'(x)=0$ معناه : $\ln x=0$ أو $\ln x+2=0$ أي : $x=1$ أو $x=e^{-2}$ .

*) نلخص إتجاه تغير الدالة $f_0$ في جدول تغيراتها :

| $x$ | $0$ | | $e-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_0'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_0(x)$ | ‖ $0$ | ↗ | $4e-2$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

لدينا : $\begin{cases}f_0(e^{-2})=4e^{-2}\\ f_0(1)=0\end{cases}$

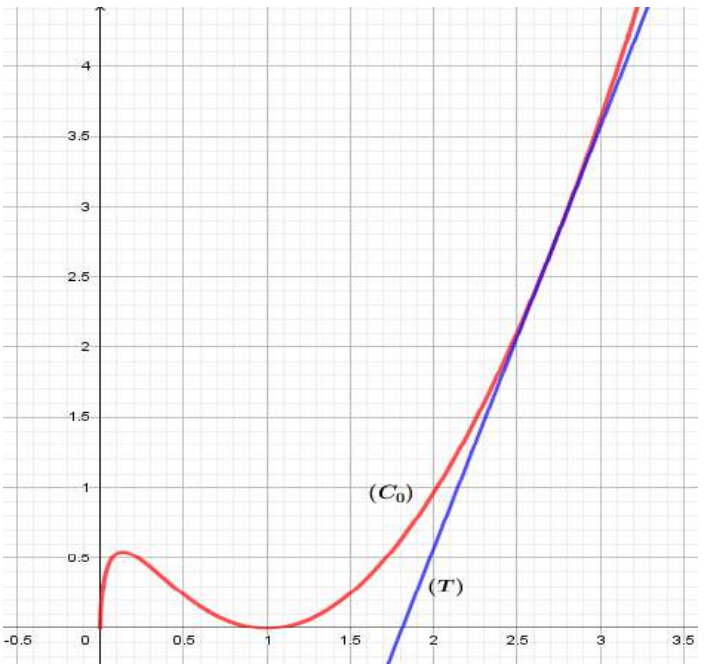
3) كتابة معادلة المماس $(T)$ :

لدينا : $(T):y=f_0'(e)(x-e)+f_0(e)$ أي : $(T):y=3(x-e)+e$ ، لأن : $\begin{cases}f_0'(e)=3\\ f_0(e)=e\end{cases}$ .

و منه : $\boxed{(T):y=3x-2e}$ .

つづ

4) الإنشـاء :




II) نعتبر $k$ عدد حقيقي كيفي أي : $f_k(x)=x(\ln x)^2+kx$ .

1) حساب نهايات الدالة $f_k$ :

*) $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[x(\ln x)^2+kx\right]=0$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to 0} x(\ln x)^2=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} kx=0$ .

*) النهاية عند $+\infty$ نميز حالتين :

- لما $k>0$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x(\ln x)^2+kx\right]=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln x)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} kx=+\infty$ .

- لما $k<0$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x(\ln x)^2+kx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[(\ln x)^2+k\right]=+\infty$ .

2) لنحسب $f_k'(x)$ :

الدالة $f_k'$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و عبارة دالتها المشتقة هي : $f_k'(x)=(\ln x)^2+2\ln x+k$ .

*) نضع : $\ln x=t$ أي تصبح : $t^2+2t+k$ لندرس إشارة هذا الأخير و ذلك حسب قيم $k$ . لدينا : $\boxed{\Delta_k=4-4k}$

- **حالة** $\Delta_k=0$ : $k=1$ و منه المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو $t_0=\frac{-2}{2}=-1$ أي : $\ln x=-1$ و منه : $\boxed{x=e^{-1}}$ .

إذن : إشارة كثير الحدود من إشارة المعامل $a$ و بالتالي تكون : $f_k'(x)\geq 0$ .

أي جدول التغيرات في هذه الحالة يكون :

| $x$ | $0$ | | $e^{-1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f_1(x)$ | ‖ $0$ | ↗ | $2e^{-1}$ | ↗ | $+\infty$ |

**ملاحظة** : النقطة ذات الفاصلة $e^{-1}$ هي نقطة الإنعطاف للمنحنى $(C_1)$ .

つづ

- **حالة** $\Delta_k > 0$ : يكون $k<1$ و منه المعادلة تقبل حلان هما : $t_1 = \dfrac{-2-\sqrt{4-4k}}{2} = -1-\sqrt{1-k}$ و $t_2 = -1+\sqrt{1-k}$

أي : $\ln x = -1-\sqrt{1-k}$ و $\ln x = -1+\sqrt{1-k}$ و منه : $\boxed{x_1 = e^{-1-\sqrt{1-k}}}$ و $\boxed{x_2 = e^{-1+\sqrt{1-k}}}$ .

و بالتالي جدول التغيرات للدالة $f_k$ في هذه الحالة يكون :

| $x$ | $0$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'_k(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_k(x)$ | ‖ $0$ | ↗ | $f_k(x_1)$ | ↘ | $f_k(x_2)$ | ↗ | $+\infty$ |

- **حالة** $\Delta_k < 0$ : يكون $k>1$ و منه إشارة كثير الحدود من إشارة المعامل $a$ و بالتالي تكون : $f'_k(x)>0$ .

أي جدول التغيرات في هذه الحالة يكون :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'_k(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f_k(x)$ | ‖ $0$ | ↗ | $+\infty$ |

3) لدينا المماس $(T_k)$ عند النقطة $A_k$ ذات الفاصلة 1 أي :

$(T_k): y = f'_k(1)(x-1)+f_k(x)$ أي : $(T_k): y = k(x-1)+k$ ، لأن : $\begin{cases} f'_k(1)=k \\ f_k(1)=k \end{cases}$

و منه يكون : $\boxed{(T_k): y = kx}$ و بالتالي المماس $(T_k)$ يمر بالمبدأ $O$ أي أن $(T_k)$ هو المستقيم $(OA_k)$ .

4) دراسة وضعية المنحني $(C_k)$ بالنسبة لـ $(C_{k'})$ :

لندرس إشارة الفرق : $f_k(x)-f_{k'}(x) = kx-k'x$ و منه : $f_k(x)-f_{k'}(x) = (k-k')x$ .

*) بما أن $x>0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $(k-k')$ و بالتالي الوضع النسبي للمنحنيين $(C_k)$ و $(C_{k'})$ متعلقة بإشارة $(k-k')$ أي بمقارنة العددين $k$ و $k'$ .

*) الوضع النسبي للمنحنيين $(C_{-2})$ و $(C_{-3})$ :

لدينا : $-3<-2$ إذن حسب الدراسة السابقة فإن : المنحني $(C_{-3})$ يقع تحت المنحني $(C_{-2})$ .

5) لدينا : $\begin{cases} g_k(x) = f_k(x) \ ; \ x>0 \\ g_k(0)=0 \end{cases}$

لنحسب : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g_k(x)-g_k(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\ln x)^2+kx}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[(\ln x)^2+k\right] = +\infty$ .

*) **تفسير النتيجة** : الدالة $g_k$ لا تقبل الإشتقاق عند 0 و المنحني $(C_{g_k})$ يقبل نصف مماس موازي لحامل محور التراتيب

التمرين 04

كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

لدينا : $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$ .

1) لدينا : $h_n(x) = n\ln(1+x) + \dfrac{x}{x+1}$ .

أ) دراسة إتجاه تغيّر الدالة $h_n$ :

❖ لنحسب $h_n'(x)$ : $h_n'(x) = n \times \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2}$ ، و منه : $h_n'(x) = \dfrac{n}{1+x} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$ .

نلاحظ أنّه من أجل كل $x \in ]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ تكون : $h_n'(x) > 0$ .

إذن الدالة $h_n$ متزايدة تماماً على $]-1;+\infty[$ .

ب) $h_n(0) = 0$ ، إذن : نلخص إشارة $h_n(x)$ في الجدول التالي :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h_n(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

2) أ) $f_1(x) = x.\ln(1+x)$ و $h_1(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x}{x+1}$ .

❖ حساب $f_1'(x)$ : $f_1'(x) = \ln(1+x) + \dfrac{1}{1+x} \times x = \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$ ، و منه : $f_1'(x) = h_1'(x)$ .

❖ حساب $f_n'(x)$ : $f_n'(x) = n.x^{n-1} \times \ln(1+x) + \dfrac{1}{1+x} \times x^n$ ، نعلم أنّ : $x^n = x \times x^{n-1}$ ، أي تصبح :

$f_n'(x) = x^{n-1}\left[n\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}\right]$ ، و منه : $f_n'(x) = x^{n-1} \times h_n(x)$ . و هو المطلوب

ب) في حالة $n$ فردي يكون : $(n-1)$ زوجياً ، و منه يكون : $x^{n-1} \geq 0$ ،

و بالتالي تكون إشارة $f_n'(x)$ من إشارة $h_n(x)$ .

❖ جدول التغيّرات في حالة $n$ فردي :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f_n(x) = +\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} (x^n) = -1 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \ln(1+x) = -\infty \end{cases}$ .

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x^n) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{cases}$ .

يتبع

ج) في حالة $n$ زوجي يكون : $(n-1)$ فردياً ، أي إشارة $x^{n-1}$ تكون كما يلي :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^{n-1}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

و بالتالي :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^{n-1}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h_n(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

❖) جدول التغيّرات في حالة $n$ زوجي :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $-\infty$ | ↗ | | ↗ | $+\infty$ |

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f_n(x) = -\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} (x^n) = 1 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \ln(1+x) = -\infty \end{cases}$ .

❖) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x^n) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{cases}$ .

3) أ) دراسة وضعية المنحنيين $(C_1)$ وَ $(C_2)$ :

أي ندرس إشارة الفرق : $f_1(x) - f_2(x)$ ، حيث : $f_1(x) = x\ln(1+x)$ وَ $f_2(x) = x^2\ln(1+x)$ .

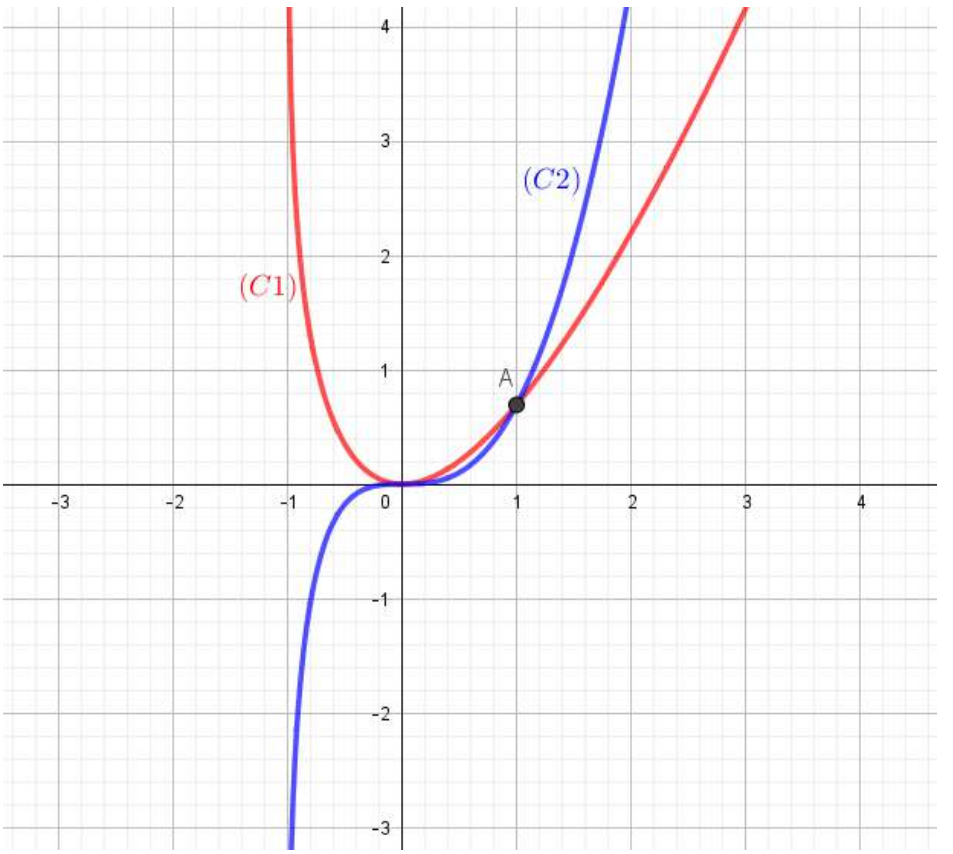
❖) $f_1(x) - f_2(x) = x\ln(1+x) - x^2\ln(1+x)$ ، و منه : $f_1(x) - f_2(x) = x\ln(1+x)(1-x)$ .

توضيح : ( أخرجنا $(x\ln(1+x))$ كعامل مشترك) . إذن الوضعية تكون كما يلي :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\ln(1+x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $1-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_1(x) - f_2(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضعية | | $(C_2)$ يقع فوق $(C_1)$ | $(C_1)$ يمس $(C_1)$ في النقطة $O(0,0)$ | $(C_2)$ يقع فوق $(C_1)$ | $(C_1)$ يقطع $(C_1)$ في النقطة $A(1;\ln 2)$ | $(C_2)$ يقع تحت $(C_1)$ | |

يتبع

ب) الإنشـــــــاء :




التمرين 05

تمارين مهمة للأساتذة لتعميق المفاهيم (قليل مصطفى)

الجزء الأول : $f(x)=1+x\ln x$

(1)(أ) من اجل $x$ من $[1;2]$ فان $\ln x>0$ ومنه $1+x\ln x\succ 0$ اذن الدالة $f$ موجبة على $[1;2]$

(ب) $M(1;1)$ و $N(2;1+2\ln 2)$ ومنه معامل توجيه $(MN)$ هو $\dfrac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\dfrac{-2\ln 2}{-1}=2\ln 2$

(ج) نشتق الدالة $f$ نجد $f'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$ . يكون المماس موازيا للمستقيم $(MN)$ معناه لهما نفس معامل التوجيه أي : $f'(x_0)=2\ln 2$ أي $\ln x+1=2\ln 2$ اذن $\ln x=-1+2\ln 2$ ومنه $x=e^{2\ln 2-1}=\dfrac{1}{e}\left(e^{\ln 2}\right)^2=\dfrac{4}{e}$

اذن النقطة $E$ هي الوحيدة من $(C)$ التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم $(MN)$

(د) معادلة $(T)$ المماس عند النقطة $E$ :

$$y=2\ln 2\left(x-\frac{4}{e}\right)+\left(1+\frac{4}{e}\ln\left(\frac{4}{e}\right)\right)=(2\ln 2)x-2\ln 2\times\frac{4}{e}+1+\frac{4}{e}\ln 4-\frac{4}{e}=(2\ln 2)x+1-\frac{4}{e}$$

つづ

(2) $g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1\right]$

(أ) مشتقة الدالة $g$ : $g'(x)=f'(x)-2\ln 2=1+\ln x-\ln 4=1+\ln\frac{x}{4}$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة $g$ على $[1;2]$ :

$g'(x)\geq 0$ تعني $1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)\geq 0$ أي $\ln\frac{x}{4}\geq -1$ ومنه $\frac{x}{4}\geq e^{-1}$ اذن $x\geq\frac{4}{e}$

اذن من اجل $x=\frac{4}{e}=1,47$ تنعدم الدالة $g$ ومتزايدة من اجل $x\geq\frac{4}{e}$ ومتناقصة من اجل $x\leq\frac{4}{e}$

ومنه جدول تغيرات $g$ : $g(\frac{4}{e})=0$

| $x$ | 0 | | 1 | | $4e^{-1}$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | | ↘ | 0 | ↗ | | ↗ | |

من جدول التغيرات على المجال $[1;2]$ والقيمة 0 هي قيمة حدية صغرى للدالة $g$ عند $x=\frac{4}{e}$ اذن $g(x)\geq 0$

ومنه نستنتج ان وضعية $(C)$ هي فوق $(T)$ على هذا المجال

(3) $M'$ و $N'$ نقطتان من $(T)$ فاصلتاهما 1 و 2 على الترتيب . $(C)$ تحت المستقيم $(MN)$ على $[1;2]$

(أ) حساب مساحة شبه المنحرف $MNQP$ :

ترتيبا النقطتين $M'$ و $N'$ هما :

$y_{M'}=(2\ln 2)+1-\frac{4}{e}$ و $y_{N'}=(4\ln 2)+1-\frac{4}{e}$

اذن مساحة $MNQP$ هي $\frac{(PM+QN)}{2}\times PQ=\frac{(y_M+y_N)}{2}\times 1=1+\ln 2\approx 1,693$

ومساحة $M'N'QP$ هي : $\frac{(PM'+QN')}{2}\times PQ=\frac{(y_{M'}+y_{N'})}{2}\times 1=3\ln 2+1-\frac{4}{e}\approx 1,608$

(ب) استنتاج حصر للمساحة $A$ : المساحة محصورة بين هذين العددين $A\approx 1,6$

<u>الجزء الثاني</u> :

(1) نستعمل مكاملة بالتجزئة لحساب $\int_1^2 x\ln x\,dx$

ونضع : $u'(x)=x$ و $v(x)=\ln x$ ومنه $u(x)=\frac{1}{2}x^2$ و $v'(x)=\frac{1}{x}$

اذن $\int_1^2 x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}dx=2\ln 2-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}\approx 0,636$

(2) القيمة المضبوطة لـ $A$ :

$$A=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 1dx+\int_1^2 x\ln x\,dx=1+2\ln 2-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+2\ln 2\approx 1,636$$

つづ

## مسائل المستوى الخامس ★★★★★

