مجلة المفيد فى الرياضيات

للأستاذ بلجودي حمـــــــو

بكالوريا 2022 شعب علمية

1. النهايات و السلوك التقاربى

☜ تتضمن ما يلي :

- سلسلة -1- ملخص درس و تمرين لكل عنصر .
- سلسلة -2- تمارين .
- واجب النهايات .
- تمارين محلولة في نهايات دالة كثيرحدود .
- تمارين محلولة في نهايات دالة ناطقة .
- تمارين محلولة في النهايات بوسيط .
- تمارين محلولة في ازالة حالات عدم التعيين .
  - ☜ المرافق
  - ☜ التحليل
  - ☜ العدد المشتق
  - ☜ الاختزال
  - ☜ تبديل المتغير
- تمرين محلول في السلوك التقاربي(المستقيم المقارب المائل).

النهايـــــــــات و السلوك التقاربي -1- بكالوريا 2022

❖ بعض نهايات الدوال المرجعية:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

❖العمليات على النهايات: حالات التعيين و عدم التعيين :

l عدد حقيقي ، $(l+)$عدد حقيقي موجب تماما و $(l-)$عدد حقيقي سالب تماما:

حالات التعييـــن				حالات عدم التعيين
$(l+)\times+\infty=+\infty$	$(l+)\times-\infty=-\infty$	$(l-)\times+\infty=-\infty$	$(l-)\times-\infty=+\infty$	$\frac{0}{0}$
$(+\infty)\times+\infty=+$	$(-\infty)\times+\infty=-\infty$	$(+\infty)\times-\infty=-\infty$	$(-\infty)\times-\infty=+\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$
$l+\infty=+\infty$	$l-\infty=-\infty$	$+\infty+\infty=+\infty$	$-\infty-\infty=-\infty$	$+\infty-\infty$
$\frac{l}{\infty}=0$	$\frac{l}{0}=\infty$	$\frac{-\infty}{l-}=+\infty$, $\frac{-\infty}{l+}=-\infty$	$\frac{+\infty}{l-}=-\infty$, $\frac{+\infty}{l+}=+\infty$	$0\times\infty$

❖حساب نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ و عند $-\infty$:

لحساب النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود نحسب نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ $(-\infty)$.

تمرين-1- : احسب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$ في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x)=2x^3-2x^2+x+5$ •1	$f(x)=x^3+2x^2+x+5$ •2	$f(x)=-x^3-4x+2$ •3

❖نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ و عند $-\infty$: و عند عدد حقيقي a :

⇦لحساب النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة نحسب نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ $(-\infty)$.

⇦لحساب نهاية دالة ناطقة عند عدد حقيقي a نعوض قيمة a مباشرة في عبارة الدالة .

تمرين-2- : احسب النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة التعريف في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x)=\frac{2x^2+2x-1}{x-1}$,$\Re-\{1\}$ •1	$f(x)=\frac{x+1}{1-x}$;$\Re-\{1\}$ •2	$f(x)=\frac{x^2+1}{(x-2)^2}$,$\Re-\{2\}$ •3	$f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$,$\Re-\{-1;1\}$ •4

❖حساب نهاية دالة مركبة:

a ، b و c تمثل أعددا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f=v\circ u$ لحساب نهاية f عند a

$\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ ⇐ $\lim\limits_{x\to b} v(x)=c$ ⇐ نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$ ⇐

تمرين-3- : احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :

$\lim\limits_{x\to\ 1^+}\sqrt{\frac{3x+1}{x-1}}$ • 1	$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+2}$ • 2	$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi x+3}{x-1}\right)$ • 3

❖حساب النهايات بالمقارنة :

⇐ إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=l$ و كان $v(x)\le f(x)\le u(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

تمرين-4- :

f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=\frac{\cos(x)}{x}$

ند $+\infty$.

دى حمـــو

❖ طـــــرق إزالة حالة عدم التعيين : احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :

⇦ بالاختزال:	⇦باستعمال التحليل:	⇦باستعمال المرافق:	⇦ العدد المشتق:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x^2+2x}$ • 1	$\lim\limits_{x\to+\infty} x+2-\sqrt{x}$ • 1	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ • 1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$ • 1
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ • 2	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-2x$ • 2	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ • 2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ • 4
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ • 3	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+2}$ • 3	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}$ • 3	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ • 2
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+\sqrt{x}}{x^2+2x-3}$ • 4	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}-2}$ • 4	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ • 3

المستقيمات المقاربة :

⇦المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل (الأفقي):

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=a$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=a$ فإن منحني الدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=a$.

تمرين -1-:

f الدالة المعرفة على المجموعة R بـ $f(x)=\dfrac{4x^2-3}{2x^2+1}$ و (C_f) تمثيل بيانها في المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

⇦ احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم فسر كل نتيجة هندسيا .

⇦المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل (العمودي):

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ فإن منحني الدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=a$.

تمرين -2-:

f الدالة المعرفة على المجموعة $D=\Re-\{-1;1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-1}$ و (C_f) تمثيل بيانها .

⇦ احسب نهاية الدالة f عند الأطراف المفتوحة لـ D (لا تحسب عند $+\infty$ و $-\infty$) ثم فسر كل نتيجة هندسيا .

⇦المستقيم المقارب المائل:

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0\right)$ فإن منحني دالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=ax+b$ بجوار $+\infty$ ($-\infty$) .

❖دراسة الوضع النسبي لـمنحنى الدالة بالنسبة لمستقيم المقارب المائل:

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) منحني الدالة f بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته من الشكل $y=ax+b$ ندرس إشارة : $[f(x)-(ax+b)]$ ، إذا كان :

$[f(x)-y]\prec 0$ فان (C_f) تحت (Δ) .	$[f(x)-y]\succ 0$ فان (C_f) فوق (Δ) .	$[f(x)-y]=0$ فان (C_f) يقطع (Δ) .

تمرين -3-:

1 • f الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1;1\}$ كما يلي : $f(x)=x-1+\dfrac{x}{x^2-1}$ ، (C_f) تمثيل بيانها .

بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) ثم أدرس ا لوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

❖المنحنيان المتقاربان:

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=0$) فإن منحني الدالة f و منحني الدالة g متقاربان بجوار $+\infty$ ($-\infty$) .

تمرين -4-:

1 • f الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1;1\}$ كما يلي : $f(x)=x^2+1+\dfrac{1}{x-1}$ ، (C_f) تمثيل بيانها .

بين أن (C

دي حمـــو

النهايـــــــــات -2- بكالوريا 2022

التمرين 1 :

أحسب نهاية الدالة f	عند
$f(x)=\lvert x^2-1\rvert$	$-\infty$ و $+\infty$

أحسب نهاية الدالة f	عند
$f(x)=\lvert x-1\rvert+\dfrac{4}{x-2}$	$-\infty$ و $+\infty$ و 2

التمرين 2 :

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $-2\le \cos x+\sin x\le 2$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x+\sin x}{x^2}$.

2. f دالة بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x\ge 0$: $\lvert f(x)-3\rvert\le\dfrac{1}{x^2+1}$. ⇦عين نهاية f عند $+\infty$.

التمرين 3 :

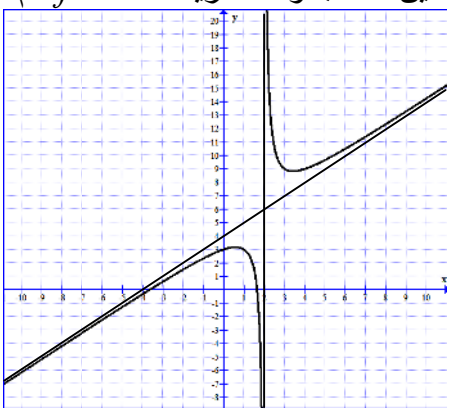
عين النهايات المطلوبة بكل الطرق الممكنة :

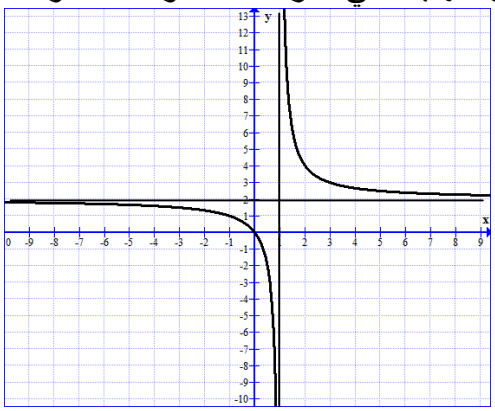
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+x+\sqrt{x}}{x^2+1-\sqrt{x}}}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{x}{x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2022}-1}{x^{1011}-1}$	$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-3}-1}$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{bx}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 3x}{2\cos x-1}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{4x}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-3x+1$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+x$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+3x$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x+1$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\sqrt{x}-1}-\sqrt{3\sqrt{x}+2}$

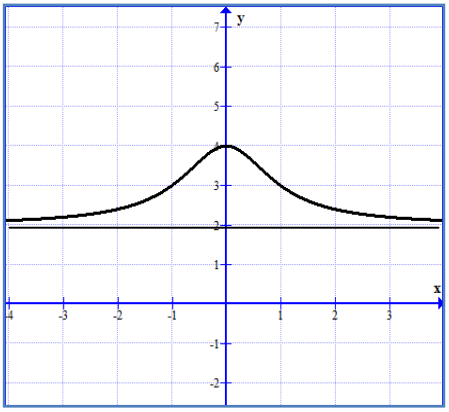
التمرين 4 :

المنحنى C_f هو التمثيل البياني الممثل لدالة f

عين D مجموعة تعريف الدالة f ثم خمّن النهايات في أطراف المجموعة D واستنتج معادلات كل المستقيمات المقاربة .







التمرين 5 :

1. لتكن الدالة f المعرفة على $\Re$ بـــ: $f(x)=a+\dfrac{2x^2-2}{3x^2+1}$ حيث a عدد حقيقي. ⇦ أوجد قمة a علما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$.

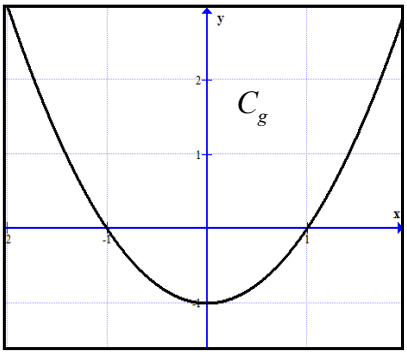
2. لتكن الدالة f المعرفة على $\Re$ بـــ: $f(x)=\dfrac{(a^2+1)x^2-2}{ax^2+1}$ حيث a عدد حقيقي غير معدوم . ⇦ أوجد قمة a علما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

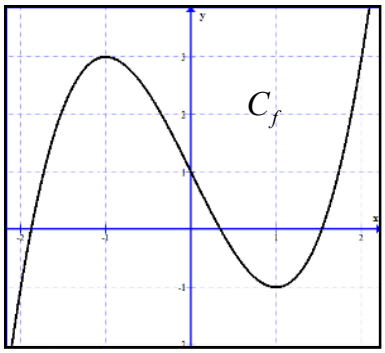
3. لتكن الدالة f المعرفة على $\Re-\{3\}$ بـــ: $f(x)=\dfrac{ax-2}{}$ حيث a و b عددان حقيقيان. ⇦ أوجد قمة كل من a و b علما أن

دي حمـــو

التمرين 6:

المنحني C_f هو التمثيل البياني الممثل لدالة f و المنحني C_g هو التمثيل البياني الممثل لدالة g





⇦ عين بيانيا $f(1)$ و $f(-1)$.

⇦ عين بيانيا إشارة $g(x)$.

2. لتكن الدالة h المعرفة على D بـــ : $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

⇦عين D مجموعة تعريف الدالة h .

⇦عين النهايات عند الأطراف المفتوحة لـــ D . (لا يطلب حسابها عند $+\infty$ و $-\infty$)

التمرين 7 :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{3\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-3}$ (C_f) تمثيل بيانها .

⇦ عين الثوابت الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{3\}$ فإن : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$.

⇦ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) يطلب تعيين معادلة له ، ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D)

التمرين 8 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ ، C_f تمثيلها البياني .

⇦عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$: $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x-1)^2}$

⇦ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني C_f و المستقيم (d) الذي معادلته $y=x-2$ ؟ برر . حدّد وضعية C_f بالنسبة لـ (d).

التمرين 9:

4 • f الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x)=2\sqrt{x^2+1}-x$ (C_f) تمثيل بيانها .

⇦ احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

⇦احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+3x]$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

التمرين 10 :

f الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+3}{x^2+1}$ ، (C_f) تمثيل بيانها .

⇦ بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=1$. استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) يطلب تعيين معادلة له .

التمرين 11:

f و g الدالتين المعرفتين على المجموعة $\Re$ كما يلي: $f(x)=x^2-3x-1+\dfrac{x}{x^2+1}$ و $g(x)=x^2-3x-1$.

(C_f) و (C_g) تمثيل بيانهما في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-g(x)]$ ثم فسر النتيجتين هندسيا ، حدد الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

التمرين 12 :

اليك جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	+		0	−
$f(x)$	1 ↗	2	↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗		3	↘ $-\infty$

⇦ حدد المستقيمات المقاربة الافقية و العمودية لمنحني الدالة f .

دي حمـــو

واجـــــــــــب فى النهايات

التمرين الأول :

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x مجموعة تعريفها D_f.

⇦احسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة لمجال التعريف في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x)=x^3+2x^2+x+5$	$D_f=R$
$f(x)=-2x^3+2x^2+x+5$	$D_f=R$
$f(x)=-x^2+x+5$	$D_f=R$
$f(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}$	$D_f=R-\{2\}$
$f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$	$D_f=R-\{-1\}$

$f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-1}$	$D_f=R-\{-1;1\}$
$f(x)=\dfrac{2-x}{(x-1)^2}$	$D_f=R-\{;1\}$
$f(x)=x+\dfrac{2}{x-1}$	$D_f=R-\{1\}$
$f(x)=\lvert x\rvert+\dfrac{2}{x-1}$	$D_f=R-\{1\}$

التمرين الثاني :

1. عين النهايات المطلوبة بكل الطرق الممكنة :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{x-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+\sqrt{x}}{x^2-2x}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x^2-x+3}{x^2-4x+3}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-4x+3}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2}+x$	$\lim\limits_{x\to-\infty}2\sqrt{x^2-x+1}+x$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}-\sqrt{3x+2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}$

التمرين الثالث :

2 • f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $f(x)=\lvert x+1\rvert+\dfrac{x}{x^2-1}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

⇦ اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة ثم ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

⇦ بين أن المستقيمين $\Delta: y=x+1$ و $\Delta': y=-x-1$ مقاربين للمنحني (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب.

⇦ ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ على المجال $]1;+\infty[$ و ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ' على المجال $]-\infty;-1[$.

التمرين الرابع: للتعمق

1. عين النهايات المطلوبة : m عدد حقيقي

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{2x^3-2x^2+3x-3}$	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-4x^2+4x}$	$\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{-2-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{-3-x}-1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+\cos x}{x-1}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+(-1)^x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=2\sqrt{2}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin x}$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x^2+x}$	$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{mx+\sqrt{x}+1}{x+1}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}(mx^3-2x^2-2)$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{mx-2}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-mx$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{mx+\sqrt{x}+1}{x+1}$

2. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=-\dfrac{2}{3}x+\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}$ ☜ احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

3. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=-x+\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}$ ☜ احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x}(x+}$

دي حمـــو

تمارين محلولة ـ نهاية دالة كثير حدود و دالة ناطقة . بكالوريا 2022

نهاية دالة كثير حدود.

تمريـــــــــــن :

$1\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+2x^2+x+5\right)$	$2\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+3x+2\right)$	$3\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+2x^2+x+5\right)$
$4\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^4+3x+2\right)$	$5\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+2x^2+x+5\right)$	$6\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+3x+2\right)$
$7\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+2x^2+x+5\right)$	$8\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^4+3x+2\right)$	

الحـــــــــل:

$1\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty$	$2\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+3x+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$
$3\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4\right)=+\infty$	$4\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^4+3x+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^4\right)=-\infty$
$5\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\right)=+\infty$	$6\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+3x+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$
$7\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4\right)=+\infty$	$8\bullet \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^4+3x+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^4\right)=-\infty$

نهاية دالة ناطقة :

تمريـــــــــــن :

احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :

$1\bullet \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+2x-1}{x^2+1}$	$2\bullet \lim\limits_{x\to1^{>}}\dfrac{2x^3+2x-1}{x-1}$	$3\bullet \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

الحـــــــــل:

$$1\bullet \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+2x-1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

$$2\bullet \lim_{x\to1^{>}}\frac{2x^3+2x-1}{x-1}=\frac{3}{0^{+}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}\bullet 3$$

حالة عدم التعيين من الشكل $0/0$ ، لإزالتها نقوم بالإختزال :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)}=\lim_{x\to1}(x+3)=4$$

دي حمو



تمارين محلولة ـ النهايات بوسيط. بكالوريا 2022

التمرين:

عين تبعا لقيم العدد الحقيقي m ما يلي :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3-2x^2+x-2\right)$ • 1	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{mx-2}{x-1}$ • 2	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}$ • 3

الحـــــــــل :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3-2x^2+x-2\right)$ • 1

❖ إذا كان $m=0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3-2x^2+x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^2+x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^2\right)=-\infty$

❖ إذا كان $m\neq0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3-2x^2+x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3\right)$ و نميز حالتين حسب اشارة m :

⇦ إذا كان $m\succ0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3-2x^2+x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3\right)=+\infty$

⇦ إذا كان $m\prec0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3-2x^2+x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx^3\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{mx-2}{x-1}$ • 2

❖ إذا كان $m=2$: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{mx-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{x-1}=\dfrac{0}{0}$ هي حالة عدم التعيين ، ونزيلها بالاختزال :

$$\lim_{x\to1}\frac{mx-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

❖ إذا كان $m\neq2$: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{mx-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{m-2}{0}$ و نميز حالتين :

⇦ إذا كان $m\succ2$ فإن $m-2\succ0$ و منه :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{\prec}{\to}1}\dfrac{mx-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{m-2}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\overset{\succ}{\to}1}\dfrac{mx-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{m-2}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

⇦ إذا كان $m\prec2$ فإن $m-2\prec0$ و منه :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{\prec}{\to}1}\dfrac{mx-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{m-2}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\overset{\succ}{\to}1}\dfrac{mx-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{m-2}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}$ • 3

❖ إذا كان $m=0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$.

❖ إذا كان $m\prec 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}=+\infty+\infty=+\infty$.

❖ إذا كان $m=1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=+\infty-\infty$ هي ح.ع.ت ، ونزيلها بالمرافق :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2-2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)}=0$$

❖ إذا كان $m\in\left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}$ هي ح.ع.ت من الشكل $+\infty-\infty$ ، ونزيلها بالتحليل :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-mx\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-m\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)=+\infty\times(1-m)$ نميز حالتين :

⇦ إذا كان $m\in\left]0;1\right[$ فإن $1-m\succ 0$ و منه :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}=+\infty$$.

⇦ إذا كان $m\in\left]1;+\infty\right[$ فإن $1-m\prec 0$ و منه:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-m\sqrt{x^2+2}=-\infty$$.

الأستاذ : بلجودي حمـــو

1. حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-3}-2x$:

هي حالة عدم التعيين من الشكل $\boxed{+\infty-\infty}$ نستعمل المرافق .

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-3}-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3}^2-(2x)^2}{\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-3-4x^2}{\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)}=0$$

2. حساب $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$:

حالة عدم التعيين من الشكل $\boxed{\frac{0}{0}}$ نستعمل المرافق .

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}^2-1^2}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

ملاحظة : يمكن استعمال تعريف المشتق للدالة $x\mapsto\sqrt{x}$.

3. حساب $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{x}-1}$: حالة عدم التعيين من الشكل $\boxed{\frac{0}{0}}$ نستعمل المرافق .

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2x-1}^2-1^2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}^2-1^2\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(2x-1-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(2x-2)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\frac{2\left(\sqrt{1}+1\right)}{\left(\sqrt{2(1)-1}+1\right)}=\frac{4}{2}=2$$

. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-2x+2$ **:**

حالة عدم التعيين من الشكل $\boxed{+\infty-\infty}$ لإزالتها نستعمل **التحليل**

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-2x+2=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-2x+2=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-2x+2$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-2x+2=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-2+\frac{2}{x}\right)=+\infty(1-2)=-\infty$$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{16x-\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+2}}}{\sqrt{4x-1}}$ **:**

هي **حالة عدم التعيين** من الشكل $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16x-\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+2}}}{\sqrt{4x-1}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16x-\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\sqrt{3+\frac{2}{x}}}}{\sqrt{4x-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16x-\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\sqrt{3+\frac{2}{x}}}}}{\sqrt{4x-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{16-\frac{\sqrt{x}}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\sqrt{3+\frac{2}{x}}}}}{\sqrt{x}\sqrt{4-\frac{1}{x}}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16-\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{3+\frac{2}{x}}}}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}=\sqrt{4}=2$$

تمارين محلولة ـ المستقيم المقارب المائل. — بكالوريا 2022

1 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ تمثيلها البياني C_f .

⇦عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

⇦ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x-1)^2}$

⇦ بين أن C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) معادلته $y=x-2$. ⇦ حدّد وضعية C_f بالنسبة لـ (d).

حـــل التمرين:

⇦ نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=+\infty\end{cases}\qquad \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

⇦ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{1\}$:

$$ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)(x-1)^2+cx+d}{(x-1)^2}=\frac{(ax+b)(x^2-2x+1)+cx+d}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{ax^3-2ax^2+ax+bx^2-2bx+b+cx+d}{(x-1)^2}=\frac{ax^3+(-2a+b)x^2+(a-2b+c)x+b+d}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases}a=1\\ -2a+b=-4\\ a-2b+c=8\\ b+d=-4\end{cases}$ و منه $\begin{cases}a=1\\ b=-2\\ c=3\\ d=-2\end{cases}$ من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=x-2+\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$.

⇦ بين أن C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) معادلته $y=x-2$:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=\lim_{|x|\to+\infty}\left(x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}-(x-2)\right)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x-2}{(x-1)^2}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3}{x}=0$$

إذن C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) معادلته $y=x-2$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

⇦ حدّد وضعية C_f بالنسبة لـ (d) :

ندرس إشارة $\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ و إشارته من إشارة $3x-2$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$(f(x)-(x-2))$		-	0	+	‖	+	
الوضع النسبي	C_f			C_f	‖	C_f فوق (d)	

تمريـــــــــن :

أحسب : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2022}-1}{x^{1011}-1}$

الحـــــــل :

هي حالة عدم التعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$

1. إزالة حالة عدم التعيين بالاختزال :

☜التحليل بالمتطابقات الشهيرة :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2022}-1}{x^{1011}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^{1011}\right)^2-1}{x^{1011}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^{1011}-1\right)\left(x^{1011}+1\right)}{x^{1011}-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(x^{1011}+1\right)=1+1=2$$

☜التحليل بالقسمة الإقليدية :

$x^{2022}-1$	$x^{1011}-1$
$-x^{2022}+x^{1011}$	$x^{1011}+1$
$x^{1011}-1$	
$-x^{1011}+1$	
0	

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2022}-1}{x^{1010}-1}=$$
$$\lim_{x\to 1}\left(x^{1011}+1\right)=2$$

2. إزالة حالة عدم التعيين بتبديل المتغير:

نضع $X=x^{1011}$ و منه $x^{2022}=X^2$ و عندما $x\to 1$ فإن $X\to 1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{X^2-1}{X-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(X-1)(X+1)}{X-1}=\lim_{x\to 1}(X+1)=1+1=2$$

3. إزالة حالة عدم التعيين بالعدد المشتق :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2022}-1}{x^{1011}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x^{2022}-1}{x-1}}{\dfrac{x^{1011}-1}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{f'(1)}{g'(1)}$$

مع $f(x)=x^{2022}$ و منه $f'(x)=2022\,x^{2021}$ و منه $f'(1)=2022$

و $g(x)=x^{1011}$ و منه $g'(x)=1011\,x^{1010}$ و منه $g'(1)=1011$

إذن : $\dfrac{x^{2020}-1}{}=\dfrac{f'(1)}{}=\dfrac{2020}{}=2$

وديـ حمـو

حساب : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{0}{0}$ هي حالة عدم التعيين .

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}\right)+\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}\right)$$

أولا : $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-1}}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$

ثانيا : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\times\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\times\sqrt{x-1}\times\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)\times\sqrt{x-1}}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1}=0$

نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-1}}\right)+\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}\right)=\sqrt{2}+0=\sqrt{2}$

حساب : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sqrt{1-\cos x}}{2x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\right)^2\times\frac{1}{(\underbrace{1+\cos x}_{2})}}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{1\times\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$$

أتمنى لكم التوفيق و النجاح في بكالوريا 2022