

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة عددية

4

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

التمريـــــن

1 نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ:

$$g(x) = 2x^3 + 6x^2 + 7x + 1$$

① ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

② احسب قيمة تقريبية لكل من العددين $g(-0,2)$ و $g(-0,1)$ إلى 10^{-1}.

③ استنتج أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $]-0.2;-0.1[$ حيث: $g(\alpha) = 0$.

④ استنتج إشارة الدالة g على المجال $]-1,+\infty[$.

2 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + x}{(x+1)^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

① أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x)]$.

② عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من المجال $]-1,+\infty[$ يكون:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{(x+1)^2}$$

③ أ/ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (D) .

④ أ/ بين أنه من أجل كل x من $]-1,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

⑤ اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 2 .

⑥ بين أن النقطة A نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

⑦ عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

3 نعتبر h الدالة المعرفة على $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x > -1 \\ f(-x-2) & ; \quad x < -1 \end{cases}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

① بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر للمنحني (C_h) .

② (نقبل أن) ، مثل بيانيا ، ثم استنتج التمثيل البياني لـ .

1

① دراسة اتجاه تغير الدالة g :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}[2x^3+6x^2+7x+1]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(2+\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right]$$
$$= +\infty$$
$$\bullet f(-1) = 2(-1)^3+6(-1)^2+7(-1)+1$$
$$= -2$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 6x^2+12x+7$$

لدينا:

$$\Delta = 12^2-4(6)(7) = -24$$
$$\Delta < 0$$

ومنه المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$

اذن $g'(x) > 0$

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$		↗	$+\infty$
	-2		

② حساب قيمة تقريبية لكل من العددين $g(-0.2)$ و $g(-0.1)$ إلى 10^{-1}:

$$g(-0.2) \cong -0.1 \quad ، \quad g(-0.1) \cong 0.1$$

③ استنتاج أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $]-0,2;-0,1[$ حيث: $g(\alpha) = 0$:

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]-1,+\infty[$

ولدينا: $g(-0.2)\times g(-0.1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد عدد وحيد α من المجال $]-0,2;-0,1[$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

④ استنتاج إشارة الدالة g على المجال $]-1,+\infty[$:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

2

① أ/ حساب $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to -1}} [f(x)]$:

$$\lim_{\substack{>\\ x\to -1}} [f(x)] = \lim_{\substack{>\\ x\to -1}} \left[\frac{2x^3+4x^2+x}{(x+1)^2}\right]$$
$$= \lim_{\substack{>\\ x\to -1}} \left[\frac{1}{0^+}\right]$$
$$= +\infty$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = -1$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x)]$:

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x)] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{2x^3+4x^2+x}{(x+1)^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{2x^3}{x^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to +\infty} [2x]$$
$$= +\infty$$

② تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(ax+b)(x+1)^2 + cx}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1) + cx}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+cx}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+b}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a+b = 4 \\ a+2b+c = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = 2} \\ \boxed{b = 0} \\ \boxed{c = -1} \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = 2x - \frac{x}{(x+1)^2}$$

③ أ/ تبيين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty}\left[2x - \frac{x}{(x+1)^2} - 2x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{(x+1)^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{x^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]$$
$$= 0$$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (D) :

ندرس إشارة الفرق $(f(x)-y)$:

$$f(x) - y = -\frac{x}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$

ومنه:

-

x	-1	0	$+\infty$
$f(x)-y=-x$	$+$	0	$-$

الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما $x \in]-1;0[$.
- (C_f) يقطع (D) في المبدأ $(0;0)$
- (C_f) تحت (D) لما $x \in]0;+\infty[$.

④ أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $]-1,+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$:

$$f'(x) = \frac{(6x^2+8x+1)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x^3+4x^2+x)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{(6x^2+8x+1)(x+1) - 2(2x^3+4x^2+x)}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب/ دارسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا:

$(x+1)^3 > 0$ لما $x \in]-1;+\infty[$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

⑤ كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 2 :

$$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2)$$
$$= \frac{55}{9}(x-2) + \frac{34}{9}$$
$$= \frac{55}{9}x - 2(\frac{55}{9}) + \frac{34}{9}$$
$$= \frac{55}{9}x - \frac{76}{9}$$

⑥ تبيين أن النقطة A نقطة انعطاف للمنحني (C_f):

لدينا:

$$f''(x) = \frac{g'(x)(x+1)^3 - 3(x+1)^2 g(x)}{(x+1)^6}$$
$$= \frac{g'(x)(x+1) - 3g(x)}{(x+1)^7}$$
$$= \frac{(6x^2+12x+7)(x+1) - 3(2x^3+6x^2+7x+1)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{-2x+4}{(x+1)^4}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط

$$-2x+4 = 0 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2$$

ومنه:

x	-1	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

لدينا المشتقة الثانية تنعدم وتغير اشارتها، ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف في النقطة A ذات الفاصلة 2

⑦ تعيين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$ ►

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x^3+4x^2+x}{(x+1)^2}=0$$
$$\Rightarrow 2x^3+4x^2+x=0$$
$$\Rightarrow x(2x^2+4x+1)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x^2+4x+1=0 \end{cases}$$

لدينا: $2x^2+4x+1=0$

ومنه:

$$\Delta=4^2-4\times 2\times 1=8=\left(2\sqrt{2}\right)^2$$

ومنه:

$$x_1=\frac{-4+2\sqrt{2}}{4}=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\begin{cases} x_2=\frac{-4-2\sqrt{2}}{4}=-1-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$\left(x_2=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ مرفوض، لأنه خارج المجال $]-1,+\infty[$

ومنه مجوعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي: $s=\left\{0;-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

اذن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في النقط ذات الفواصل 0 و $\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3

① تبيين أن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ محور تناظر للمنحني (C_h):



لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر لـ (C_f) نبين ما يلي:

$$\begin{cases} 2a-x\in D_f \\ f(2a-x)=f(x) \end{cases}$$

- <u>اثبات أن $2(-1)-x]\in D_h$:</u>

لدينا $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ معناه: $x<-1$ أو $x>-1$

معناه: $-x>1$ أو $-x<1$

معناه: $-2-x>-1$ أو $-2-x<-1$

ومنه: $(-2-x)\in]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

- اثبات $h(2(-1)-x)=h(x)$:

لدينا:

$$h(-2-x)=\begin{cases} f(-2-x) & ; \quad -2-x>-1 \\ f(-(-2-x)-2) & ; \quad -2-x<-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(-2-x)=\begin{cases} f(-2-x) & ; \quad -x>1 \\ f(2+x-2) & ; \quad -x<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(-2-x)=\begin{cases} f(-2-x) & ; \quad x<-1 \\ f(x); & x>-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(-2-x)=h(x)$$

ومنه المستقيم $x=-2$ محور تناظر ل (C_h)

② التمثيل البياني:

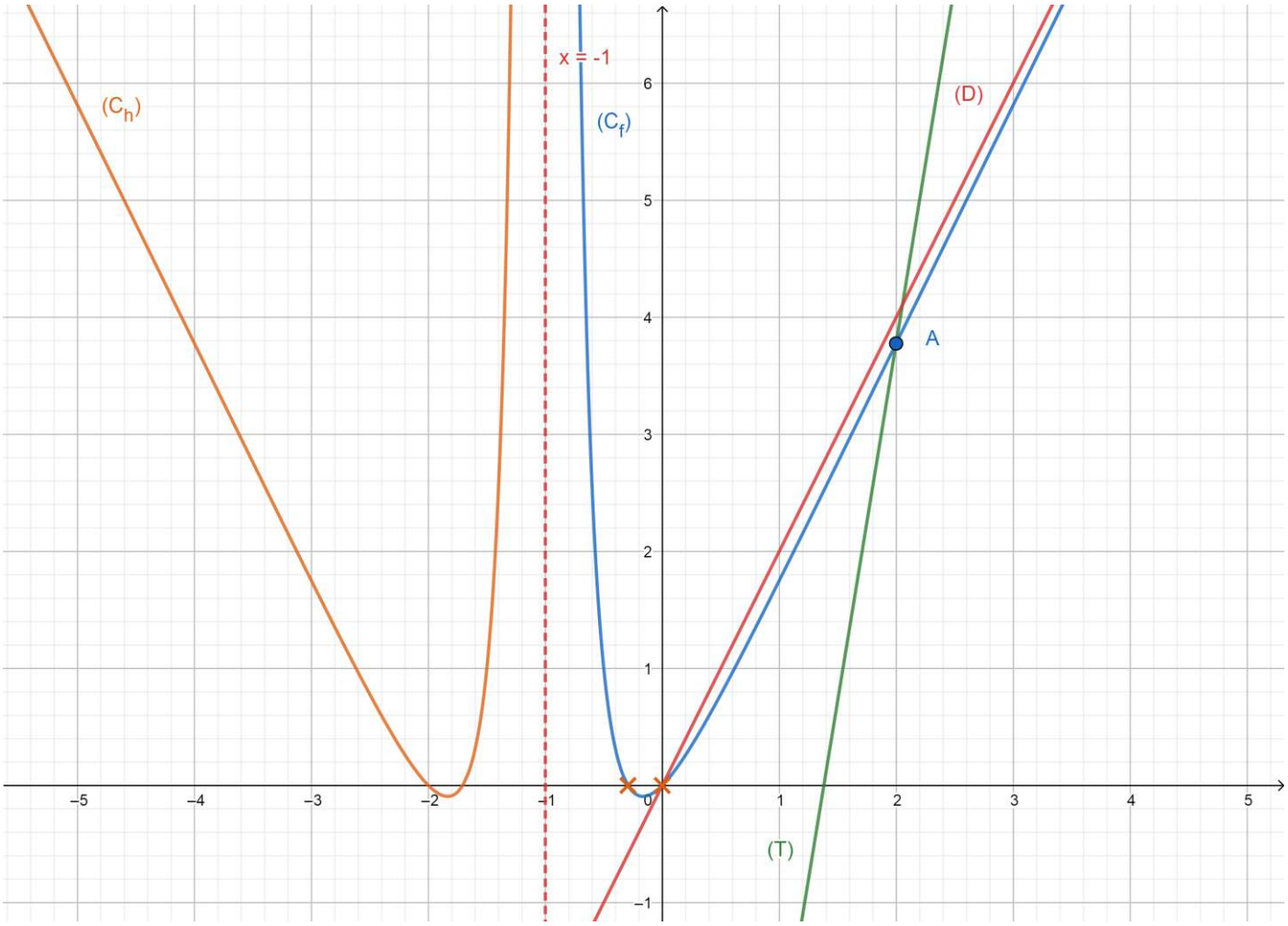
لدينا:

لما $x>-1$ المنحني (C_h) ينطبق على المنحني (C_f)

ولما $x<-1$ المنحني (C_h) يناظر المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم $x=-1$

خطوات إنشاء (C_f) و (C_h) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي: $x=-1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (D) ذو المعادلة $y=2x$
- نعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نكمل رسم (C_f)
- ثم نرسم (C_h)



◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►