السلسلة رقم 01

النهايات والاستمرارية



- حساب النهايات بمختلف الطرق
- المستقيمات المقاربة
- الاستمرارية
- مبرهنة القيم المتوسطة

التمرين رقم 01

في كل حالة ممّا يلي، احسب نهايات الدالة f عند أطراف D_f ثمّ فسّر -إن أمكن- النتائج بيانيا.

1. $f(x)=\dfrac{3x^3+x-4}{(3-x)^2}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$
2. $f(x)=\dfrac{x+4}{\sqrt{x}-1}$ ، $D_f=[0;1[\cup]1;+\infty[$
3. $f(x)=x-\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$ ، $D_f=]-2;+\infty[$
4. $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x+8}{1-x}}$ ، $D_f=]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$
5. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4x+3}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{1;3\}$
6. $f(x)=x-\sqrt{x^2+3}$ ، $D_f=\mathbb{R}$
7. $f(x)=\dfrac{|x+1|}{x^2-1}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$
8. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+4x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-2;0\}$

التمرين رقم 02

باستعمال طريقة مناسبة ، احسب النهايات التالية:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x-3}-x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-3x$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{x^2+x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}x-1+2\sqrt{1-x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2-7x+3}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x-1}$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+3+\sqrt{4x^2+x-13}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+x-1}-\sqrt{2}x$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^4-x^2+2}-\left(x^2+x+1\right)$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$
11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{-x-\sqrt{x^2+4}}$
12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-1}}{x}$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+1}}$
14. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$
15. $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$
16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{-x}+2x-1}{\sqrt{2+x^2}}$
17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$
18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{-x}+2x-1}{\sqrt{2+x^2}}$
19. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3+4x^2-8x+3}$

20. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-2x^2+x+15}{(x-3)^2}$

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+|x-1|-1}{x^2-x}$

22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{15-2x}}$

23. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$

24. $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

25. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+2}}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^{2021}-1}{x}$

28. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+x+4}-4}$

29. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{6x-\pi}$

30. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$

31. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}$

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

33. $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}$

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

35. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)$

36. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-3}\left(3x-\sqrt{x^2+2x}\right)$

37. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

38. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$

39. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x^3+x^2}{x}\right)\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

40. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^3+1\right)$

التمرين رقم 03

باستعمال مبرهنات المقارنة (الحدّ من الأعلى، الحدّ من الأسفل، الحصر)، احسب النهايات التالية:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+\sin 2x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-\sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sin x}{x^2+1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1+\sin x\right)$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^2+x\cos x\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\cos x}{x+1}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin 3x+\cos 2x}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+5\cos x+1\right)$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\cos x}{\sqrt{x}+1}$

التمرين رقم 04

f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

1) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$:

$x^2\le x^2+x+1\le(x+1)^2$ و $x\le\sqrt{x^2+x+1}\le x+1$

2) استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$:

$1-\dfrac{1}{x+1}\le f(x)\le 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ، عيّن عندئذ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

التمرين رقم 05

f دالة معرفة على $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{4\sin x+3x}{x-1}$$

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x>1$:

$$f(x)=\frac{4\sin x+3}{x-1}+3$$

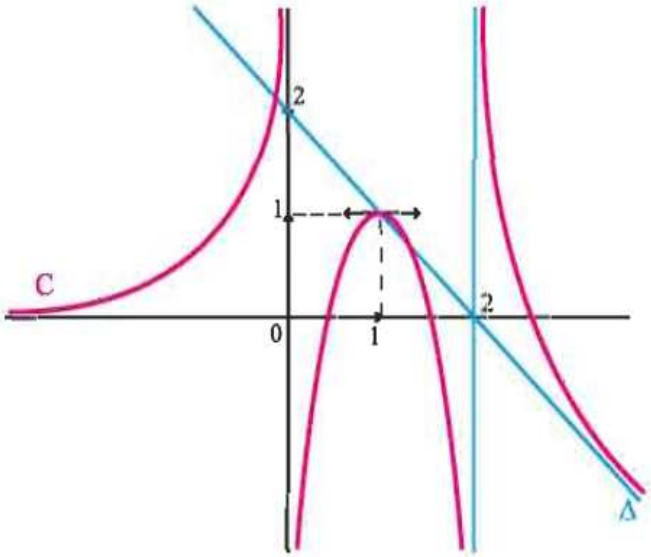
2) أثبت أنّ: $|4\sin x+3|\le 7$ ، ثمّ استنتج أنّ :

$$|f(x)-3|\le \frac{7}{x-1}$$

3) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

التمرين رقم 06

في الشكل الموالي: (C) التمثيل البياني لدالة f و (Δ) مستقيم مقارب له بجوار $+\infty$.



بقراءة بيانية أجب على الأسئلة التالية:

1) جد معادلة المستقيم (Δ).

2) عين النهايات التالية:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to0^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to2^-} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to2^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \left[f(x)+x\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x)\right]^2 \quad , \quad \lim_{x\to0} f\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \lim_{x\xrightarrow{<}2} f\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)$$

3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، وجود وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$.

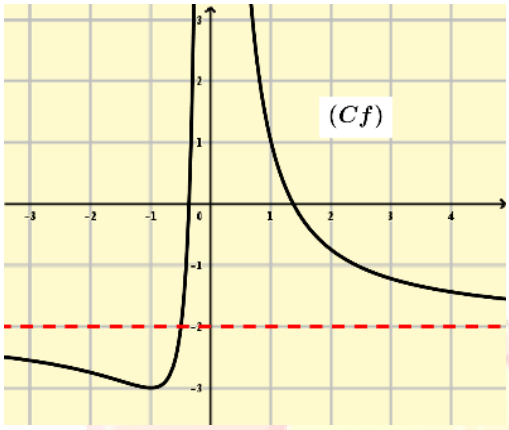
التمرين رقم 07

- في كل حالة من الحالات التالية وبقراءة بيانية:

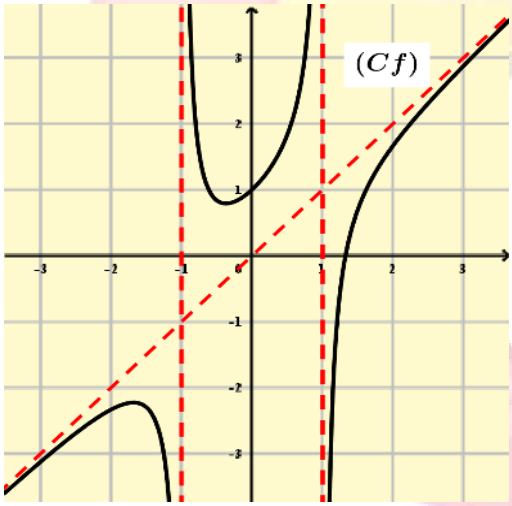
1) عين النهايات عند أطراف مجموعة التعريف للدالة f .

2) عيّن معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) مع تحديد الوضع النسبي له في حالة مقارب أفقي أو مائل.

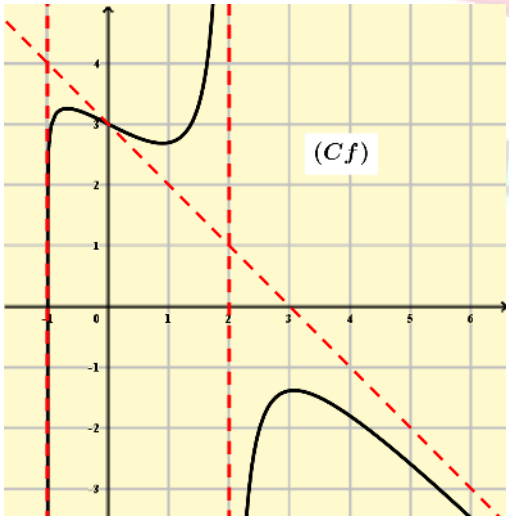
الحالة 01



الحالة 02



الحالة 03



التمرين رقم 08

أثبت في كل حالة من الحالات التالية أنّ (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) منحنى الدالة f، ثمّ ادرس الوضع النسبي بينهما.

1. $f(x)=3x+7-\dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$ ، $(\Delta): y=3x+7$
2. $f(x)=\dfrac{-x^2+3x+5}{x+1}$ ، $(\Delta): y=-x+4$
3. $f(x)=\dfrac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ ، $(\Delta): y=x-3$

التمرين رقم 09

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{2x+1} & ;x\le 0 \\ f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} & ;x>0 \end{cases}$$

1) بيّن أنّ الدالة f مستمرة عند 0.
2) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$، ثمّ بيّن أنّ (C_f) منحنى الدالة f يقبل في جوار $-\infty$ مقاربا مائلا نطلب معادلته.
3) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، فسّر النتيجة بيانيا.

التمرين رقم 10

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4+x^2}-2} & ;x\neq 0 \\ g(0)=\ell \end{cases}$$

- عيّن قيمة العدد الحقيقي ℓ حتى تكون g مستمرة على $\mathbb{R}$.

التمرين رقم 11

f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$.

1) اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
2) ادرس استمرارية f عند القيمتين $-\dfrac{1}{2}$ و $\dfrac{1}{2}$.
3) بيّن أنّ المستقيمين $(\Delta): y=3x$ و $(\Delta'): y=-x$ مقاربان مائلان لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب، ثمّ حدّد الوضع النسبي مع كل منهما.

التمرين رقم 12

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x-2} & ;x>2 \\ f(x)=\dfrac{2x+b}{3} & ;x\le 2 \end{cases}$$

- عيّن قيمتي العددين الحقيقيين a و b حتى تكون f مستمرة عند 2.

التمرين رقم 13

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & ;x<1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+5x-2}-x & ;x\ge 1 \end{cases}$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ثمّ فسّر النتائج بيانيا.
2) أثبت أنّ f مستمرة على $\mathbb{R}$.
3) أ- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا α حيث $\alpha\in\left]-\dfrac{1}{2};0\right[$.

ب- استنتج أنّ: $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{1-\alpha^2}$.

4) نعتبر الدالة g المعرفة على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ كما يلي:

$$\begin{cases} g(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & ;x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

- بيّن أنّ g مستمرة على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

التمرين رقم 14

1) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x)=2x^3-3x^2-1$$

أ- ادرس تغيرات الدالة h.

ب- بيّن أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]1;2[$ ، ثمّ أعط حصرا لـ α سعته 10^{-1}.

ج- استنتج حسب قيم x إشارة $h(x)$.

2) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{1-x}{x^3+1}$$

أ- احسب نهايات الدالة f ، فسّر بيانيا النتائج المحصل عليها.

ب- أثبت أنّ: $f(\alpha)=\frac{2}{3}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2+1}\right)$ ، ثمّ جد حصرا للعدد $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2}.

التمرين رقم 15

1) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=x^3-3x+5$$

أ- ادرس تغيرات الدالة g.

ب- بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقّق $g(\alpha)=0$ ، ثمّ تأكد أنّ $-2,3<\alpha<-2,2$.

ج- حدّد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

2) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+5x$$

أ- ادرس تغيرات الدالة f.

ب- أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر β حيث $\beta\in]-4;-3[$.

ج- جد حصرا للعدد β سعته 10^{-2}.

د- استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

هـ- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\frac{-3\alpha(\alpha-5)}{4}$ ، ثمّ أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

التمرين رقم 16

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ:

$f(x)=ax+b+\frac{x}{x^2-1}$ مع a و b عددان حقيقيان.

جدول تغيرات الدالة f يعطى كما يلي:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\frac{-3\sqrt{3}+2}{2}$		1		$\frac{3\sqrt{3}+2}{2}$	

1) باستعمال المعطيات أعلاه، بيّن أنّ: $a=b=1$.

2) أكمل الجدول بحساب النهايات.

3) أ- احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-x-1\right]$ ، فسّر النتيجة بيانيا.

ب- ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) منحنى الدالة f والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x+1$.

4) بيّن أنّه لكل $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $f(-x)+f(x)=2$ ، ماذا نستنتج ؟

5) أ- أثبت أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,7<\alpha<0,8$.

ب- شكّل جدول إشارة الدالة f.

6) أنشئ (C_f) في معلم متعامد منجانس.

دبرها في بالك مليح:
النجاحات الباهرة لا تصنع بين عشية وضحاها..
بل هي نتاج إرادة قوية واجتهاد دائم
وإيمان راسخ في قدرتك على فعلها...

