تمرين شامل ورائع حول المتتاليات

الجزء الأول

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على IN حيث $u_0 = \alpha$ و $\alpha \in IR - \{2\}$ و $u_{n+1} = \frac{8u_n - 8}{u_n + 2}$

(1) عين قيم العدد الحقيقي α التي من أجلها تكون u_n متتالية ثابتة .

(2) أ- نضع فيمايأتي $\alpha = 3$, أحسب u_1 , u_2 ثم أعط تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية u_n

ب- عين العددين الحقيقيين a و b حيث

ج- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 \leq u_n \leq 4$

د- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة نحو نهاية يطلب حسابها

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : فإن $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

ب- استنتج بطريقتين مختلفتين أن $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^2$ من أجل كل عدد طبيعي n . ثم عين $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

ج- نضع المجموع s_n حيث $s_n = (4 - u_0) + (4 - u_1) + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots + (4 - u_n)$

* أعط حصرا للعدد s_n

الجزء الثاني

(v_n) التتالية العددية المعرفة على IN حيث $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول ثم إستنتج أنها متقاربة .

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n وعين مرة أخرى $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

الجزء الثالث

أحسب بدلالة n المجاميع التالية و الجداء p_n وأحسب نهاية كل واحدة منها :

$s_1 = -2v_0 - 2v_1 \ldots - 2v_n$ $\quad s_2 = {v_0}^2 + {v_1}^2 \ldots + {v_n}^2$ $\quad s_3 = \frac{3}{v_0} + \frac{3}{v_1} \ldots . + \frac{3}{v_n}$

$s_4 = v_0 + \left(\frac{3}{2}\right) v_1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 v_2 \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^n v_n$ $\quad s_5 = {v_0}^2 + \left(\frac{3}{2}\right) {v_1}^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 {v_2}^2 \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^n {v_n}^2$

$s_6 = v_0 + v_2 \ldots + v_{2n}$ $\quad s_7 = v_1 + v_3 \ldots + v_{2n-1}$ $\quad s_8 = \frac{1}{(u_0 - 2)^2} + \frac{1}{(u_1 - 2)^2} \ldots . + \frac{1}{(u_n - 2)^2}$

$s_8 = \ln(-v_0) + \ln(-v_1) \ldots . + \ln(-v_n)$ $\quad p_n = v_0 \times v_2 \ldots \ldots \ldots \ldots \times v_{2n}$

الجزء الرابع

لتكن المتتالية w_n المعرفة على IN حيث $w_n = \ln(-v_n)$

أ- برهن أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثم إستنتج إتجاه تغيرها

ب- أكتب w_n بدلالة n و أحسب نهايتها .