العبقري في الرياضيات

الدوال العددية

الثالثة ثانوي

الشعب: ● تسيير وإقتصاد.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية) الملخص ـــــــ

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية) الملخص ـــــــ

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية) الملخص ـــــــ

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية) الملخص ـــــــ

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية) الملخص ـــ
أ. مشتقة الدّالة $v \circ u$: $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$

ب. تطبيقات:

مشتقة الدّالة $x \mapsto u(ax+b)$ $(a \neq 0)$

$f(x) = u(ax+b)$	$f'(x) = au'(ax+b)$

مشتقة الدّالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

مشتقة الدّالة $x \mapsto [u(x)]^n$ $(n$ عدد طبيعي يحقق $n \geq 2)$

$f(x) = [u(x)]^n$	$f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$

مشتقة الدّالة $x \mapsto \dfrac{1}{[u(x)]^n}$ $(n$ عدد طبيعي يحقق $n \geq 1)$

$f(x) = \dfrac{1}{[u(x)]^n}$	$f'(x) = \dfrac{-nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$

9 الإستمرارية:

f دّالة **معرّفة** على مجال I من $\mathbb{R}$، إذا كانت f **مستمرة على** I فإنّ **تفسيرها البياني (أو الهندسي)** هو: أنّه **يُمكن رسم منحناها البياني على** I **دون رفع القلم (اليد)**.

نتائـــــج:

- الدّوال المرجعية **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- الدّوال كثيرات الحدود؛ "cos" و"sin" هي دّوال **مستمرة على** $\mathbb{R}$.
- الدّوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) هي دّوال **مستمرة على كل مجال** من مجموعة تعريفها.
- مجموع؛ جداء وتركيب دّوال **مستمرة هي** دّوال **مستمرة**.

مبرهنة القيم المتوسطة:

مبرهنة القيم المتوسطة (تُقبل دون برهان)	التفسير البياني (أو الهندسي) "لمبرهنة القيم المتوسطة"
▪ **الحالة العامة** $(k \in \mathbb{R})$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، من أجل كل عدد حقيقي k **محصور** بين $f(a)$ وَ$f(b)$، فـإنّ: المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = k}$ **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$.
▪ **الحالة الخاصة** $(k = 0)$ إذا كانت f دّالة **معرّفة ومستمرة** على المجال $[a;b]$، وكان 0 **محصور** بين $f(a)$ وَ$f(b)$، أي: $f(a) \times f(b) < 0$ فـإنّ: المعادلة $f(x) = 0$ **تقبل حلا على الأقل** في المجال $[a;b]$.	المنحنى (C_f) **يقطع** حامل محور الفواصل **على الأقل في نقطة واحدة** في المجال $[a;b]$.
وحدانية الحل	
▪ **الحالة العامة** $(k \in \mathbb{R})$ إذا كانت f دّ	المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم ذو المعادلة **لتها** α في

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية) الملخص ـــــــ

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية) الملخص ـــــــ

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

التمارين// الشعبة: تسيير وإقتصاد.

التمرين 01: (08 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لتكن f دّالة عددية قابلة للإشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها. لها جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

تُكتب عبارة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ حيث a، b، c أعداد حقيقية.

1)احسب $f'(x)$.

2)اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f:

أ-عيّن الأعداد الحقيقية a، b، c.

ب-عيّن $\lim\limits_{x\to 1^{>}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to 1^{<}} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانياً.

جـ-قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و$\frac{3}{4}$ بالدالة f معللا إجابتك.

3)نأخذ فيما يلي: $c = \frac{1}{4}$؛ $b = 1$؛ $a = 1$ وليكن (C) المنحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

أ) بيّن أنّه عندما يؤول x إلى $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ فإنّ المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته: $y = x + 1$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

جـ) اثبت أن النقطة $\omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C).

د) عيّن نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل.

4) λ عدد حقيقي، عيّن بيانياً، حسب قيم λ عدد حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$.

التمرين 02: (05 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

الدّالة كثير الحدود P معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + \frac{1}{2}$.

1.شكّل جدول تغيرات الدّالة P على $\mathbb{R}$.

2.بيّن أنّ المعادلة $P(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$.

3.استنتج إشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$.

4.الدّالة العددية G معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $G(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x$.

عيّن اتجاه تغ

التمرين 03: (03 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

f دالّة معرّفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$، (C_f) تمثيلها البياني وجدول تغيراتها مُعطى كما يلي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f(x)	2	↗	$+\infty$ | $+\infty$	↘	2

أجب بـــ: **خطأ** أو **صحيح** على كل سؤال مما يلي مع **تبرير الإجابة.**

1. المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب للمنحنى (C_f).
2. المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا.
3. مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>0$ هي $S=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.
4. في المجال $]-\infty;-1[$ يكون: "$f(-2)>f(x)$ عندما يكون $x<-2$".
5. النقطة $A(-3;1)$ تنتمي إلى المنحنى (C_f).
6. الدّالة f زوجية.

التمرين 04: (09 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$

يُرمز (C_f) إلى المنحنى المُمثل للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

I.1) عيّن الأعداد الحقيقية a، b، c بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.

2) احسب نهايات الدّالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها.

3) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مُوازيا لمحور التراتيب يُطلب تعيين معادلة له.

4) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

5) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

II.1) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ فإنّ: $f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ وَ f' هي الدّالة المشتقة للدّالة f

2) عيّن اتجاه تغيّر الدّالة f على مجالي مجموعة تعريفها وشكّل جدول تغيّراتها.

3) اكتب معادلة للمماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

III.1) بيّن أنّ النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

2) ارسم كلا من: (Δ)، (D) و(C_f).

3) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلاّن مختلفان.

4) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e^2-1$.

التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$

وَ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1)بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإنّ: $f(x)=x-5+\frac{a}{x^2}$، حيث a عدد حقيقي يُطلب تعيينه.

2)أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

3)أ-بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإنّ: $f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$، استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f.

ب-شكّل جدول تغيرات الدّالة f.

4)أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل، يُطلب تعيين معادلتيهما.

5)أوجد معادلة لـ(Δ) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

6)أرسم (Δ) والمنحنى (C_f).

7)أ-عيّن الدّالة الأصلية F للدّالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تُحقق: $F(2)=-10$.

ب-أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=1$ وَ $x=2$.

التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$

(C) المنحنى البياني الممثل للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

الوحدة $1\ cm$ على محور الفواصل و $4\ cm$ على محور التراتيب.

1)بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=1-\frac{x}{x^2+1}$.

2)احسب نهاية الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$، واستنتج أنّ (C) يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له.

3)ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$.

4)احسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدّالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

5)بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(-x)=2-f(x)$. واستنتج أنّ (C) يقبل مركز تناظر يُطلب تعيينه.

6)ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C).

7)أ. احسب التكامل: $\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx$.

ب. احسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.

التمرين 07: (05 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

f هي الدّالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+100+\frac{57600}{x+1}$.

1)أحسب نهايتي f عند -1 بقيم أكبر وعند $+\infty$.

2)أ-بيّن أنّه من أجل كل من المجال ، $\frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{}$.

جـ-جِد الدالة الأصلية H للدّالة $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x = 0$.

3)تُنتج إحدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و200 آلة على الأكثر.

تُنَمْذَجُ الكلفة الهامشية C_m لإنتاج x آلة إضافية للشركة على المجال $[5; 200]$ بالدالة f أي أنّ: من أجل كل x من المجال $[5; 200]$، $C_m(x) = f(x)$.

أ-ما هو عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن؟

ب-نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج x آلة. ونُذكّر أنّ $C'(x) = C_m(x)$.

جِد الكلفة الإجمالية $C(x)$، علما أنّ الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000DA، ثم استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى.

التمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

اختر الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) 2) **متتاليات عددية**.

3)منحنى الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x) = (x^2 - 1)^3$، يقبل مماساً في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{2}$ معادلته:

أ) $y = \sqrt{2}x + 1$، ب) $y = 6\sqrt{2}x - 11$، جـ) $y = 6\sqrt{2}x + 1$.

4) 5) 6) **إحتمالات**.

التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I)نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^3 - x^2 - 1$.

1)احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2)ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3)بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,46 < \alpha < 1,48$.

4)استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II)مؤسسة صناعية تنتج يوميا كميّة q (مُقدرة بالطّن) من منتوج بكلفة متوسطة C_M (مُقدرة بملايين الدّنانير) معرّفة على $[0; 10]$ بـ: $C_M(q) = \frac{1}{2}q^2 - q + 1 - \frac{1}{2}\ln(q^2 + 1)$.

1)بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي q من $[0; 10]$، $C'_M(q) = \frac{g(q)}{q^2+1}$.

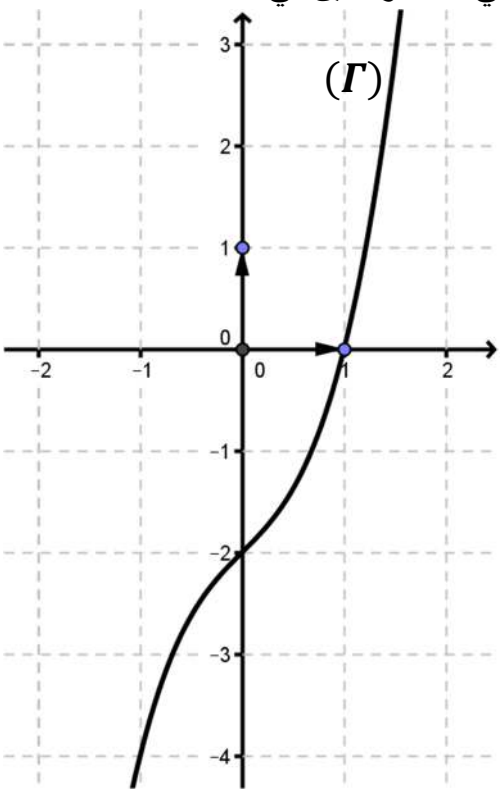
2)عيّن اتجاه تغيّر الكلفة المتوسطة C_M ثمّ شكّل جدول تغيراتها. (نأخذ $\alpha \simeq 1,47$)

3)عيّن الكميّة التي تُنتج يوميا بأقل كلفة متوسطة ثمّ حدّد هذه الكلفة المتوسطة.

4)ما هي الكلفة الإجمالية C لإنتاج 2 طن يوميا؟

التمرين 10: (07 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$g(I$ الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^3 + x - 2$ و (Γ) تمثيلها البياني كما هو مُبيّن في الشكل.



بقراءة بيانية عيّن $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

$f(II$ الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)أ) أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أُحسب $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا.

2)بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

-استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3)أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

4)بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,4; -1,3[$.

5)ارسم (Δ) ثمّ المنحنى (C_f).

6)أُحسب A مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x$، $x = 1$ وَ $x = 3$.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال العددية -بكالوريات جزائرية)

الحلول// الشعبة: تسيير وإقتصاد.

حل التمرين 01: (08 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

تذكير: $\left(\frac{c}{u}\right)' = \frac{-cu'}{u^2}$ أو $\left(\frac{c}{u}\right)' = \frac{0\times u - u'\times c}{u^2} = \frac{-cu'}{u^2}$، حيث c عدد حقيقي.

لدينا: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.

1)حساب $f'(x)$:

f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;1[$ وَ $]1;+\infty[$، ولدينا: $f'(x) = a - \frac{c}{(x-1)^2}$.

2)بالاعتماد على جدول تغيرات الدالة f :

أ-تعيين الأعداد الحقيقية a، b، c:

لدينا: $\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a - \frac{c}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = 0 \\ a - \frac{c}{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2} = 0 \\ \frac{1}{2}a + b + \frac{c}{\frac{1}{2}-1} = 1 \\ \frac{3}{2}a + b + \frac{c}{\frac{3}{2}-1} = 3 \end{cases}$ وعليه: $\begin{cases} a - 4c = 0 & \dots(1) \\ \frac{1}{2}a + b - 2c = 1 & \dots(2) \\ \frac{3}{2}a + b + 2c = 3 & \dots(3) \end{cases}$،

من (1) نجد $a = 4c$ وبالتعويض في (2) يكون $2c + b - 2c = 1$ أي: $b = 1$،

وبالتعويض في (3) نجد $6c + 1 + 2c = 3$ أي: $c = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$، وبالتالي: $a = 4c = 4\left(\frac{1}{4}\right) = 1$.

إذن $f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$ وَ $f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}$.

ب-تعيين $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x)$: $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$.

تفسير النتيجة بيانياً:

المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ **(المُوازي لمحور التراتيب)** مُقارب للمنحنى المُمثل للدّالة f.

جـ-المقارنة بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و$\frac{3}{4}$ بالدّالة f مع التعليل:

لدينا: $f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{3}{2}\right)$ لأنّ: $\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ و**f متناقصة تماما** على المجال $\left[\frac{1}{2};1\right[$.

3) $c = \frac{1}{4}$؛ $b = 1$؛ $a = 1$ **لدينا:** $f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$ وَ $f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}$،

(C) المنحنى البياني المُمثل لتغيرات الدّالة f في **معلم متعامد ومتجانس**.

أ) تبيان أنّه عندما يؤول x إلى $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ فإنّ المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته، $(\Delta): y = x + 1$:

ط01: لدينا: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to-\infty}\left[x+1+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-(x+1)\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\frac{1}{4}}{x-1}\right] = 0$

وَ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty}\left[x+1+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-(x+1)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{1}{4}}{x-1}\right] = 0$

إذن: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ **مقارب مائل** لـ(C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ط02: بمأنّ: $\begin{cases} f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} \\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{4}}{x-1} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{4}}{x-1} = 0 \end{cases}$، فإنّ: المستقيم $(\Delta): y = x + 1$ **مُقارب مائل** لـ(C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ): (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

لدينا: $f(x) - y = \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$ ومنه: إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة المقام $(x - 1)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	‖	+
$f(x)-y$	-	‖	+
الوضعية	(C) يقع **تحت** (Δ)	‖	(C) يقع **فوق** (Δ)

جـ) اثبات أن النقطة $\omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C):

نُثبت أنّ $f(2(1)-x)+f(x) = 2(2)$ أي: $\boxed{f(2-x)+f(x) = 4}$

لدينا: $f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$

ومنه: $f(2-x) = (2-x) + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{(2-x)-1} = -x + 3 + \frac{\frac{1}{4}}{-x+1} = -x + 3 - \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$

وعليه: $f(2-x) - f(x) = \left[-x + 3 - \frac{\frac{1}{4}}{x-1}\right] - \left[x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}\right] = 4$

إذن: $\omega(1;2)$ مركز تناظر لـ(C).

د) تعيين نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة: $f(x) = 0$)

لدينا: $f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{4(x-1)} = \frac{(x+1)[4(x-1)]+1}{4(x-1)} = \frac{4x^2-3}{4(x-1)}$

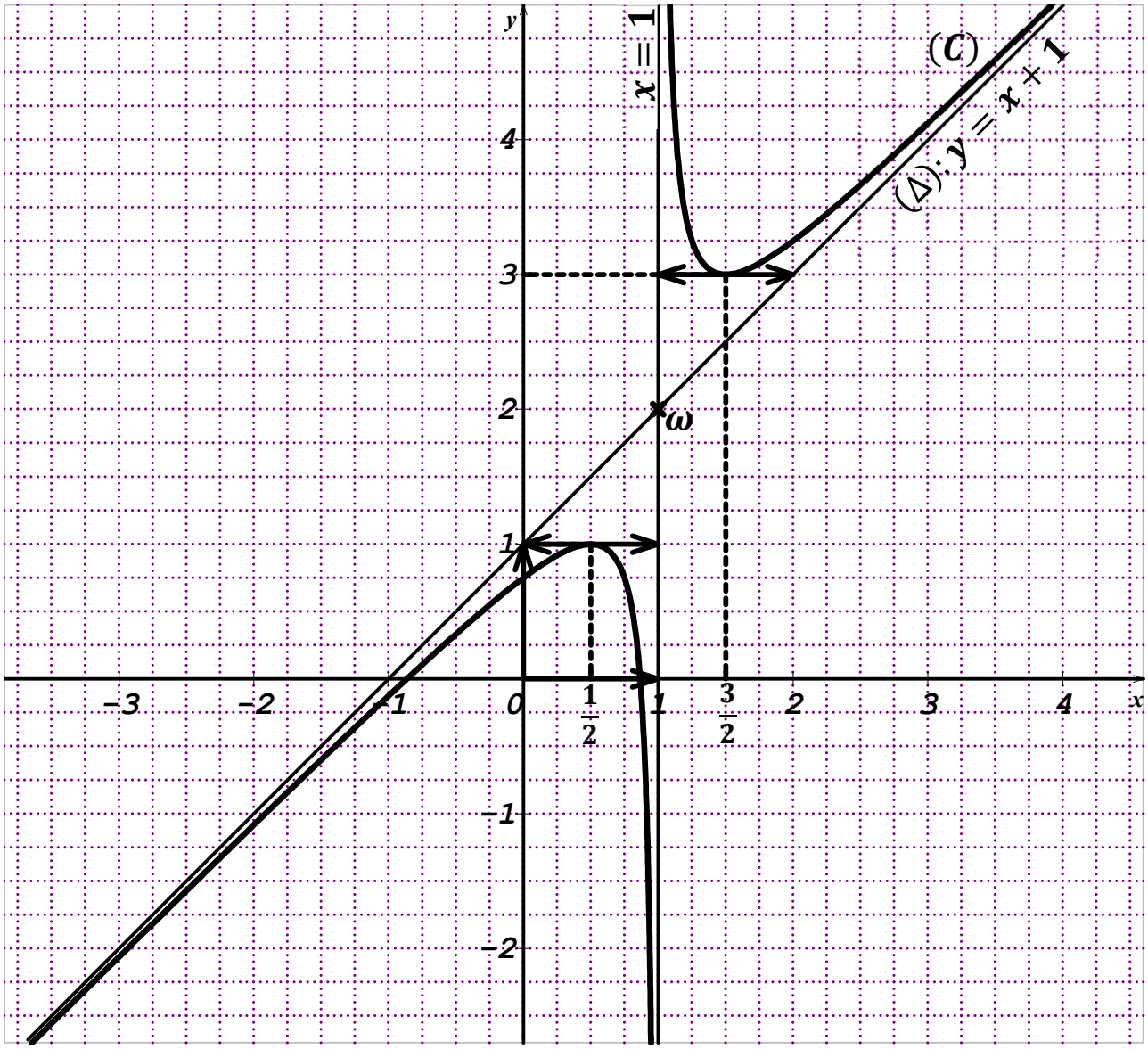
$f(x) = 0$ معناه: $\frac{4x^2-3}{4(x-1)} = 0$

ومنه: $4x^2 - 3 = 0$ و $4(x-1) \neq 0$

أي: $\frac{3}{2}$ و

$(C) \cap$.

4) λ عدد حقيقي، تعيين بيانياً، حسب قيم λ عدد حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$: الرسم:



من البيان نجد:

إذا كـــــــــان	فإنّ المعـــــــادلة $f(x) = \|\lambda\|$
$\lambda \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$	لها حلان
$\lambda = -3$ أو $\lambda = 3$	لها حل مضاعف
$\lambda \in]-3; -1[\cup]1; 3[$	ليس لها حلول
$\lambda = -1$ أو $\lambda = 1$	لها حل مضاعف
$\lambda \in]-1; 1[$	لها حلان

المناقشة أفقية
عدد حقيقي $= f(x)$

إضافات: توضيح فقط

حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$ **بيانيا** هي **فواصل** نقط **تقاطع** المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = |\lambda|$.

(المستقيم ذو المعادلة $y = |\lambda|$ **ينطبق على حامل محور الفواصل أو يقع فوقه** و**يُوازيه** لأنّ $|\lambda| \geq 0$)

الحالة الأولى: $|\lambda| > 3$ (التقاطع نقطتين)، $\lambda > 3$ أو $\lambda < -3$ أي: $\lambda \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$.

الحالة الثانية: $|\lambda| = 3$ (التقاطع نقطة)، $\lambda = 3$ أو $\lambda = -3$.

الحالة الثالثة: (لا يوجد تقاطع)، **أو** أي: $\lambda \in]-3;$

الحالة الرابعة

حل التمرين 02: (05 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: P دّالة كثير حدود معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $P(x)=x^3-4x^2+4x+\frac{1}{2}$.

1.تشكّيل جدول تغيّرات الدّالة P على $\mathbb{R}$:

أ) النهايات: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty}$ ؛ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty}$.

ب) المشتقة (حساب $P'(x)$): P دّالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا $\boxed{P'(x)=3x^2-8x+4}$.

ج) إشارة المشتقة (إشارة $P'(x)$):

نضع: $P'(x)=0$ نجد: $3x^2-8x+4=0$، مميزها: $\Delta=(-8)^2-4(3)(4)=64-48=16>0$

لها حلين متمايزين هما: $\boxed{x_1=\frac{8-4}{6}=\frac{2}{3}}$ وَ $\boxed{x_2=\frac{8+4}{6}=2}$.

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	α	0	$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$P'(x)$		$+$			0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\frac{91}{54}$	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	$+\infty$

2.تبيان أنّ المعادلة $P(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$:

الدّالة P **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$

(لأنّها من جدول التغيرات متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]$)

ولدينا: $\begin{cases}P\left(-\frac{1}{2}\right)=-2,62\\P(0)=\frac{1}{2}\end{cases}$ أي: $P\left(-\frac{1}{2}\right)\times P(0)<0$

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $P(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$.

3.استنتاج إشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$: من جدول التغيرات نجد:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

4.لدينا: G دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $G(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2+\frac{1}{2}x$.

تعيين اتجاه تغيّر الدالة G على $\mathbb{R}$:

ب) المشتقة (حساب $G'(x)$):

G دّالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $\boxed{G'(x)=x^3-4x^2+4x+\frac{1}{2}=P(x)}$.

لـ$G'(x)$ و $P(x)$ **نفس** الإشارة

حل التمرين 03: (03 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

الإجابة بـــ: **خطأ** أو **صحيح** مع **تبرير الإجابة:**

1.المستقيم الذي معادلته $\boxed{y=2}$ مقارب للمنحنى (C_f)، _____ **(صحيح)**

لأنّ: $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=2}$ وَ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=2}$.

2.المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا، _____ **(خطأ)**

لأنّ: (C_f) **لا يقطع حامل محور الفواصل**

(**توضيح** (C_f) يقع فوق المقارب الأفقي الذي معادلته $\boxed{y=2}$ أي $f(x)>2$).

3.مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>0$ هي $S=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[=D_f$، _____ **(صحيح)**

لأنّ: من أجل كل x من D_f، فإنّ $f(x)>2$.

4.في المجال $]-\infty;-1[$ يكون: "$f(-2)>f(x)$ عندما يكون $x<-2$"، _____ **(صحيح)**

لأنّ: بمأنّ f **متزايدة تماما** على المجال $]-\infty;-1[$، فإنّه "لمـا $x<-2$ يكون $f(x)<f(-2)$".

5.النقطة $A(-3;\boxed{1})$ تنتمي إلى المنحنى (C_f)، _____ **(خطأ)**

لأنّ: من أجل كل x من D_f، فإنّ $f(x)>2$.

6.الدّالة f زوجية، _____ **(خطأ)**

لأنّ: D_f غير متناظرة بالنسبة إلى الصفر ($1\in D_f$ و $-1\notin D_f$).

حل التمرين 04: (09 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ، وَ $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$

(C_f) المنحنى المُمثل للدّالة f في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I.1) تعيين الأعداد الحقيقية a، b، c بحيث يكون، $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$:

- **ط01:** لدينا: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)}{x+1}+\frac{c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$

ولدينا من جهة أخرى: $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\a+b=0\\b+c=3\end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=4\end{cases}$ إذن: $\boxed{f(x)=x-1+\frac{4}{x+1}}$.

- **ط02:** $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}=\frac{x^2-1+4}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{4}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}+\frac{4}{x+1}=x-1+\frac{4}{x+1}$.

2)حساب نهايات الدّالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها:

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ وَ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

ولدينا: $\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=-\infty$ ، لأنّ: $\left(\lim_{x\to-1}(x^2+3)=4\right.$.

3)تبيان أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مُوازيا لمحور التراتيب يُطلب تعيين معادلة له:

بمأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x) = -\infty$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = +\infty$

فـإنّ: المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ (المُوازي لمحور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f).

4)تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f):

لدينا: $\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x\to -\infty}\left[x - 1 + \frac{4}{x+1} - (x-1)\right] = \lim\limits_{x\to -\infty}\left[\frac{4}{x+1}\right] = 0$

وَ $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\frac{4}{x+1}\right] = 0$

إذن: المستقيم $(\Delta): y = x - 1$ مستقيم مقارب **مائل** للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

5)دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ): (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

لدينا: $f(x) - y = \frac{4}{x+1}$ ومنه إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة المقام $(x+1)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	-	‖	+
$f(x)-y$	-	‖	+
الوضع النسبي	(C_f) يقع **تحت** (Δ)	‖	(C_f) يقع **فوق** (Δ)

***II*.1) تبيان أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$ فإنّ، $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$:**

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; -1[$ وَ $]-1; +\infty[$، ولدينا: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$

ومنه: $f'(x) = 1 - \frac{4(1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-2^2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1-2)(x+1+2)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

2)تعيين اتجاه تغيّر الدّالة f على مجالي مجموعة تعريفها وتشكّيل جدول تغيّراتها:

لدينا: $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $((x-1)(x+3))$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$x-1$	-	|	-	0	+
$x+3$	-	0	+	|	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+

إذن: f **متناقصة تماماً** على كل من المجالين $]-3; -1]$ و $[-1; 1]$

وَمتزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; -3]$ و $[1; +\infty[$؛ **ويكون جدول تغيراتها كالتالي:**

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	- ‖ -	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-6	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$

حيث:

ولدينا: $\begin{cases} f'(0) = \frac{((0)-1)((0)+3)}{((0)+1)^2} = -3 \\ f(0) = \frac{(0)^2+3}{(0)+1} = 3 \end{cases}$، إذن: $\boxed{(D): y = -3x + 3}$.

III.1) تبيان أنّ النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f):

نُبين أنّ $f(2(-1)-x)+f(x)=2(-2)$ أي: نُبين أنّ $\boxed{f(-2-x)+f(x)=-4}$

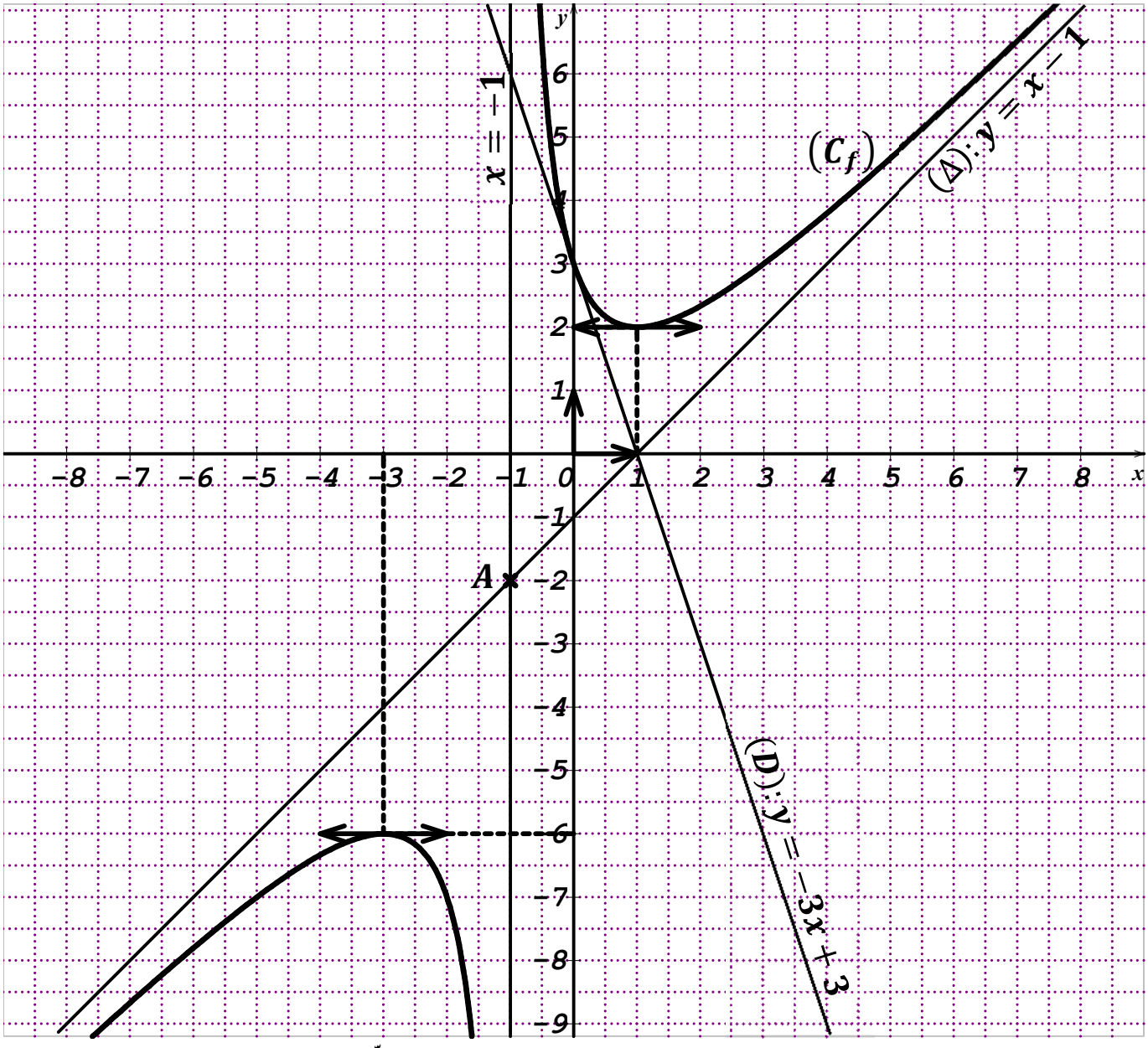
لدينا: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$

ومنه: $f(-2-x) = (-2-x) - 1 + \frac{4}{(-2-x)+1} = -x - 3 + \frac{4}{-x-1} = -x - 3 - \frac{4}{x+1}$

وعليه: $f(-2-x) + f(x) = -x - 3 - \frac{4}{x+1} + x - 1 + \frac{4}{x+1} = -4$

إذن: النقطة $A(-1;-2)$ هي **مركز تناظر** للمنحنى (C_f).

2)رسم كلا من (Δ)، (D) و(C_f):



3)تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي حتى يكون للمعادلة حلاّن مختلفان:

حلول المعادلة $f(x)=m$ بيانياً هي **فواصل نقط تقاطع** (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=m}$.

(استعمل مسطرة وقم بتحريكيها من الأسفل إلى الأعلى بالتوازي مع محور الفواصل عدد التقاطعات مع المنحنى هو عدد الحلول ولا تنسى في نفس الوقت قراءة m على محور التراتيب)

4)حساب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e^2-1$:

بمأنّ (C_f) يقع **فوق** (Δ) على المجال $[1;e^2-1]$

فإنّ: $S=\int_1^{e^2-1}[f(x)-y]\,dx=\int_1^{e^2-1}\left(\frac{4}{x+1}\right)dx=[4\ln|x+1|]_1^{e^2-1}=[4\ln(x+1)]_1^{e^2-1}$

ومنه: $S=4[\ln((e^2-1)+1)-\ln((1)+1)]=4[\ln(e^2)-\ln(2)]=4[2-\ln(2)]$

إذن: $\boxed{S=(8-4\ln(2))u.a}$.

حل التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ وَ $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)تبيان أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإنّ، $f(x)=x-5+\frac{a}{x^2}$:

- **ط01:** لدينا: $f(x)=x-5+\frac{a}{x^2}=\frac{(x-5)x^2+a}{x^2}=\frac{x^3-5x^2+a}{x^2}$،

ولدينا من جهة أخرى: $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$ بالمطابقة نجد: $\boxed{a=4}$ إذن: $\boxed{f(x)=x-5+\frac{4}{x^2}}$.

- **ط02:** $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4}{x^2}=\frac{x^2(x-5)}{x^2}+\frac{4}{x^2}=x-5+\frac{4}{x^2}$.

2)حساب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ وَ $\lim_{x\to0}f(x)$:

لدينا: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ وَ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

وبمأنّ $\begin{cases}\lim_{x\to0}(x^3-5x^2+4)=4\\ \lim_{x\to0}x^2=0^+\end{cases}$، فإنّ: $\lim_{x\to0}f(x)=+\infty$.

3)أ-تبيان أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإنّ، $f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$:

- **ط01:** باستعمال العبارة: $f(x)=x-5+\frac{4}{x^2}$

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=1-\frac{4(2x)}{(x^2)^2}=1-\frac{8x}{x^4}=1-\frac{8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$$

ولدينا من جهة أخرى: $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}=\frac{x^3+2x^2+4x-2x^2-4x-8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$

إذن: $\boxed{f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}}$.

- **ط02:** باسد

$$f'(x)=\frac{(3x^2-10x)\times x^2-(2x)(x^3-5x^2+4)}{[x^2]^2}=\frac{3x^4-10x^3-2x^4+10x^3-8x}{x^4}=\frac{x^4-8x}{x^4}=\frac{x^3-8}{x^3}$$

ولدينا من جهة أخرى: $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}=\frac{x^3+2x^2+4x-2x^2-4x-8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$

إذن: $\boxed{f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}}$.

استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f :

إشارة $f'(x)$: يُمكن كتابتها على الشكل $f'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}=\frac{x-2}{x}\times\frac{x^2+2x+4}{x^2}$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x، $x^2+2x+4>0$ (لأنّ مميزه **سالب تماما** $\Delta=-12<0$)

إذن: إشارة $f'(x)$ من إشارة $\frac{x-2}{x}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x-2$	-		‖	-	0	+	
x	-		‖	+		+	
$f'(x)$	+		‖	-	0	+	

إذن: f **متزايدة تماماً** على كل من المجالين $]0;2]$ و$[2;+\infty[$، **وَمتناقصة تماماً** على المجال $]-\infty;0[$.

ب-تشكيل جدول تغيرات الدّالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	+		‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-2	↗	$+\infty$

حيث: $f(2)=-2$.

4)اثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل، يُطلب تعيين معادلتيهما:

لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty}$؛ إذن: **محور التراتيب** مقارب لـ(C_f).

ولدينا: $\begin{cases} f(x)=x-5+\frac{4}{x^2} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0 \end{cases}$؛ إذن: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=x-5}$ مقارب مائل لـ(C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

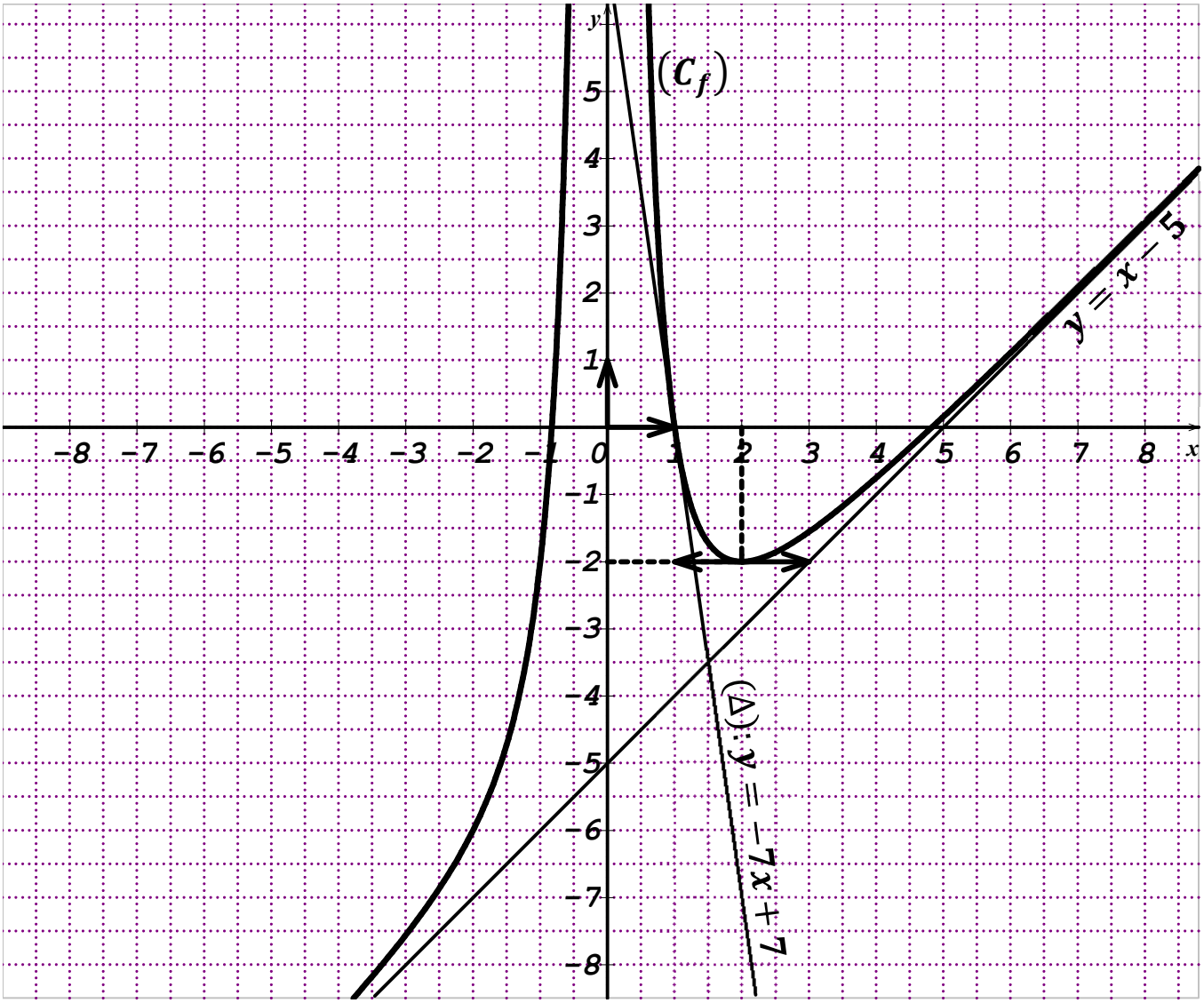
5)ايجاد معادلة لـ(Δ) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1:

معادلة (Δ) من الشكل: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(1)=\frac{(1)^3-8}{(1)^3}=\frac{1-8}{1}=-7 \\ f(x)=(1)-5+\frac{4}{(1)^2}=-4+4=0 \end{cases}$ بالتعويض نجد: $y=-7(x-1)+0$

إذن: _____

6)رسم (Δ) والمنحنى (C_f):



7)أ-تعيين الدّالة الأصلية F للدّالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تُحقق، $F(2) = -10$:

- لدينا: $f(x) = x - 5 + \frac{4}{x^2} = x - 5 + 4 \times \frac{1}{x^2}$، ومنه: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{4}{x} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$
- ولدينا: $F(2) = -10$ معناه: $\frac{1}{2}(2)^2 - 5(2) - \frac{4}{(2)} + c = -10$

أي: $2 - 10 - 2 + c = -10$

وبالتالي: $c = 0$ إذن: $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{4}{x}}$.

ب-حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$:

بمأنّ (C_f) يقع **تحت** محور الفواصل على المجال $[1;2]$، فـإنّ:

$$S = \int_1^2 -f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx = [F(x)]_2^1 = F(1) - F(2) = -\frac{17}{2} - (-10) = -\frac{17}{2} + 10$$

إذن: $\boxed{S = \frac{3}{2}u.a}$.

(C) المنحنى البياني الممثل للدّالة f في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد** $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

الوحدة $1\ cm$ على محور الفواصل و$4\ cm$ على محور التراتيب.

1)تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا، $f(x)=1-\frac{x}{x^2+1}$:

لدينا: $1-\frac{x}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x}{x^2+1}=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}=f(x)$، إذن: $\boxed{f(x)=1-\frac{x}{x^2+1}}$.

2)حساب نهاية الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$، واستنتاج أنّ (C) يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ ، نستنتج أنّ

المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=1}$ (**المُوازي لمحور الفواصل**) مقارب لـ(C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

3)دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$: (ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$)

لدينا: $f(x)-y=1-\frac{x}{x^2+1}-1=\frac{-x}{x^2+1}$

إذن: إشارة الفرق $f(x)-y$ من إشارة البسط $(-x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		-	0	+	
$f(x)-1$		+	0	-	
الوضع النسبي	(C) يقع **فوق** (Δ)		(C) **يقطع** (Δ)		(C) يقع **تحت** (Δ)

4)حساب $f'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدّالة f ثم تشكّيل جدول تغيراتها:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+1)-(2x)(x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-x^2-1-2x^3+2x^2-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط (x^2-1)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

إذن: f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ وَ $[1;+\infty[$، **وَمتناقصة تماما** على المجال $[-1;1]$؛

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

5)تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(-x)=2-f(x)$:

لدينا: $f(-x)=1-\frac{(-x)}{(-x)^2+1}=1+\frac{x}{x^2+1}=2-1+\frac{x}{x^2+1}=2-\left(1-\frac{x}{x^2+1}\right)=2-f(x)$

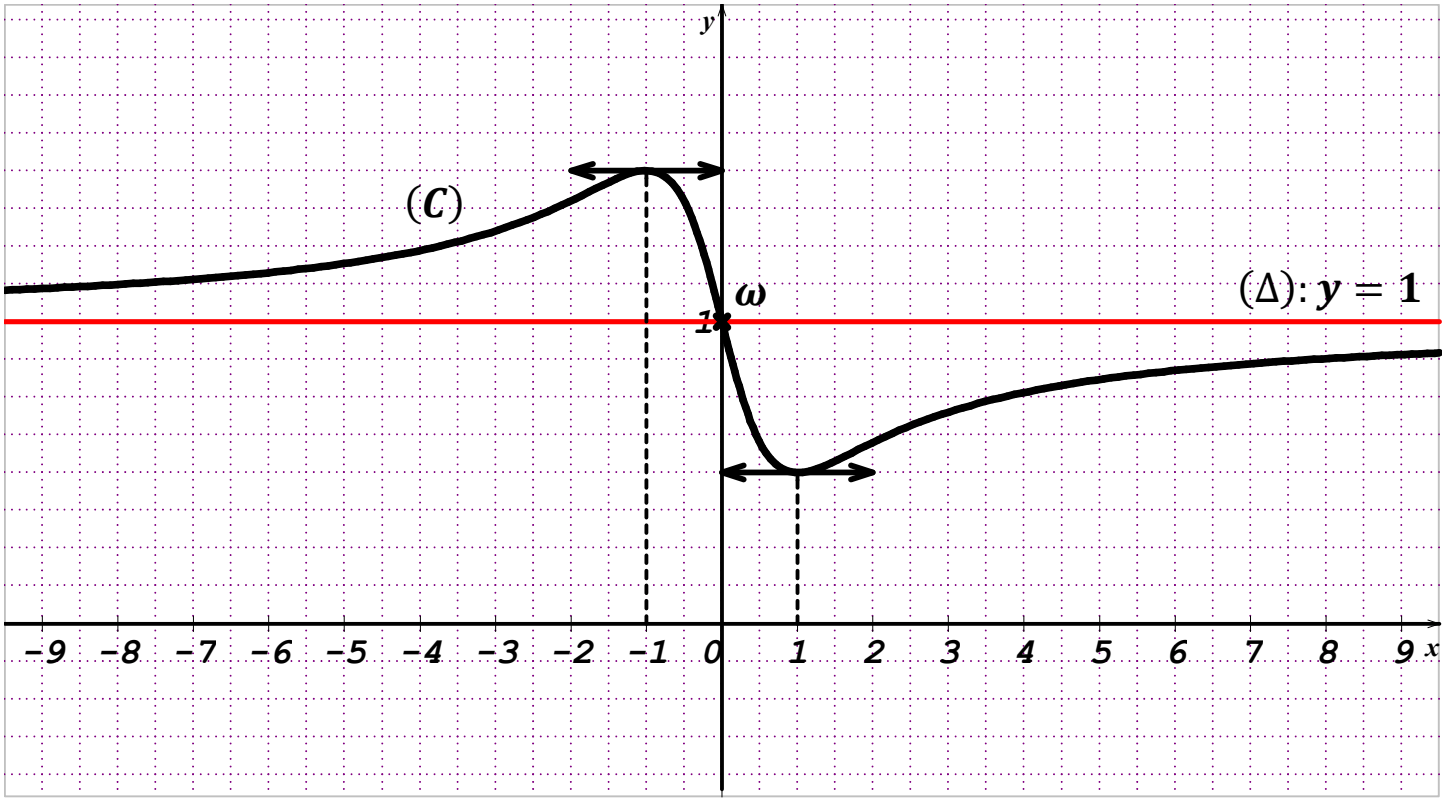
إذن: $\boxed{2-f(x)}$.

استنتاج أنّ

$f(2(0)$؛

إذن النقطة $\omega(0;1)$ هي **مركز تناظر** لـ(C).

6)رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C):



7)أ. حساب التكامل، $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$:

لدينا: $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}[ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{ln2}{2}$

ب. حساب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما $x=0$ و$x=1$:

لدينا: $A = 4cm^2 \times \int_0^1 f(x)dx = 4cm^2 \times \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$

ومنه: $A = 4cm^2 \times \left(\int_0^1 1dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx\right) = 4cm^2 \times \left([x]_0^1 - \frac{\ln 2}{2}\right)$

وعليه: $A = 4cm^2 \times \left(1 - \frac{\ln 2}{2}\right) = (4 - 2\ln 2)cm^2$.

حل التمرين 07: (05 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}$ وَ $D_f =]-1;+\infty[$.

1)حساب نهايتي f عند -1 بقيم أكبر وعند $+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}\right) = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1) = 0^+$.

وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{57600}{x+1} = 0$.

2)أ-تبيان أنّه من أجل كل من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$:

f قابلة للاشتقاق على ، ولدينا:

f' —

وبالتالي: $\boxed{f'(x)=\frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}}$.

ب-استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$، ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:

لدينا: $x^2+x+240>0$ (لأنّ مميزه **سالب تماما** $\Delta=(1)^2-4(1)(240)=-959<0$)

وبالتالي: إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x^2+x-240)$

نضع: $x^2+x-240=0$ $(*)$

نحل المعادلة $(*)$: نحسب المميز Δ: $\Delta=(1)^2-4(1)(-240)=1+960=961>0$

ومنه: $x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{961}}{2(1)}=\frac{-1+31}{2}=\frac{30}{2}=15\in]-1;+\infty[$

و $x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{961}}{2(1)}=\frac{-1-31}{2}=\frac{-32}{2}=-16\notin]-1;+\infty[$

x	-1		15		$+\infty$
$x^2+x-240$	‖	-	0	+	
$f'(x)$	‖	-	0	+	

إذن: f **متناقصة تماما** على المجال $[15;1-[$، و**متزايدة تماما** على المجال $[15;+\infty[$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	-1		15		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	4825	↗	$+\infty$

جـ-ايجاد الدالة الأصلية H للدّالة $h: x\mapsto\frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x=0$:

مجموعة الدّوال الأصلية للدّالة h على المجال $]-1;+\infty[$ هي الدّوال: $H(x)=\ln(x+1)+c$، حيث c ثابت حقيقي، ونعلم أنّ $H(0)=0$ ومنه: $c=0$ إذن: $\boxed{H(x)=\ln(x+1)}$.

3) تُنتج إحدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و200 آلة على الأكثر.

تُنمذَجُ الكلفة الهامشية C_m لإنتاج x آلة إضافية للشركة على المجال $[5;200]$ بالدّالة f أي أنّ: من أجل كل x من المجال $[5;200]$، $C_m(x)=f(x)$.

أ-ايجاد عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن:

لدينا: $C_m(x)=f(x)$

من جدول تغيّرات الدّالة f، **4825** هي **قيمة حدية صغرى** لـf على المجال $[5;200]$، من أجل $x=15$.

إذن: عدد الآلات التي يجب أن تُنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يُمكن هو ***15***.

ب-نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج x آلة. ونُذكّر أنّ $C'(x)=C_m(x)$.

ايجاد الكلفة الإجمالية $C(x)$، علما أنّ الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000DA:

- لدينا: $C'(x)=C_m(x)=f(x)$ أي: C هي **الدّالة الأصلية** للدّالة $C_m=f$ حيث $C(5)=4\times10^4$
- ولدينا: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+100+\frac{57600}{x+1}$

يكون:

ومنه: $c = -\frac{6625}{12} - 57600\ln 6 + 4 \times 10^4$

وبالتالي: $\boxed{c = \frac{473375}{12} - 57600\ln 6}$

بالتعويض نجد: $C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600\ln(x+1) + \frac{473375}{12} - 57600\ln 6$

إذن: $\boxed{C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600\ln\left(\frac{x+1}{6}\right) + \frac{473375}{12}}$.

استنتاج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى:

لدينا: $C(15) = \frac{1}{12}(15)^4 + 100(15) + 57600\ln\left(\frac{15+1}{6}\right) + \frac{473375}{12} = 101662,43DA$.

حل التمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

اختيار الاقتراح الصحيح الوحيد، مع التبرير:

1) 2) **متتاليات عددية**.

3)منحنى الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x^2-1)^3$، يقبل مماساً في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{2}$ معادلته من الشكل: $y = f'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) + f(\sqrt{2})$،

ولدينا: $\begin{cases} f(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}^2-1\right)^3 = 1 \\ f'(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}\left(\sqrt{2}^2-1\right)^2 = 6\sqrt{2} \end{cases}$ لأنّ: $\begin{cases} f(x) = (x^2-1)^3 \\ f'(x) = 3\times 2x(x^2-1)^2 = 6x(x^2-1)^2 \end{cases}$

بالتعويض نجد: $y = 6\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) + 1 = 6\sqrt{2}x - 11$،

إذن: الاقتراح الصحيح هو **ب)** $y = 6\sqrt{2}x - 11$.

4) 5) 6) **إحتمالات**.

حل التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 02// الشعبة: تسيير وإ.

I) لدينا: $g(x) = x^3 - x^2 - 1$ وَ $D_g =]-\infty; +\infty[$.

1)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$.

2)دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ تشكّل جدول تغيراتها:

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $g'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن: g **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ وَ $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$، و**متناقصة تماما** على المجال $\left[0; \frac{2}{3}\right]$؛

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	0		$\frac{2}{3}$	α	$+\infty$
$g'(x)$	+	○	-	○	+	
$g(x)$	$-\infty$	-1	- - -	$\frac{-31}{27}$		$+\infty$

3)تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,46<\alpha<1,48$:

لدينا: g **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]1,46;1,48[$ (لأنها **متزايدة تماما** على $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$)

ولدينا: $\begin{cases} g(1,46)=-0,02 \\ g(1,48)=+0,05 \end{cases}$ أي: $g(1,46)\times g(1,48)<0$.

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,46<\alpha<1,48$،

أي: $\boxed{g(\alpha)=0}$.

4)استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x:

من السؤال 3) نُلخص إشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	○	+

II)مؤسسة صناعية تنتج يوميا كميّة q (مُقدرة بالطّن) من منتوج بكلفة متوسطة C_M (مُقدرة بملايين الدّنانير) معرّفة على $[0;10]$ بـ: $C_M(q)=\frac{1}{2}q^2-q+1-\frac{1}{2}\ln(q^2+1)$.

1)تبيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي q من $[0;10]$، $C'_M(q)=\frac{g(q)}{q^2+1}$:

لدينا: $C_M(q)=\frac{1}{2}q^2-q+1-\frac{1}{2}\ln(q^2+1)$

ومنه: $C_M'(q)=q-1-\frac{1}{2}\left(\frac{2q}{q^2+1}\right)=q-1-\frac{q}{q^2+1}=\frac{(q-1)(q^2+1)-q}{q^2+1}=\frac{q^3-q^2-1}{q^2+1}=\frac{g(q)}{q^2+1}$.

2)تعيين اتجاه تغيّر الكلفة المتوسطة C_M ثمّ تشكيل جدول تغيراتها: (بأخذ $\alpha\simeq 1,47$)

لدينا: $C_M'(q)=\frac{g(q)}{q^2+1}$ ومنه: إشارة $C_M'(q)$ من إشارة $g(q)$ على المجال $[0;10]$ (لأنّ $q^2+1>0$)

q	1	α	10
$C_M'(q)$	-	○	+

إذن: C_M **متناقصة تماما** على المجال $[1;\alpha]$، وَ**متزايدة تماما** على المجال $[\alpha;10]$.

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

q	1	α	10
$C_M'(q)$	-	○	+
$C_M(q)$	0,15	0,04	38,69

3)تعيين الكميّ

4)ايجاد الكلفة الإجمالية C لإنتاج 2 طن يوميا: (أي:$C(2)$)

لدينا: $C(2) = 2C_M(2) = 2\left(\frac{1}{2}(2)^2 - 2 + 1 - \frac{1}{2}\ln(2^2+1)\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\ln(5)\right)$

إذن: $\boxed{C(2) \simeq 0{,}39}$ أي: $390000D$.

حل التمرين 10: (07 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I) لدينا : $g(x) = x^3 + x - 2$ وَ $D_g = \mathbb{R}$.

بقراءة بيانية تعيين $g(1)$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

من البيان، لدينا: $g(1) = 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II) لدينا : $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2}$ وَ $D_g =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$،

و(C_f) التمثيل البياني لـf في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وَ$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty}$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

وَ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty}$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

ب) حساب $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ وتفسّير النتيجة بيانيا:

لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{-(x-1)}{x^2} = +\infty}$ لأنّ $\lim\limits_{x\to0}(-(x-1)) = 1$، $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0^+$ وَ $\lim\limits_{x\to0} x = 0$.

تفسّيرها البياني: محور التراتيب مقارب لـ(C_f).

2)تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$:

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x) = 1 - \frac{1(x^2)-2x(x-1)}{(x^2)^2} = 1 - \frac{x^2-2x^2+2x}{x^4} = 1 - \frac{-x+2}{x^3} = \frac{x^3+x-2}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

-استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ تشكّيل جدول تغيّراتها:

إشارة $f'(x)$ نُلخصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	‖	+	
$g(x)$	-	‖	- 0	+
$f'(x)$	+	‖	- 0	+

إذن:

متزايدة تماما على كل من المجالين وَ ، **وَ متناقصة تماما** على المجال

؛ **ويكو**

x	$-\infty$	α	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖ $+\infty$	↘ 01	↗ $+\infty$

3)أ) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f):

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\frac{x-1}{x^2}-x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{x-1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x} = 0$

وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x-1}{x^2}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{x-1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x} = 0$

إذن: المستقيم (Δ) ذا المعادلة $\boxed{y = x}$ **مقارب مائل** للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$.

لدينا: $f(x) - y = \frac{-x+1}{x^2}$، ومنه: إشارة الفرق من إشارة البسط $(-x+1)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-x+1$	$+$	‖ $+$	0	$-$
$f(x)-x$	$+$	‖ $+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C) يقع فوق (Δ)	‖ (C) يقع فوق (Δ)	(C) يقطع (Δ)	(C) يقع تحت (Δ)

4)تبيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,4; -1,3[$:

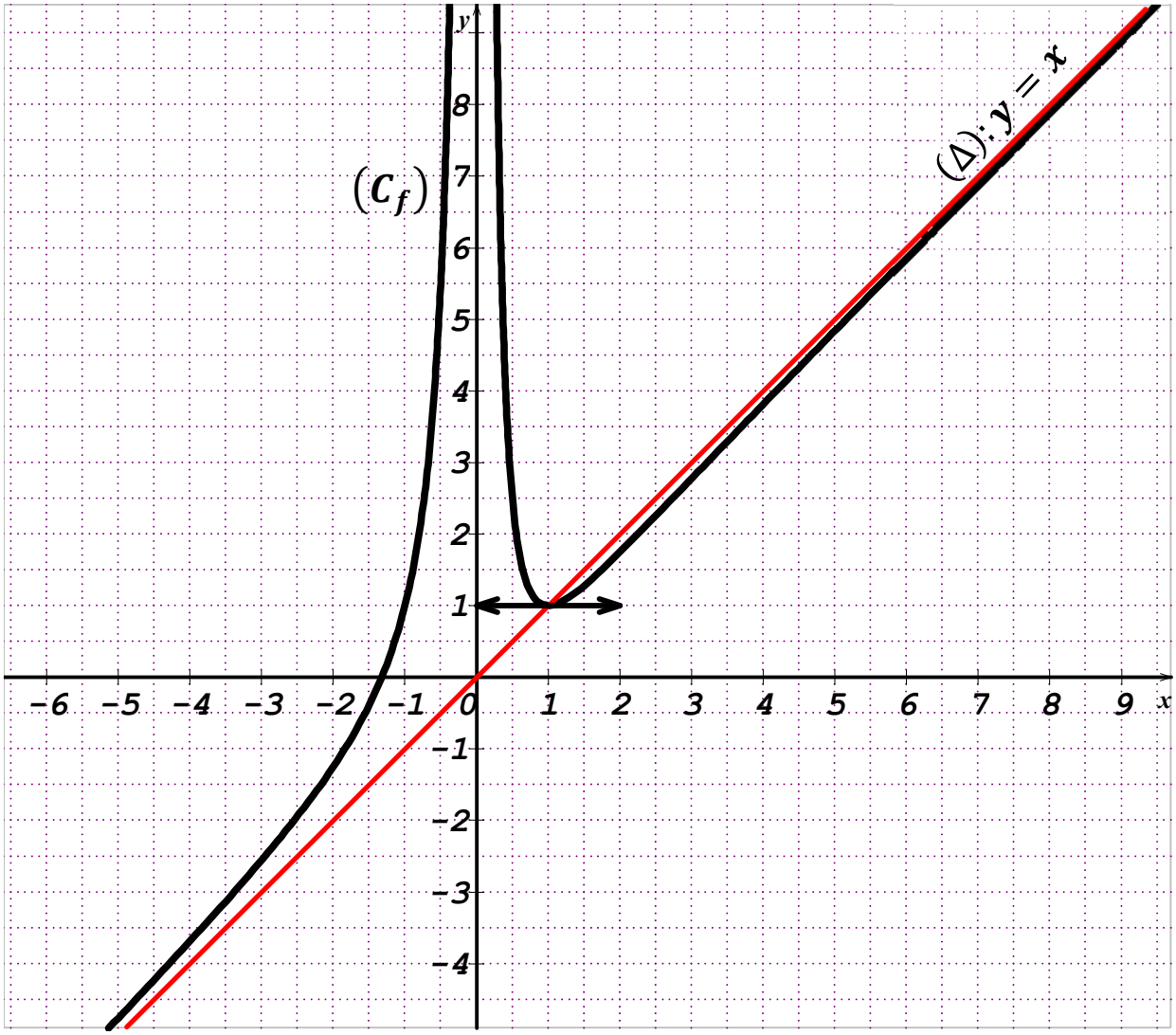
لدينا: f **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]-1,4; -1,3[$ (لأنها **متزايدة تماما** على $]-\infty; 0[$)

ولدينا: $\begin{cases} f(-1,4) \simeq -0,18 \\ f(-1,3) \simeq +0,06 \end{cases}$ أي: $f(-1,4) \times f(-1,3) < 0$.

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,4; -1,3[$،

أي: $\boxed{f(\alpha) = 0}$.

5)رسم (Δ) ثمّ المنحنى (C_f):



6)حساب A مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها، $y = x$، $x = 1$ وَ $x = 3$:

$$\int_1^3 [x - f(x)]dx = \left[\frac{1}{x} + \ln x\right]_1^3 = \left(\ln 3 - \frac{2}{3}\right) u.a$$