طبعة 2021

كتاب العبقري في الرياضيات

الأعداد والحساب

الثالثة ثانوي

الشعب: ⊠ تقني رياضي؛

⊠ رياضيات.

مجلة العبقري في الرياضيات (الأعداد والحساب)

الدروس// الشعبة: الثالثة تقني رياضي؛ رياضيات.

دروس: حول الأعداد والحساب// التحضير الجيد للبكالوريا// الشعبة: 03 تر؛ ر.

❶ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:

① تعريف:

a وَ b عددان صحيحان و a غير معدوم.

القول أنّ العدد a **يقسم** العدد b يعني وُجود عدد صحيح k حيث: $\boxed{b=ak}$.

نقول كذلك a **قاسم** للعدد b

أو b **مضاعف لـ** a

أو b **يقبل القسمة على** a، نكتب: $a|b$ ونقرأ "a **يقسم** b"

مثال: $48=6\times 8=(-6)\times(-8)$، ومنه: $6|48$، وكذلك: $-8|48$.

ملاحظة: للعددين a وَ $-a$ نفس القواسم في $\mathbb{Z}$.

توضيح: إذا كان: $c|a$ فإنّ: $a=ck$ حيث $k\in\mathbb{Z}$، ومنه: $-a=c(-k)$ وبالتالي: $c|-a$،

إذن: للعددين a وَ $-a$ نفس القواسم في $\mathbb{Z}$.

② خواص قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:

a؛ b وَ c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة.

الخاصية 1): إذا كان: a يقسم b وَ b يقسم c، فإنّ: a يقسم c؛

أي: إذا كان: $\begin{cases}a|b\\b|c\end{cases}$، فإنّ: $a|c$. (استلزام)

الخاصية 2): إذا كان: a يقسم b، فإنّه: من أجل كل عدد صحيح m، a يقسم mb؛

أي: إذا كان: $a|b$، فإنّ: $a|mb$ (حيث $m\in\mathbb{Z}$).

الخاصية 3): إذا كان: a يقسم b، فإنّه: من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m، ma يقسم mb؛

أي: إذا كان: $a|b$، فإنّ: $ma|mb$ ($m\in\mathbb{Z}^*$).

الخاصية 4): إذا كان: a يقسم العددين b وَ c، فإنّه: من أجل كل عددين صحيحين m وَ n، a يقسم $mb+nc$؛

أي: إذا كان: $\begin{cases}a|b\\a|c\end{cases}$، فإنّ: $a|mb+nc$؛ $(m;n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ أو $(m;n)\in\mathbb{Z}^2$.

توضيح:

الخاصية 1): إذا كان: $\begin{cases}a|b\\b|c\end{cases}$، فإنّ: $\begin{cases}b=ak;k\in\mathbb{Z}\\c=bk';k'\in\mathbb{Z}\end{cases}$، ومنه: $c=a(kk)$ إذن: $a|c$.

الخاصية 2): إذا كان: $a|b$، فإنّ: $b=ak;k\in\mathbb{Z}$، ومنه: $mb=a(mk)$ (حيث $m\in\mathbb{Z}$)؛ إذن: $a|mb$.

الخاصية 3): إذا كان: $a|b$، فإنّ: $b=ak\,;k\in\mathbb{Z}$، ومنه: $mb=(ma)k$ (حيث $m\in\mathbb{Z}^*$)؛ إذن: $ma|mb$.

الخاصية 4): إذا كان: $\begin{cases}a|b\\a|c\end{cases}$، فإنّ: $\begin{cases}b=ak;k\in\mathbb{Z}\\c=ak';k'\in\mathbb{Z}\end{cases}$،

ومنه: $\begin{cases}mb=a(mk);m\in\mathbb{Z}\\\end{cases}$،

وبالتالي: ، إذن: .

تمرين ص

الحل:

تعيين كل الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $n+4$ قاسماً للعدد 13 و$|n| \leq 22$:

☒ $13|n+4$ معناه: $n+4=13k$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)، ومنه: $\boxed{n=13k-4}$.

☒ $|n| \leq 22$ معناه: $-22 \leq n \leq 22$،

ومنه: $-22 \leq 13k-4 \leq 22$

وعليه: $\frac{-18}{13} \leq k \leq \frac{26}{13}$، وبالتالي: $k \in \{-1;0;1;2\}$، إذن: $\boxed{n \in \{-17;-4;9;22\}}$.

تمرين 10 ص56:

10 عيّن كل الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $5n+7$ قاسما لِـ12.

الحل:

تعيين كل الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $5n+7$ قاسماً لـ 12:

☒ $5n+7|12$ معناه: $5n+7 \in D_{12}$،

أي: $5n+7 \in \{-12;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;12\}$

إذن: $\boxed{n \in \{-2;1;-1\}}$.

نحل جميع المعادلات:
$5n+7=-12$
$5n+7=-6$
$5n+7=12$
نأخذ قيم n **الصحيحة**.

تمرين 12 ص56:

12 1) عيّن الأعداد الصحيحة n حيث يكون $5n+6$ يقسم 34.

2) عين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $5n+6$ قاسما للعدد $n+8$.

الحل:

1)تعيين الأعداد الصحيحة n حيث يكون $5n+6$ يقسم 34:

☒ $5n+6|34$ معناه: $5n+6 \in D_{34}$،

أي: $5n+6 \in \{-34;-17;-2;-1;1;2;17;34\}$

إذن: $\boxed{n \in \{-8;-1\}}$.

نحل جميع المعادلات:
$5n+6=-34$
$5n+6=-17$
$5n+6=34$
نأخذ قيم n **الصحيحة**.

2)تعيين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $5n+6$ قاسماً للعدد $n+8$:

☒ $5n+6|n+8$ ومنه: $5n+6|5(n+8)$ **الخاصية 2)**

وعليه: $5n+6|5(n+8)-(5n+6)$

أي: $5n+6|34$، وحسب نتيجة السؤال 1) فإنّ: $\boxed{n \in \{-8;-1\}}$.

❷ القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:

① القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:

مبرهنة:

a **عدد صحيح** وَ b **عدد طبيعي غير معدوم.**

توجد **ثنائية وحيدة** $(q;r)$ من **الأعداد الصحيحة حيث:** $\begin{cases} a=bq+\boxed{r} \\ 0 \leq r < b \end{cases}$.

☒ تسمى عملية **البحث عن الثنائية** $(q;r)$ **بـ القسمة الإقليدية** للعدد a على العدد b.

☒ يسمى q **حاصل القسمة الإقليدية** للعدد a على العدد b، ويسمى r **باقي القسمة الإقليدية** للعدد a على العدد b.

توضيح: العدد a **إما مضاعف** لـ b **وَإما محصور بين مضاعفين متعاقبين (متتابعين)** لـb،

أي: يوجد **عدد صحيح** q **وحيد** حيث: $\boxed{bq \leq a < b(q+1)}$،

ومنه: $0 \leq \underbrace{a-bq}_{r} < b$، بوضع: $r=a-bq$ نجد: $\begin{cases} a=bq+\boxed{r} \\ 0 \leq r < b \end{cases}$.

ملاحظات:

☒ في حالة

$\begin{cases} a=bq \\ 0 \leq r < \end{cases}$

تمرين 18 ص56:

18 عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b في كل حالة من الحالات التالية:

أ - $a = 118$ و $b = 5$.

ب - $a = 152$ و $b = 7$.

جـ - $a = -118$ و $b = 5$.

د - $a = -152$ و $b = 7$.

الحل:

تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b في كل حالة:

أ- $a = 118$ وَ $b = 5$:

لدينا: $\boxed{3} + b(23) = a$، إذن: باقي القسمة الإقليدية لـa على b هو $\boxed{3}$.

ب- $a = -152$ وَ $b = 7$:

لدينا: $\boxed{2} + b(-22) = a$، إذن: باقي القسمة الإقليدية لـa على b هو $\boxed{2}$.

-152	7
154	-21 $\boxed{-1}$
	-22
$\boxed{2}$	

تمرين 19 ص56:

19 عيّن الأعداد الطبيعية n الأصغر من 100، والذي يكون باقي قسمتها على 41 هو 5.

الحل:

تعيين الأعداد الصحيحة n الأصغر من 100 والذي يكون باقي قسمتها على 41 هو 5:

☒ لدينا: $\boxed{5} + 41q = n \quad (q \in \mathbb{N})$

☒ $n < 100$ معناه: $41q + 5 < 100$ ومنه: $q < \frac{95}{41}$ وبالتالي: $q \in \{0\,;\,1\,;\,2\}$ إذن: $\boxed{n \in \{5\,;\,46\,;\,87\}}$.

تمرين 24 ص57:

24 a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث: $a + b = 416$ وباقي القسمة الإقليدية لِـa على b هو 61.

عيّن a و b.

الحل:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومان** حيث: $a + b = 416$ و**باقي** القسمة الإقليدية لـــa على b هو **61**.

تعيين a وَ b:

☒ لدينا: $\begin{cases} a + b = 416 \\ a = bq + \boxed{61} \end{cases} ; q \in \mathbb{N}$ مع $61 < b$، ومنه: $(bq + 61) + b = 416$

وعليه: $b(q + 1) = 355$

يعني: $b \mid 355$

ومنه: $b \in D_{355}$، أي: $b \in \{1\,;\,5\,;\,71\,;\,355\}$

☒ وبمأنّ: $r = 61 < b$ فإنّ: $\boxed{b = 71}$ **أو** $\boxed{b = 355}$.

- في حـالة $b = 71$، نجد: $a = 345$.
- وفي حالة $b = 355$، نجد: $a = 61$.

تمرين 66 ص59:

66 ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 71 على 72؟

الحل:

باقي القسمة الإقليدية للعدد **71** على **72** هو: **71**.

تمرين 68 ص59:

68 علما أنه يوجد عدد طبيعي k حيث $100^{100} = 13k + 35$. عيّن باقي قسمة 100^{100} على 13.

الحل:

تعيين باقي قسمة ( ) على 13، علماً أنّ:

لدينا: $\square$ $\boxed{9}$.

② القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

a **عدد طبيعي غير معدوم**، نرمز بـD_a إلى **مجموعة قواسم** العدد a، **مثلا:** $D_8 = \{1\,;2\,;4\,;8\}$ وَ $D_0 = \mathbb{N}^*$.

تعريف:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومان**.

☒ D_a وَ D_b **مجموعتا قواسم** a وَ b على الترتيب

☒ $D_a \cap D_b$ **مجموعة القواسم المشتركة** للعددين a وَ b.

☒ يسمى **أكبر عنصر** من المجموعة $D_a \cap D_b$ بـ**القاسم المشترك الأكبر** للعددين a وَ b.

ونرمز له بالرمز $\boxed{PGCD(a;b)}$.

ملاحظات:

① $PGCD(a\,;a) = a \quad (a \in \mathbb{N}^*)$

② $PGCD(1\,;a) = 1 \quad (a \in \mathbb{N}^*)$

③ $PGCD(a\,;0) = a \quad (a \in \mathbb{N}^*)$

④ $PGCD(a\,;b) = c$ **حيث** $D_a \cap D_b = D_c$

(مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين **هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر)**

تمرين 28 ص 57:

28 a و b عددان طبيعيان غير معدومين

علمًا أنّ مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفس مجموعة القواسم لِـ$PGCD(a;b)$.

عيّن كل القواسم المشتركة للعددين 456 و792.

الحل:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومان**

علماً أنّ **مجموعة القواسم المشتركة** للعددين a وَ b **هي نفس مجموعة القواسم** لـ$PGCD(a\,;b)$.

تعيين كل القواسم المشتركة للعددين 456 وَ792:

لدينا: $PGCD(792\,;456) = 24$، إذن: $D_{792} \cap D_{456} = D_{24} = \{1\,;2\,;3\,;4\,;6\,;8\,;12\,;24\}$.

تمرين محلول 02 ص 47:

طريقة ص47:

تمرين:

تعيين كل الثنائيات $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تُحقق، $a^2 - b^2 = 9$:

$a^2 - b^2 = 9$ معناه: $(a-b)(a+b) = 9$،

ومنه: $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=9 \end{cases}$، **أو** $\begin{cases} a-b=3 \\ a+b=3 \end{cases}$، **أو** $\begin{cases} a-b=9 \\ a+b=1 \end{cases}$

إذن: $\boxed{(a\,;b) \in \{(3\,;0)\,;(5\,;4)\}}$.

نحل جميع الجمل في $\mathbb{N}^2$

تمرين 03، 04، 05 وَ06 ص56: (عمل منزلي)

③ خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

❑ **خاصية 01:**

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومان** حيث $a \geq b$، r **باقي** قسمة a على b؛

أي: $\boxed{PGCD(a;b) = PGCD(b;r)}$

توضيح:

نضع: $PGCD(a;b) = d$ و $PGCD(b;r) = d'$

نُبين أن d' :

نعلم أنّ:

ددين b وَ r.

☒ ولدينا: $PGCD(b;r)=d'$، إذن: $\begin{cases}d'|b\\d'|r\end{cases}$، ومنه: $d'|bq+r$ أي: $d'|a$؛ إذن: d' **قاسم مشترك** للعددين a وَ b.

الخلاصة: $D_a\cap D_b=D_b\cap D_r$.

وبالتـالي: $\boxed{PGCD(a;b)=PGCD(b;r)}$.

مثال: $PGCD(150;108)=PGCD(108;42)$.

خوارزمية إقليدس ص48:

❑ **خاصية 02:**

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a وَ b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس.

تمرين محلول:

1) عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 150 وَ108.

2) أوجد ثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حيث أنّ: $150x+108y=6$.

الحل:

1) تعيين $PGCD(150;108)$:

لدينا: $150=108(1)+42$

$108=42(2)+24$

$42=24(1)+18$

$24=18(1)+\boxed{6}$

$18=6(3)+0$

إذن: $\boxed{PGCD(150;108)=6}$.

أو يُمكن استعمال جدول

1) تعيين $PGCD(150;108)$:

إذن: $\boxed{PGCD(150;108)=6}$.

الحاصل		1	2	1	1	3
المقسوم والقاسم	150	108	42	24	18	6
الباقي		42	24	18	6	0

q r

2)إيجاد ثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حيث أنّ، $150x+108y=6$:

باستعمال العلاقة $r=a-bq$ نُعوض البواقي **بالترتيب وقبل كل تعويض نقوم بتبسيط.**

البواقي
6
18
24
42

$6=24-\underbrace{18}_{42-24(1)}\quad(1)$

$=24-(42-24(1))(1)$

$=\underbrace{24}_{108-42(2)}\quad(2)-42(1)$

$=(108-42(2))(2)-42(1)$

$=108(2)-\underbrace{42}_{150-108(1)}\quad(5)$

$=108(2)-(150-108(1))(5)$

$=150(-5)+108(7)$

إذن: $\boxed{(x;y)=(-5;6)}$ يسمى **الحل الخاص لـ** $150x+108y=6$.

تمرين 32 ص :

32) عيّن . .

) باستع .

الحل:

1)تعيين $PGCD(182;126)$:

الحاصل		1	2	4
المقسوم والقاسم	182	126	56	14
الباقي		56	14	0

q r

إذن: $\boxed{PGCD(182;126)=14}$.

2)باستعمال خوارزمية اقليدس، ايجاد عددين صحيحين α وَ β، يُحققان، $182\alpha+126\beta=14$:

لدينا:

$$14=126-56(2)$$
$$=126-(182-126(1))(2)$$
$$=182(-2)+126(3)$$

إذن: $\boxed{(\alpha;\beta)=(-2;3)}$.

❑ خاصية 03:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومان، k عدد طبيعي غير معدوم،** فإنّ: $\boxed{PGCD(ka;kb)=k\times PGCD(a;b)}$

توضيح:

نضع: $\begin{cases}PGCD(a;b)=d\in\mathbb{N}^*\\PGCD(ka;kb)=d'\in\mathbb{N}^*\end{cases}$،

نُبين أن $d'=kd$:

☒ لدينا: $PGCD(a;b)=d$ إذن: $\begin{cases}d|a\\d|b\end{cases}$، ومنه: $\begin{cases}kd|ka\\kd|kb\end{cases}$ (حيث $k\in\mathbb{N}^*$)

إذن: $kd|d'$ (أي: $d'=k'(kd)$ حيث $k'\in\mathbb{N}^*$).

☒ ولدينا: $PGCD(ka;kb)=d'$، إذن: $\begin{cases}d'|ka\\d'|kb\end{cases}$ أي: $\begin{cases}k'(kd)|ka\\k'(kd)|kb\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}k'd|a\\k'd|b\end{cases}$

وبالتالي: $k'd|d$ وعليه: $k'=1$

إذن: $d'=kd$، الخلاصة: $\boxed{PGCD(ka;kb)=k\times PGCD(a;b)}$.

تمرين 35 ص57:

35 عيّن $PGCD(54;82)$، ثمّ استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين $PGCD(5400;8200)$.

الحل:

- **تعيين $PGCD(54;82)$:** لدينا: $\boxed{PGCD(54;82)=2}$.
- **استنتاج $PGCD(5400;8200)$:**

لدينا: $PGCD(5400;8200)=PGCD(100\times54;100\times82)=100\times PGCD(54;82)=200$.

تعريف:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومين.**

يكون العددان a وَ b **أوليين فيما بينهما** إذا وفقط إذا كان **قاسمهما المشترك يساوي 1.**

أي:

a وَ b **أوليين فيما بينهما** يُكافئ: $PGCD(a;b)=1$

مثال:

n عدد طبيعي غير معدوم (حيث $n\geq1$)

تعيين $(n+1)$:

لدينا: ☐

تمرين 26 ص 57: (عمل منزلي)

❑ خاصية 04:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومين.** d **قاسم مشترك** للعددين a وَ b.

نضع: $a = da'$ وَ $b = db'$

يكون: d **قاسم مشترك أكبر** للعددين a وَ b؛ إذا وفقط إذا كان العددان الطبيعيان a' وَ b' **أوليان فيما بينهما.**

البرهان:

لدينا: a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومين،** و d **قاسمهما المشترك الأكبر.**

☒ **نضع:** $a = da'$ وَ $b = db'$

ومنه: $d = PGCD(a\,;b) = PGCD(da';db') = d \times PGCD(a';b')$

وبمأنّ: d **غير معدوم،** فإنّ: $PGCD(a';b') = 1$.

☒ **عكسياً:** نعتبر: $PGCD(a';b') = 1$،

ومنه: $PGCD(a\,;b) = PGCD(da';db') = d \times PGCD(a'\,;b') = d$.

تمرين محلول 01 وَ 02 ص 51: (للمراجعة)

تمرين 36 ص 57:

من التمرين **36** إلى التمرين **41**، عيّن كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين المقترحين:

36 $\begin{cases} a+b=54 \\ PGCD(a;b)=9 \end{cases}$.

الحل:

تعيين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تُحقق:

- $\begin{cases} a+b=54 \\ PGCD(a;b)=9 \end{cases}$، وبمأنّ: $PGCD(a;b)=9$ فإنّ: $\begin{cases} a=9a' \\ b=9b' \end{cases}$، حيث $PGCD(a';b')=1$

$\begin{cases} a+b=54 \\ PGCD(a;b)=9 \end{cases}$، تُصبح: $\begin{cases} 9a'+9b'=54 \\ PGCD(a';b')=1 \end{cases}$، ومنه: $\begin{cases} a'+b'=6 \\ PGCD(a';b')=1 \end{cases}$

وبالتالي: $(a';b') \in \{(1;5);(5;1)\}$

إذن: $\boxed{(a;b) \in \{(9;45);(45;9)\}}$.

تمرين 39 ص 57:

من التمرين **36** إلى التمرين **41**، عيّن كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين المقترحين:

39 $\begin{cases} ab=360 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$.

الحل:

تعيين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تُحقق:

- $\begin{cases} ab=360 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$، وبمأنّ: $PGCD(a;b)=6$ فإنّ: $\begin{cases} a=6a' \\ b=6b' \end{cases}$، حيث $PGCD(a';b')=1$

$\begin{cases} ab=360 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$ تُصبح: $\begin{cases} 36a'b'=360 \\ PGCD(a';b')=1 \end{cases}$، ومنه: $\begin{cases} a'b'=10 \\ PGCD(a';b')=1 \end{cases}$

وبالتالي: $(a';b') \in \{(1;10);(2;5);(5;2);(10;1)\}$

إذن: $\boxed{(a;b) \in \{(6;60);(12;30);(30;12);(60;6)\}}$.

④ تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين:

تعريف:

وَ عددان صحيحان غير معدومين.

القاسم المشتر

أمثلة:

- $PGCD(-12\,;-28) = PGCD(12\,;28) = 4$.
- $PGCD(30\,;-6) = PGCD(30\,;6) = 6$.

خاصية:

a وَ b **عددان صحيحان غير معدومين.** k **عدد صحيح غير معدوم،** $\boxed{PGCD(ka;kb) = |k|PGCD(a;b)}$.

مثال:

- $PGCD(-85\,;-25) = |-5|PGCD(17\,;5) = 5$.

تمرين 56 ص59:

56 1) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a = n^2 + 5n + 4$ وَ $b = n^2 + 3n + 2$.
بيّن أنّ العدد $n + 1$ هو قاسم مشترك للعددين a وb.
2) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $n + 1$ قاسما للعدد $3n^2 + 15n + 20$.

الحل:

1)لدينا: $a = n^2 + 5n + 4$ وَ $b = n^2 + 3n + 2$ (حيث $n \in \mathbb{N}$)

تبيان أنّ $(n+1)$ قاسم مشترك لـa وَb:

لدينا: $\begin{cases} a = (n+1)(n+4) \\ b = (n+1)(n+2) \end{cases}$، إذن: **$(n+1)$ قاسم مشترك لـa وَb.**

2)تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $(n+1)$ قاسماً للعدد $(3n^2+15n+20)$:

لدينا: $3n^2 + 15n + 20 = 3n^2 + 15n + 12 + 8 = 3a + 8$
بمأنّ: $n + 1|a$ فإنّ: $n + 1|3a$ معناه: $n + 1|8$ ومنه: $n + 1 \in D_8$ أي: $n + 1 \in \{1\,;2\,;4\,;8\}$
إذن: $\boxed{n \in \{0\,;1\,;3\,;7\}}$.

تمرين 57 ص59:

57 n وa عددان صحيحان حيث a يقسم $n - 1$ و$n^2 + n + 3$.
أ ـ بيّن أنّ a يقسم $n^2 - 2n + 1$.
ب ـ استنتج أنّ a يقسم $3n + 2$.
جـ ـ بيّن إذن أنّ a يقسم 5.
د ـ ما هي القيم الصحيحة الممكنة للعدد a؟

الحل:

1)لدينا: n وَa عددان **صحيحان** حيث a **يقسم** $n - 1$ وَ$n^2 + n + 3$.

أ-تبيان أنّ a يقسم $n^2 - 2n + 1$:

لدينا: $\begin{cases} a|n-1 \\ n-1|n^2-2n+1 \end{cases}$، لأنّ: $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 = (n-1)(n-1)$
إذن: $\boxed{a|n^2 - 2n + 1}$.

ب-استنتاج أنّ a يقسم $3n + 2$:

لدينا: $\begin{cases} a|n^2+n+3 \\ a|n^2-2n+1 \end{cases}$، ومنه: $a|(n^2+n+3)-(n^2-2n+1)$؛ إذن: $\boxed{a|3n+2}$.

جـ-تبيان أنّ a يقسم 5:

لدينا: $\begin{cases} a|3n+2 \\ a|n-1 \end{cases}$، ومنه: $a|(3n+2)-3(n-1)$؛ إذن: $\boxed{a|5}$.

د-إيجاد القيم الصحيحة الممكنة للعدد a :

بمأنّ: فإنّ: أي: $\boxed{\qquad\qquad}$.

❸ الموافقات في $\mathbb{Z}$:

① تعريف:

n **عدد طبيعي غير معدوم** $(n \in \mathbb{N}^*)$.
القول أنّ **عددين صحيحين** a وَ b **متوافقين بتردد** n يعني أنّ a وَ b **لهما نفس الباقي في القسمة على** n.
ونرمز $a \equiv b[n]$ ونقرأ: "a يُوافق b بتردد n".

ملاحظات:

1) من أجل كل **عدد صحيح** a، $a \equiv 0[1]$.
2) ترميز آخر $a \equiv b(n)$.

أمثلة:

- $17 \equiv 1[2]$
- $-23 \equiv -3[5]$

② مبرهنة:

a وَ b **عددان صحيحان** وَ n **عدد طبيعي غير معدوم** $(n \in \mathbb{N}^*)$.
a وَ b **لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على** n إذا وفقط إذا كان الفرق $a - b$ **مضاعف لـ** n.

البرهان:

1) نفرض أنّ a وَ b **لهما نفس الباقي** r **في القسمة الإقليدية على** n أي: $\begin{cases} a = nq + \boxed{r} \\ b = nq' + \boxed{r} \end{cases}$،
ومنه: $a - b = n(q - q')$
إذن: الفرق $a - b$ **مضاعف لـ** n.

2) عكسياً:

نفرض أنّ الفرق $a - b$ **مضاعف لـ** n أي: $a - b = nk$،
وليكن r باقي قسمة b على n، لدينا: $\boxed{r}$ ومنه: $b = nq + \boxed{r}$ ويكون: $a = nk + b$ $a = n(k + q) + \boxed{r}$
إذن: a وَ b **لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على** n.

نتيجة:

a وَ b **عددان صحيحان** وَ n **عدد طبيعي غير معدوم** $(n \in \mathbb{N}^*)$.

$a \equiv b[n]$ a وَ b **متوافقين بتردد** n.	$\begin{cases} a = nq + \boxed{r} \\ b = nq' + \boxed{r} \end{cases}$ a وَ b **لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على** n.

$a - b = nk$ **أي:** $a - b \equiv 0[n]$ (الفرق $a - b$ **مضاعف لـ** n).

تمرين 01 ص78:

1 برّر صحة العبارات التالية:

أ/ $45 \equiv 3[7]$، ب/ $152 \equiv 2[3]$، جـ/ $29 \equiv -1[6]$،
د/ $137 \equiv -3[5]$، و/ $-13 \equiv 2[5]$، هـ/ $-17 \equiv -7[10]$.

الحل:

تبرير صحة العبارات:

أ-

ط2) لدينا: $45-3=42=7(6)$ أي: $45-3\equiv 0[7]$ إذن: $\boxed{45\equiv 3[7]}$. **(المبرهنة)**

ط3) لدينا: $\boxed{3}+7(6)=45$ إذن: $\boxed{45\equiv 3[7]}$. **(الخاصية 01)**

③ خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$:

في كل ما يلي نعتبر a، b، c وَ d أعداد صحيحة وَ n عدد طبيعي غير معدوم $(n\in\mathbb{N}^*)$.

خاصية 01:

كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n، بتردد n؛ أي: $\boxed{r}$ معناه $a=nq+r$ $(n\geq 2$ حيث $n\equiv r[n])$

هذه الخاصية تسمح بالانتقال من مساواة إلى موافقة والعكس.

تمرين 03 ص78:

3 عيّن كل الأعداد الطبيعية n الأصغر من 30 حيث: $n\equiv 4[7]$.

الحل:

تعيين كل الأعداد الطبيعية n الأصغر من 30 حيث، $n\equiv 4[7]$:

لدينا: $n\equiv 4[7]$ معناه: $\boxed{n=7k+4}$، $(k\in\mathbb{N}$ حيث$)$

$n<30$ يُكافئ: $7k+4<30$

ومنه: $7k<26$

أي: $k<\frac{26}{7}$

وهذا يعني: $k\in\{0\,;1\,;2\,;3\}$، إذن: $\boxed{n\in\{4\,;11\,;18\,;25\}}$.

تمرين 04 ص78:

4 n عدد صحيح يُحقق $n\equiv 140[12]$،

عيّن باقي قسمة العدد n على 12.

الحل:

لدينا: $n\equiv 140[12]$، حيث $n\in\mathbb{Z}$

تعيين باقي قسمة n على 12:

ط1) لدينا: $n\equiv 140[12]$، ومنه: $n\equiv 8[12]$، إذن: باقي قسمة n على 12 هو 8.

ط2) لدينا: $n\equiv 140[12]$ أي: $n-140=12k$ $(k\in\mathbb{Z})$

ومنه: $n=12k+140$

وعليه: $n=12k+12(11)+8$

ويكون: $n=12(k+11)+\boxed{8}$، إذن: باقي n قسمة على 12 هو 8.

تمرين 06 ص78:

6 n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

في كل حالة، عيّن قيم العدد n التي تُحقق الموافقة المقترحة.

أ- $n\equiv 0[46]$؛ ب- $n\equiv 1[10]$؛ جـ- $n\equiv 5[27]$.

الحل:

n عدد طبيعي أكبر من أو يُساوي 2.

في كل حالة، تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تُحقق الموافقة المقترحة:

أ. $n\equiv 0[46]$

$n\equiv 0[46]$ يُكافئ: $46=nk$ ومنه: $n\in D_{46}$ إذن: $\boxed{n\in\{2\,;23\,;46\}}$.

ج. $n\equiv 5[27]$

$n\equiv 5[27]$ يُكافئ: أي: ومنه: إذن: $\boxed{\quad}$.

باقي خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$:

خاصية 02: $\boxed{a \equiv a[n]}$.

خاصية 03: إذا كان: $\boxed{a \equiv b[n]}$، فإنّ: $\boxed{b \equiv a[n]}$.

خاصية 04: إذا كان: $\boxed{\begin{cases} a \equiv b[n] \\ b \equiv c[n] \end{cases}}$، فإنّ: $\boxed{b \equiv c[n]}$.

خاصية 05: إذا كان: $\boxed{\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases}}$، فإنّ: $\boxed{\begin{cases} a + c \equiv b + d[n] \\ a \times c \equiv b \times d[n] \end{cases}}$.

خاصية 06: إذا كان: $\boxed{a \equiv b[n]}$، فإنّ: $\boxed{ka \equiv kb[n]}$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$).

خاصية 07: إذا كان: $\boxed{a \equiv b[n]}$، فإنّ: $\boxed{a^p \equiv b^p[n]}$ (حيث $p \in \mathbb{N}^*$).

خاصية 08: (**تمرين** 07 **ص**78) إذا كان: $\boxed{a \equiv b[n]}$، فإنّ: $\boxed{ma \equiv mb[mn]}$، (حيث $m \in \mathbb{N}^*$).

خاصية 09: (**تمرين** 09 **ص**78) إذا كان: $\boxed{a \equiv b[n]}$، فإنّ: $\boxed{a \equiv b[m]}$، (حيث $m|n$).

تمرين 01:

1) عيّن باقي قسمة 4329- على 113.

2) عيّن E مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أنّ: $x + 4 \equiv 1[7]$.

3) عيّن E' مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أنّ: $2x \equiv 3[7]$.

الحل:

1) تعيين باقي قسمة 4329- على 113:

لدينا: $4329 = 113(\quad) + 35$ أي: $4329 \equiv 35[113]$

ومنه: $-4329 \equiv -35[113]$

وعليه: $-4329 \equiv (-35 + 113)[113]$

ويكون: $-4329 \equiv 78[113]$

إذن: باقي قسمة 4329- على 113 هو78.

2) تعيين E مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أنّ $x + 4 \equiv 1[7]$:

لدينا: $x + 4 \equiv 1[7]$ ومنه: $x \equiv -3[7]$ وعليه: $x \equiv 4[7]$ وبالتالي: $\boxed{x = 7k + 4}$،

إذن: المجموعة E هي مجموعة الأعداد الصحيحة x من الشكل $x = 7k + 4$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

3) تعيين E' مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أنّ $2x \equiv 3[7]$:

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$2x \equiv$	0	2	4	6	1	$\boxed{3}$	5	[7]

x يُوافق الأعداد الأصغر تماما من الترديد 7.

من الجدول نجد: $x \equiv 5[7]$ وبالتالي: $\boxed{x = 7k + 5}$،

إذن: المجموعة E' هي مجموعة الأعداد الصحيحة x من الشكل $x = 7k + 5$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

تمرين 28 و29 ص79: (**عمل منزلي**)

تمرين 31 ص79:

31 حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $2x - 5y = 1$.

الحل:

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية، $2x - 5y = 1$:

لدينا: $2x - 5y = 1$ $(*)$ تُكافئ: $2x = 5y + 1$ ومنه: $2x \equiv 1[5]$ وعليه: $x \equiv 3[5]$

ويكون: $\boxed{\quad + 3}$ $(\quad)$

بالتعويض في $\boxed{\quad}$ $\boxed{\quad}$ $(k \in \mathbb{Z}$.

تمرين 32 ص79:

32 حل في $\mathbb{Z}$ كل من الجملتين التاليتين: أ - $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$، ب - $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$.

الحل:

لنحل في $\mathbb{Z}$ الجملة $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \quad (1) \\ 4x \equiv 1[3] \quad (2) \end{cases}$:

من (2) نجد: $x \equiv 1[3]$ أي: $\boxed{x = 3k + 1}$ $(k \in \mathbb{Z})$

بالتعويض في (1) نجد: $6k \equiv 0[4]$، ومنه: $\begin{bmatrix} k \equiv 0[4] \\ \text{أو} \\ k \equiv 2[4] \end{bmatrix}$ أي: $\boxed{k = 4t}$ **أو** $\boxed{k = 4t + 2}$ $(t \in \mathbb{Z})$

إذن: $\boxed{x = 12t + 1}$ **أو** $\boxed{x = 12t + 7}$ $(t \in \mathbb{Z})$

④ حل معادلة من الشكل $ax + by = c$:

أعمال موجهة ص75:

1. دراسة مثال.

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $5x - 8y = 3 \ldots (1)$.

- تأكد أنّ $(7; 4)$ حل للمعادلة.
- أثبت أنّه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ: $5x \equiv 3[8]$.
- عيّن الأعداد الصحيحة x حيث: $5x \equiv 3[8]$.
- أثبت أنّ كل حلول المعادلة (1) هي من الشكل $(8k + 7; 5k + 4)$ حيث k عدد صحيح.

2. دراسة الحالة العامة.

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $ax + by = c$، حيث a، b، وَ c أعداد طبيعية.

- أثبت أنّ المعادلة تقبل حلول إذا وفقط إذا كان a و b أوليين فيما بينهما أو c يقبل القسمة على $PGCD(a; b)$.
- أثبت أنّه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة فإنّ: $ax \equiv c[b]$.
- أثبت أنّه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة فإنّ: $by \equiv c[a]$.

3. تطبيق.

- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $7x + 12y = 5$.
- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $20x - 45y = 5$.
- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $6x - 8y = 9$.

دراسة مثال ص75:

لدينا: $5x - 8y = 3 \ldots (1)$

التأكد أنّ $(7; 4)$ حل للمعادلة:

لدينا: $5(7) - 8(4) = 35 - 32 = 3$، إذن: $(7; 4)$ حل لـ(1).

إثبات أنّه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ $5x \equiv 3[8]$:

$(x; y)$ حلا لـ(1)، (1) تُكافئ $\boxed{3}$ $5x = 8y + 3$، إذن: $2x \equiv 3[8]$.

تعيين الأعداد الصحيحة x حيث $5x \equiv 3[8]$:

$5x \equiv 3[8]$ نجد: $x \equiv 7[8]$ إذن: $\boxed{x = 8k + 7}$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)

إثبات أنّ كل حلول المعادلة هي من الشكل حيث عدد صحيح:

بتعويض قيمة

حل تطبيق ص75:

مساعدة فقط:

حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$، $7x+12y=5$:

لدينا: $7x+12y=5$، ومنه: $7x=-12y+5$

وعليه: $7x=12(-y)+5$

ومنه: $7x\equiv 5[12]$

ويكون: $x\equiv 11[12]$

نجد: $\boxed{x=12k+11}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$)، وبالتعويض نجد: $\boxed{y=-7k-6}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$)،

إذن: الحلول في $\mathbb{Z}^2$ هي $\boxed{(x;y)=(12k+11;-7k-6)}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

4 التعداد:

النشاط 03 ص67:

عالميا، يُستعمل نظام التِّعداد العشري، حيث يتركب العدد من الأرقام العشر 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 و9 وهذا يُسمى النظام ذي الأساس 10.

في الحضارات القديمة استعمل مختلف نُظم التِّعداد، استعمل البابليون الأساس 60؛ الرومانيون الأساس 12؛ أمركا الوسطى الأساس 20 إلى آخره ... الآن يُستعمل في الحاسوب النظام الثنائي (ذي الأساس 2).

لكتابة عدد في النظام ذي الأساس 6 يجب استعمال 6 أرقام وهي من 0 إلى 5.

1. عيّن الأعداد a، b، c وd بحيث يكون $3959=a\times 10^3+b\times 10^2+c\times 10+d$.

2. أحسب العدد N حيث $N=3\times 6^4+0\times 6^3+1\times 6^2+5\times 6^1+5\times 6^0$.

الأرقام 3، 0، 1، 5، 5 تُشكل عددا وهو الكتابة للعدد N في النظام ذي الأساس 6 ونرمز بـ: $N=\overline{55103}$.

3. أنجز القسمات التالية:

3959	6	
الباقي	الحاصل	6
	الباقي	الحاصل
		الباقي

شكّل العدد المُكون من البواقي المحصل عليها. ماذا تلاحظ؟

مناقشة النشاط:

1.تعيين الأعداد a، b، c وَd بحيث يكون $3959=a\times 10^3+b\times 10^2+c\times 10+d$:

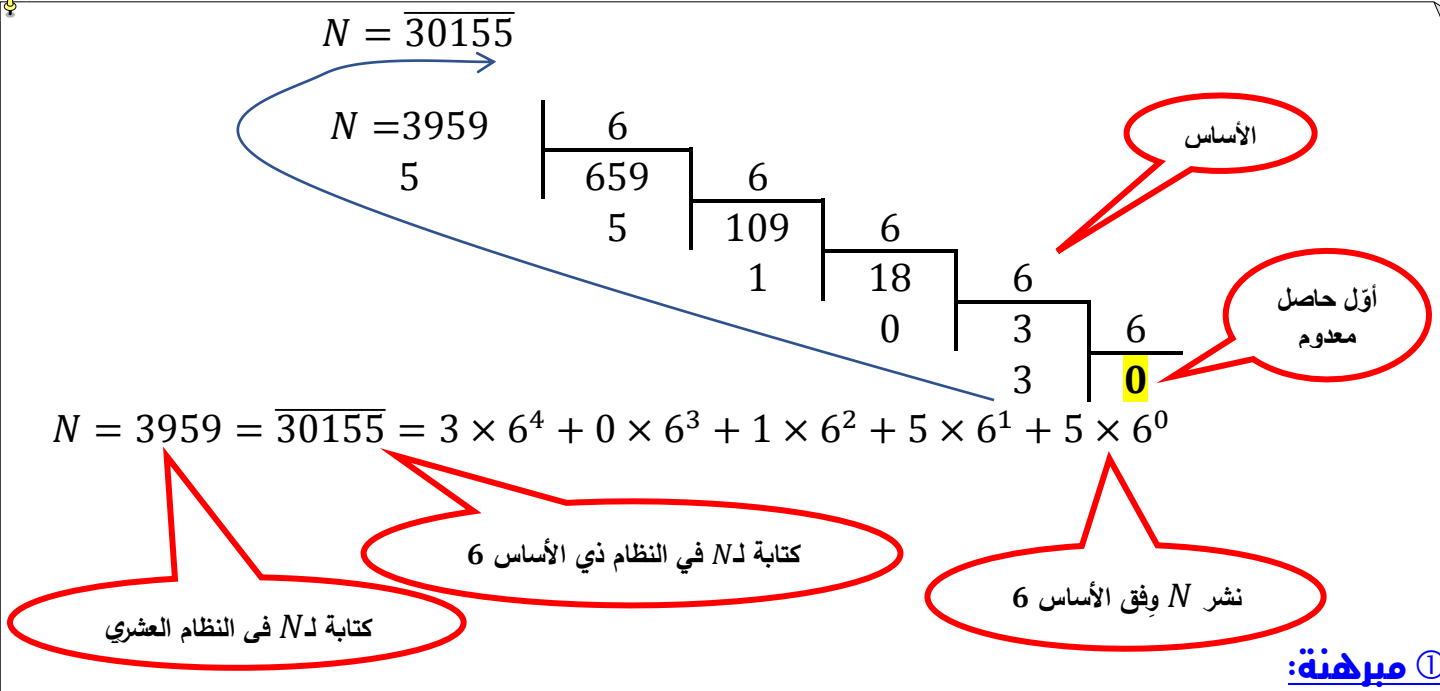
لدينا: $3959=3\times 10^3+9\times 10^2+5\times 10+9$، بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=3\\b=9\\c=5\\d=9\end{cases}$.

2.حساب العدد N حيث $N=3\times 6^4+0\times 6^3+1\times 6^2+5\times 6^1+5\times 6^0$:

لدينا: $N=3\times 6^4+0\times 6^3+1\times 6^2+5\times 6^1+5\times 6^0=3959$

الأرقام 3، 0، 1، 5، 5 **(من اليسار إلى اليمين)** تُشكل عددا وهو الكتابة للعدد N في النظام ذي الأساس 6 ونرمز بـ: $N=\overline{30155}$.

3.إنجاز القسمات:



① مبرهنة:

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1.

كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يُكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$a = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \cdots + q_2 x^2 + q_1 x + q_0$$

حيث q_0، q_1،...، q_{n-1} و q_n أعداد طبيعية و $\begin{cases} q_n \neq 0 \\ 0 \leq q_i < x \end{cases}$، نكتب: $a = \overline{q_n q_{n-1} \cdots q_2 q_1 q_0}$

في هذه الحالة نقول أنّنا كتبنا a في نظام تِعداد ذي الأساس x.

البرهان:

ملاحظة:

- النظام **الثنائي** هو **نظام أساسه 2** وأرقامه 0؛ 1.
- النظام **العشري** هو **نظام أساسه 10** وأرقامه 0؛ 1؛ ...؛ 9.

أمثلة:

تمرين:

a عدد طبيعي يُكتب $\overline{45201}$ في النظام ذي الأساس 7.

1.أكتب a في النظام العشري.

2.أكتب العدد 2017 في النظام ذي الأساس 4.

الحل:

لدينا: $a = \overline{45201}$

1.كتابة a في النظام العشري:

لدينا: $a = \overline{45201}^{7} = 4 \times 7^4 + 5 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 0 \times 7^1 + 1 \times 7^0 = 11418$

2.كتابة العدد 2017 في النظام ذي الأساس 4: $\boxed{2017 = \overline{133201}}$.

تمرين 37 ص80:

37 العددان $\overline{2306}$ و $\overline{1035}$ مكتوبان في النظام ذي الأساس x.

أ ـ ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد x؟

ب ـ أنشر العددين وفق الأساس .

الحل:

ب-نشر العددين وفق الأساس x:

$$\overline{2306} = 2 \times x^3 + 3 \times x^2 + 0 \times x^1 + 6 \times x^0 = 2x^3 + 3x^2 + 6$$
$$\overline{1035} = 1 \times x^3 + 0 \times x^2 + 3 \times x^1 + 5 \times x^0 = x^3 + 3x + 5$$

② الانتقال من النظام ذي الأساس α إلى النظام ذي الأساس β:



تمرين 39 ص80:

39 يُكتب العدد الطبيعي n في التعداد الثنائي $\overline{1101101}$.
ما هو أساس التعداد الذي يُكتب فيه n كما يلي: $\overline{214}$؟

الحل:

لدينا: $n = \overline{1101101}^2$.

إيجاد أساس التعداد الذي يُكتب فيه n كما يلي: $\overline{214}$:

لدينا: $\begin{cases} n = \overline{1101101}^2 = 109 \\ n = \overline{214}^x = 2x^2 + x + 4 \end{cases}$، ومنه: $2x^2 + x + 4 = 109$

أي: $2x^2 + x - 105 = 0$ مميزها $\Delta = 841 > 0$

ومنه: $x' = \frac{-1-29}{4} < 0$ (مرفوض) وَ $x'' = \frac{-1+29}{4} = 7$ إذن: الأساس الذي يُكتب فيه n كما يلي $\overline{214}$ هو 7.

تمرين 55 وَ56 ص80:

55 أنجز، في النظام ذي الأساس 5، العمليات التالية:

$$\overline{3421} + \overline{230} \quad ، \quad \overline{431} - \overline{132} \quad ، \quad \overline{213} \times \overline{14}$$

56 أنجز، في النظام ذي الأساس 12، العمليات التالية:

$$\overline{39\beta 7} + \overline{213} \quad ، \quad \overline{400\alpha} - \overline{39\beta 7} \quad ، \quad \overline{27} \times \overline{41}$$

ملاحظة: في النظام ذي الأساس 12، $\boldsymbol{\alpha = 10}$ وَ $\boldsymbol{\beta = 11}$.

❺ الأعداد الأولية:

① تعريف:

القول أنّ العدد الطبيعي n **عدد أولي** معناه أنّ n **يقبل قاسمين مختلفين بالضبط** في $\mathbb{N}$، 1 وn نفسه.

ملاحظات ونتائج:

- 0 **غير أوّلي** لأنّه يقبل ما لانهاية من القواسم.
- 1 **غير أوّلي** لأنّه يقبل قاسم واحد هو 1.
- 2 هو **العدد الأوّلي الزوجي الوحيد**.
- 2؛ 3؛ 5؛ 7؛ 11؛ 13؛ 17؛ 19؛ 23 هي أعداد أولية.

② خواص:

خاصية 01: كل عدد طبيعي أكبر تماما من ( ) **يقبل على الأقل قاسما أولياً**.

خاصية 02:

تمرين 04 ص106:

4 في كل حالة من الحالات التالية أذكر إن كان العدد أوليا.

أ - 251. ب - 341 ج - 1023.

نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ حسب ترتيبها التصاعدي.

الحل:

ذكر إن كان العدد أوّليا أم لا:

أ- العدد 251:

لدينا: $\sqrt{251} \simeq 15{,}84$

هل يقبل العدد 251 القسمة على	2	3	5	7	11	13
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا
حاصل القسمة	125	83	50	35	22	19

إذن: العدد 251 **أوّلي**.

ب- العدد 341:

لدينا: $\sqrt{341} \simeq 18{,}47$

هل يقبل العدد 341 القسمة على	2	3	5	7	11	13	17
الإجابة	لا	لا	لا	لا	**نعم**		
حاصل القسمة	170	113	68	48	31		

نلاحظ أنّ: $341 = 1 \times 341 = 11 \times 31$

إذن: العدد 341 **غير أوّلي**.

ملاحظة مهمة:

إذا كان: $\sqrt{n}$ **عدداً طبيعياً** أي n **مربع تام** فإنّ n **غير أوّلي**؛ مثلاً: 169 **غير أوّلي** لأنّه **مربع تام** $(\sqrt{169} = 13 \in \mathbb{N})$

تمرين 17 ص106:

17 أ ـ تحقّق من أنّ العدد 173 أولي.

ب ـ عيّن كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2 - y^2 = 173$.

ج ـ p عدد طبيعي أوّلي فردي. عيّن كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2 - y^2 = p$.

الحل:

أ-التحقّق من أنّ العدد 173 أوّلي:

لدينا: $\sqrt{173} \simeq 13{,}15$

هل يقبل العدد 173 القسمة على	2	3	5	7	11	13
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا
حاصل القسمة	86	57	34	24	15	13

إذن: العدد 173 **أوّلي**.

ب-تعيين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2 - y^2 = 173$:

$x^2 - y^2 = 173$ تُكافئ $(x-y)(x+y) = 173$

بما أنّ: 173 **أوّلي** فإنّ: $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=173 \end{cases}$ **أو** $\begin{cases} x-y=173 \\ x+y=1 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} x=87 \\ y=86 \end{cases}$ **أو** $\begin{cases} x=87 \\ y=-86 \end{cases}$؛ إذن: $\boxed{(x;y) = (87;86)}$.

ج-p عدد طبيعي **أوّلي فردي** أي: $p \neq 2$.

ب-تعيين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2 - y^2 = p$:

تُكافئ: $(x-y)(x+y) = p$

ومنه: $\begin{cases} x=\frac{p+1}{2} \\ y=\frac{p-1}{2} \end{cases}$ **أو** $\begin{cases} x=\frac{p+1}{2} \\ y=\frac{1-p}{2}\notin\mathbb{N} \end{cases}$؛ إذن: $\boxed{(x;y)=\left(\frac{p+1}{2};\frac{p-1}{2}\right)}$.

تمرين 14 ص106:

14 n عدد طبيعي، وَ $a=n^2+3n+2$.

هل توجد قيم للعدد n التي يكون من أجلها العدد a أوليا؟

الحل:

n عدد طبيعي وَ $a=n^2+3n+2$

لدينا: $a=n^2+3n+2$ مميزه $\Delta=1>0$، ومنه: جذراه 1- وَ2-

وعليه: $a=(n+1)(n+2)$

- إذا كان: $n=0$ فإنّ: $a=2$ وهو **أوّلي**.
- إذا كان: $n>0$ فإنّ: $\begin{cases} n+1>1 \\ n+2>2 \end{cases}$، إذن: a **ليس أوّلي**.

تمرين 15 ص106: (**عمل منزلي**)

③ تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية:

مبرهنة:

كل عدد طبيعي **غير أوّلي** n (حيث $n\geq 2$) **يُمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية.**

تمرين 26 ص107:

26 1) حلّل العدد $a=4312$ إلى جداء عوامل أولية.

2) ما هو أصغر عدد طبيعي بضربه بالعدد a نحصل على:

أ ـ مربع تام؟

ب ـ مضاعف موجب للعدد 1000؟

الحل:

1)تحليل العدد $a=4312$ إلى جداء عوامل أولية: لدينا: $\boxed{a=2^3\times 7^2\times 11}$

2)إيجاز أصغر عدد طبيعي b بضربه بالعدد a نحصل على

أ-مربع تام:

لدينا: $a=2^3\times 7^2\times 11$، ومنه: $2\times 11a=2^3\times 7^2\times 11\times 2\times 11$

وبالتالي: $22a=(2^2\times 7\times 11)^2$، إذن: $\boxed{b=22}$.

ب-مضاعف موجب للعدد 1000:

لدينا: $\begin{cases} a=2^3\times 7^2\times 11 \\ 1000=2^3\times 5^3 \end{cases}$، ومنه: $5^3a=1000(7^2\times 11)$؛ إذن: $\boxed{b=125}$.

حل التمرين 20 ص107: (**خاصية ص92**)

تمرين:

1)حلّل إلى جداء عوامل أولية العدد 725.

2)ما هو عدد القواسم الموجبة للعدد 725.

3)عيّن كل القواسم الموجبة للعدد 725.

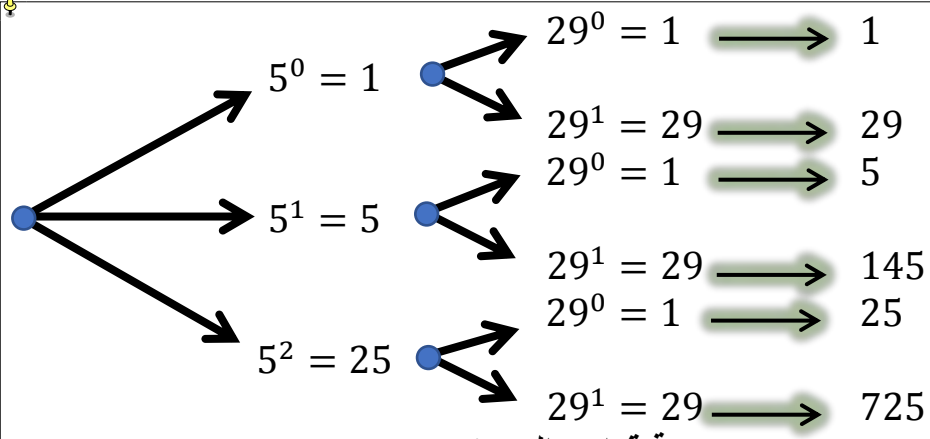
4)عيّن كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تُحقّق $x^2-y^2=725$.

الحل:

1)تحليل العدد 725 إلى جداء عوامل أولية:

لدينا: $\boxed{\quad}$.

)عدد القواسد



إذن: $D_{725} = \{1; 5; 25; 29; 145; 725\}$، D_{725} **مجموعة قواسم** العدد 725.

4)تعيين كل الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية التي تُحقّق $x^2 - y^2 = 725$:

❻ المضاعف المشترك الأصغر لعددين:

تمهيد:

a **عدد طبيعي غير معدوم**، نرمز بـM_a إلى **مجموعة مضاعفات** العدد a.

مثال: $a = 6$ لدينا: $M_a = \{0; 6; 12; 18; \dots\}$ **مضاعفات** 6 تُكتب من الشكل $6k$ $(k \in \mathbb{N})$.

ملاحظة: المضاعف الوحيد للعدد 0 هو 0.

① تعريف:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومان؛**

- M_a **مجموعة مضاعفات** العدد a
- M_b **مجموعة مضاعفات** العدد b
- $M_a \cap M_b$ هي **مجموعة المضاعفات المشتركة** للعددين a وَ b

يسمى **أصغر عنصر غير معدوم** في المجموعة $M_a \cap M_b$ **المضاعف المشترك الأصغر** للعددين a وَ b ونرمز له بالرمز $PPCM(a; b)$.

ملاحظات:

① $PPCM(a\,;a) = a$.

② $PPCM(1\,;a) = a$.

③ **(مجموعة المضاعفات المشتركة** لعددين طبيعيين غير معدومين **هي مجموعة المضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لهما)**

أي: $PPCM(a\,;b) = c$، **فإنّ:** $M_a \cap M_b = M_c$.

مثال:

- مجموعة مضاعفات 4 هي: $M_4 = \{0\,;4\,;8\,;12\,;\dots\}$
- مجموعة مضاعفات 6 هي: $M_6 = \{0\,;6\,;12\,;18\,;\dots\}$

لدينا: $M_{12} = \{0\,;\boxed{12}\,;24\,;\dots\}$، إذن: $M_4 \cap M_6 = \{0\,;\boxed{12}\,;24\,;\dots\}$ $\boxed{PPCM(4\,;6) = 12}$.

② تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين:

تعريف:

a وَ b **عددان صحيحان غير معدومان؛**

المضاعف المشترك الأصغر للعددين وَ هو **أصغر عدد طبيعي غير معدوم؛** حيث $\boxed{m = PP}$.

مثال:

③ خاصية المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين:

خاصية:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومان؛** $\boxed{PPCM(ka;kb)=|k|PPCM(a;b)}$ حيث $k\in\mathbb{Z}^*$.

البرهان:

تمرين 28 ص 107:

28 أحسب المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b في كل من الحالات المقترحة التالية:

أ - $a=26$ و $b=12$؛ ب - $a=18$ و $b=-15$؛ جـ - $a=-12$ و $b=-13$؛

د - $a=230$ و $b=128$؛ هـ - $a=876$ و $b=1028$.

الحل:

1) حساب $PPCM(a\,;b)$ في كل حالة:

أ- $PPCM(26;12)=156$؛ ب- $PPCM(18\,;-15)=90$؛ جـ- $PPCM(-12\,;-13)=156$؛

د- $PPCM(230\,;128)=14720$؛ هـ- $PPCM(876\,;1028)=225132$.

تمرين 31 ص 107:

31 العدد الطبيعي n يُوافق 3 بالتردد 35، وَبالتردد 28.

أ - برهن أنّ $n-3$ هو مضاعف مشترك للعددين 35 و28.

ب - ما هي أصغر قيمة للعدد n.

الحل:

لدينا: $\begin{cases}n\equiv 3[35]\\ n\equiv 3[28]\end{cases}$؛

أ-البرهان أنّ $(n-3)$ هو مضاعف مشترك للعددين 35 وَ28:

لدينا: $\begin{cases}n\equiv 3[35]\\ n\equiv 3[28]\end{cases}$؛ ومنه: $\begin{cases}n-3\equiv 0[35]\\ n-3\equiv 0[28]\end{cases}$، أي: $\begin{cases}n-3=35k\\ n-3=28k'\end{cases}$

إذن: $(n-3)$ **مضاعف مشترك** للعددين 35 وَ28.

ب-تعيين أصغر قيمة للعدد n:

أصغر قيمة للعدد n **مكافئة** لأصغر قيمة للعدد $(n-3)$

ومنه: $n-3=PPCM(35\,;28)=PPCM(7\times 5\,;7\times 4)=7\times PPCM(5\,;4)=7\times 20=140$

أي: $n-3=140$

إذن: أصغر قيمة للعدد n هي $n=140+3$ أي: $\boxed{n=143}$.

تمارين 30، 33، 35، 36 ص 107: (عمل منزلي)

④ حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية:

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a وَ b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية **المشتركة** في تحليلي العددين a وَ b بحيث يُؤخذ كل عامل من هذه العوامل **مرة واحدة وبأصغر أس**.

⑤ حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية:

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a وَ b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية **المشتركة وغير المشتركة** في تحليلي العددين a وَ b بحيث يُؤخذ كل عامل من هذه العوامل **مرة واحدة وبأكبر أس**.

تمرين 39 ص :

39 عيّن

لدينا: $\begin{cases} a = 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 11 \times 19 \\ b = 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 13^2 \end{cases}$، ومنه: $\begin{cases} PGCD(a;b) = a \wedge b = 3^2 \times 5 \times 7^2 \\ PPCM(a;b) = a \vee b = b \times 11 \times 19 \end{cases}$.

⑥ العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

خاصية:

جداء عددين طبيعيين a وَ b كلاهما أكبر تماما من 1 **مساو لجداء قاسمهما المشترك الأكبر وَمضاعفهما المشترك الأصغر**، بعبارة أخرى $\boxed{PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = ab}$.

تمرين 38 ص108:

38 $a = 256$ وَ $b = 5040$.

أ ـ حلّل إلى جداء عوامل أولية كل من العددين a و b، ثمّ عيّن $PGCD(a;b)$ و $PPCM(a;b)$.

ب ـ عيّن $PGCD(a;b)$ باستعمال خوارزمية أقليدس، ثمّ استنتج $PPCM(a;b)$.

الحل:

لدينا: $a = 256$ وَ $b = 5040$

أ-تحليل إلى جداء عوامل أولية كل من a وَ b:

لدينا: $a = 2^8$ وَ $b = 2^3 \times 3^2 \times 7$.

تعيين $PGCD(a;b)$ وَ $PPCM(a;b)$: لدينا: $\begin{cases} PGCD(a;b) = a \wedge b = 2^3 = 8 \\ PPCM(a;b) = a \vee b = a \times 3^2 \times 7 \end{cases}$.

ب-تعيين $PGCD(a;b)$ باستعمال خوارزمية اقليدس:

لدينا: $b = a(19) + 176$

$a = 176(1) + 80$

$176 = 80(2) + \boxed{16}$

$80 = 16(\ \ ) + 0$

إذن: $\boxed{PGCD(a;b) = 16}$.

استنتاج $PPCM(a;b)$: لدينا: $PPCM(a;b) = \frac{ab}{PGCD(a;b)} = \frac{\ }{16} =$.

تمرين 42 ص108:

في التمارين 42، 43 و44 المطلوب تعيّين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية.

42 $PGCD(a;b) = 7$ وَ $PPCM(a;b) = 48$.

الحل:

تعيين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية بحيث $PGCD(a;b) = 7$ وَ $PPCM(a;b) = 48$:

نضع: $\begin{cases} d = PGCD(a;b) = 7 \\ m = PPCM(a;b) = 48 \end{cases}$

وبما أنّ $d = PGCD(a;b) = 7$؛ فإنّ $\begin{cases} a = da' = 7a' \\ b = db' = 7b' \end{cases}$، حيث $PGCD(a';b') = 1$.

ونعلم أنّ: $m \times d = ab = d^2a'b'$، ومنه: $m = da'b'$

ويكون: $7a'b' = 84$

أي: $a'b' = 12$

وبالتالي: $(a';b') \in \{(1;12);(3;4);(4;3);(12;1)\}$

إذن: $\boxed{(a;b) \in \{(7;84);(21;28);(28;21);(84;7)\}}$.

تمرين 41 ص

41 عيّن كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية التي تحقق المعادلة المقترحة في كل من الحالات التالية:

أ ـ $PPCM($؛

$PPCM(a$؛

هـ - $PPCM(a;b)-9PGCD(a;b)=13$ مع $a\leq b$.

الحل:

تعيين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية بحيث:

ج- $PPCM(a;b)=PGCD(a;b)$:

نضع: $\begin{cases}d=PGCD(a;b)\\m=PPCM(a;b)\end{cases}$، وبمأنّ $d=PGCD(a;b)$؛ فإنّ $\begin{cases}a=da'\\b=db'\end{cases}$، حيث $PGCD(a';b')=1$.

ونعلم أنّ: $m\times d=ab=d^2a'b'$، ومنه: $m=da'b'$

ويكون: $a'b'=1$ **لأنّ:** $m=d$

أي: $a'=b'=1$

وبالتالي: $(a';b')\in\{(1;1)\}$

إذن: $\boxed{(a;b)\in\{(a;a)\}}$، حيث $a\in\mathbb{N}^*$.

ب- $PPCM(a;b)-PGCD(a;b)=187$:

نضع: $\begin{cases}d=PGCD(a;b)\\m=PPCM(a;b)\end{cases}$، وبمأنّ $d=PGCD(a;b)$؛ فإنّ $\begin{cases}a=da'\\b=db'\end{cases}$، حيث $PGCD(a';b')=1$.

ونعلم أنّ: $m\times d=ab=d^2a'b'$، ومنه: $m=da'b'$

ب- تُصبح: $d(a'b'-1)=187$ أي: d يقسم 187 وعليه: $d\in D_{187}$ أي: $d\in\{1;11;17;187\}$

1) في حالة: $\boxed{d=1}$ فإن: $a'b'-1=187$

وبالتالي: $(a';b')\in\{(1;188);(4;47);(47;4);(188;1)\}$

إذن: $\boxed{(a;b)\in\{(1;188);(4;47);(47;4);(188;1)\}}$.

2) في حالة: $\boxed{d=187}$ فإن: $a'b'-1=1$

وبالتالي: $(a';b')\in\{(1;2);(2;1)\}$

إذن: $\boxed{(a;b)\in\{(187;374);(374;187)\}}$.

3) في حالة: $\boxed{d=11}$ فإن: $a'b'-1=17$

وبالتالي: $(a';b')\in\{(1;18);(2;9);(9;2);(18;1)\}$

إذن: $\boxed{(a;b)\in\{(11;198);(22;99);(99;22);(198;11)\}}$.

4) في حالة: $\boxed{d=17}$ فإن: $a'b'-1=11$

وبالتالي: $(a';b')\in\{(1;12);(4;3);(3;4);(12;1)\}$

إذن: $\boxed{(a;b)\in\{(17;204);(68;51);(51;68);(204;17)\}}$.

تمرين 40 ص108:

40 عيّن كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الجملة المعطاة، في كل من الحالتين التاليتين:

أ - $\begin{cases}a+b=60\\PPCM(a;b)=40\end{cases}$؛ ب - $\begin{cases}a-b=22932\\PPCM(a;b)=98280\end{cases}$.

الحل:

تعيين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تُحقق الجملة:

أ- $\begin{cases}a+b=60\\PPCM(a;b)=40\end{cases}$:

نضع: $m=PPCM(a;b)=2^3\times5=40$، وبمأنّ $m=40$؛ فإنّ $\begin{cases}a\leq40\\b\leq40\end{cases}$،

ونعلم أنّ: a يقسم وَ يقسم أي: 40 وَ 40

وبمأنّ:

7 مبرهنة بيزو Bézout:

① مبرهنة:

يكون **عددان صحيحان a وَ b أوليين فيما بينهما** إذا وفقط إذا وُجد **عددان صحيحان u وَ v** حيث:

$$au + bv = 1$$

ملاحظة:

- **الثنائية $(u\,;v)$ ليست وحيدة.**

تمرين 46 ص108:

46 n عدد طبيعي. أثبت أن العددين a و b أوّليان فيما بينهما في كل من الحالتين التاليتين:

أ - $a = n$ ؛ $b = 2n + 1$ ب - $a = 2n + 3$ ؛ $b = 3n + 5$.

الحل:

n عدد طبيعي،

إثبات أنّ العددين a وَ b أوليين فيما بينهما:

أ- $a = n$ وَ $b = 2n + 1$:

لدينا: $-2a + b = 1$؛ $(u\,;v) = (-2\,;1)$، إذن: حسب مبرهنة **بيزو**، a وَ b **أوليين فيما بينهما**.

ب- $a = 2n + 3$ وَ $b = 3n + 5$:

لدينا: $-3a + 2b = 1$؛ $(u\,;v) = (-3\,;2)$، إذن: حسب مبرهنة **بيزو**، a وَ b **أوليين فيما بينهما**.

تمرين 47 ص108:

47 أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، يكون:

$PGCD(11n + 3\,;7n + 2) = 1$ ؛ $PGCD(n\,;n^2 + 1) = 1$.

الحل:

إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، يكون $PGCD(11n + 3\,;7n + 2) = 1$:

لدينا: $7(11n + 3) + 11(7n + 2) = 1$؛ من أجل كل عدد طبيعي n؛ $(u\,;v) = (7\,;11)$

إذن: حسب مبرهنة **بيزو**، $(11n + 3)$ وَ $(7n + 2)$ **أوليين فيما بينهما**.

تمرين 50 ص108:

50 n عدد طبيعي غير معدوم.

أ - حلّل العدد $n(2n + 1) - 1$.

ب - باستعمال مبرهنة بيزو، جِد القاسم المشترك الأكبر للعددين $n + 1$ و $n(2n + 1)$.

الحل:

n عدد طبيعي غير معدوم،

أ-تحليل العدد $n(2n + 1) - 1$:

لدينا: $n(2n + 1) - 1 = 2n^2 + n - 1 = (2n - 1)(n + 1)$

ب-باستعمال مبرهنة بيزو إيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين $(n + 1)$ وَ $n(2n + 1)$:

لدينا: $n(2n + 1) - 1 = (2n - 1)(n + 1)$، ومنه: $\underbrace{1}_{u} \times n(2n + 1) \underbrace{-(2n - 1)}_{v}(n + 1) = 1$

إذن: حسب مبرهنة **بيزو**، $PGCD\big(n(2n + 1)\,;(n + 1)\big) = 1$.

تمارين 51، 53 ص108: (عمل منزلي)

② خواص:

الخاصية01: إذا كان **القاسم المشترك الأكبر** لعددين صحيحين وَ فإنّه **يوجد عددان صحيحان u وَ v** حيث:

$$\square\square = \square$$

الخاصية02:

تمرين 55 ص109:

55 1) عيّن $PGCD(168;20)$.

2) هل المعادلة $168x+20y=6$ تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$؟

3) هل المعادلة $168x+20y=4$ تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$؟

الحل:

1)تعيين $PGCD(168;20)$:

لدينا: $PGCD(168;20)=4$

2)لدينا: $168x+20y=6$ معنـــاه: $4(42x+5y)=6$ أي: 4 **يقسم** 6؛ **وهذا تناقض.**

إذن: لا توجد ثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ تحقق $168x+20y=6$.

3)لدينا: $168x+20y=4$ معنـــاه: $4(42x+5y)=4$ أي: $42x+5y=1$

وبمأنّ: 5 **أولي مع** 42 فإنّه: توجد ثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ تحقق $42x+5y=1$.

نتيجة:

حتى يكون: للمعادلة $ax+by=c$ **حلاً في** $\mathbb{Z}^2$، يجب أن يكون: $PGCD(a;b)$ **يقسم** c.

ولحل هذه المعادلة

أولاً: نقوم بتبسيطها.

ثانياً: نقوم بحلها باستعمال **مبرهنة غوص** وذلك:

❶ بالبحث عن الحل الخاص (إذا لم يُعطى في التمرين)

❷ ثمّ نُطبق المبرهنة.

كما أنّه يمكن حلها باستعمال الموافقات (لا يُنصح بها)

❽ مبرهنة غوص Gauss:

① مبرهنة:

a؛ b وَ c ثلاثة **أعداد صحيحة غير معدومة.**

إذا كان: a **يقسم الجداء** bc وَكان: a **أولياً مع** b؛ فإنّ a **يقسم** c.

البرهان:

تمرين:

عيّن كل الثنائيات $(x\,;y)$ من الأعداد الصحيحة التي تُحقق $5x-7y=0$.

الحل:

تعيين كل الثنائيات $(x\,;y)$ من الأعداد الصحيحة التي تُحقق $5x-7y=0$:

لدينا: $5x-7y=0$، ومنه: $5x=7y$

وَبمأنّ: 7 **يقسم الجداء** $5x$ **وَ** 7 **أولي مع** 5؛ فإنّ: حسب مبرهنة **غوص**، 7 **يقسم** x.

وبالتالي: $x=7k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

بالتعويض نجد: $y=5k$

إذن: $\boxed{(x\,;y)=(7k\,;5k)}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$).

② خواص:

الخاصية 01: a وَ b عددان **طبيعيان غير معدومين** وَ p عدد **أولي.**

إذا كان: p **يقسم الجداء** ab؛ فـــإنّ: p **يقسم** a أو p **يقسم** b.

الخاصية 02: ، وَ أعداد **طبيعية غير معدومة.**

إذا كان: **مضاعفاً** للعددين و **وكان:** و **أوليين فيما بينهما؛** فـــإنّ: **مضاعف للجداء** bc.

تمرين 60 ص109:

60 نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية $2045x-64y=1$ ... (1)

1) عيّن $PGCD(2045;64)$.

2) استنتج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$. عيّن حلا خاصا للمعادلة (1).

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1).

الحل:

لدينا: $2045x-64y=1$ ... (1)

1)تعيين $PGCD(2045;64)$:

لدينا: $PGCD(2045;64)=1$.

2)استنتاج أنّ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلاً في $\mathbb{Z}^2$:

بمأنّ: 2045 وَ64 **أوليين فيما بينهما؛** فـإنّ: حسب مبرهنة **بيزو**؛ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلاً $(x;y)$ في $\mathbb{Z}^2$.

تعيين حلاً خاصا للمعادلة (1):

لدينا: $2045(\mathbf{21})-64(\mathbf{671})=1$، إذن: $(21;671)$ هو حل خاص لـ(1).

3)حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1):

لدينا: $\begin{cases}2045x-64y=1 & \dots(1)\\ 2045(\mathbf{21})-64(\mathbf{671})=1 & \dots(2)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد: $2045(x-21)-64(y-671)=0$

وعليه: $2045(x-21)=64(y-671)$

ومنه: 64 **يقسم** $2045(x-21)$ وَ64 **أولي مع** 2045

إذن: حسب مبرهنة **غوص**؛ 64 **يقسم** $(x-21)$

أي: $x-21=64k$

وبالتالي: $x=64k+21$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

بالتعويض نجد: $y=2045k+64$

إذن: $\boxed{(x;y)=(64k+21;2045k+64)}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$).

تمارين 61، 63، 64 وَ65 ص109: (عمل منزلي)

❾ حل في $\mathbb{Z}^2$ معادلة من الشكل $ax+by=c$:

(حل تمارين البكالوريا)

لحمد لله.

مجلة العبقري في الرياضيات (الأعداد والحساب)

الملخص// الشعبة: الثالثة تقني رياضي؛ رياضيات.

ملخص: حول الأعداد والحساب// التحضير الجيد للبكالوريا// الشعبة: 03 تر؛ ر.

نجاحك بيدك

❶ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:

① تعريف:

a وَ b عددان صحيحان و a غير معدوم.

القول أنّ العدد a **يقسم** العدد b يعني وُجود عدد صحيح k حيث: $\boxed{b = ak}$.

نقول كذلك a **قاسم** للعدد b

أو b **مضاعف لـ** a

أو b **يقبل القسمة على** a، نكتب: $a|b$ ونقرأ "a **يقسم** b"

ملاحظة: للعددين a وَ $-a$ نفس القواسم في $\mathbb{Z}$.

② خواص قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:

الخاصية 1): إذا كان: a **يقسم** b وَ b **يقسم** c، فإنّ: a **يقسم** c.

الخاصية 2): إذا كان: a **يقسم** b، فإنّه: **من أجل كل عدد صحيح** m، a **يقسم** mb

الخاصية 3): إذا كان: a **يقسم** b، فإنّه: **من أجل كل عدد صحيح غير معدوم** m، ma **يقسم** mb.

الخاصية 4): إذا كان: a **يقسم العددين** b وَ c، فإنّه: **من أجل كل عددين صحيحين** m وَ n، a **يقسم** $mb + nc$.

أي:

إذا كان: $\begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases}$، فإنّ: $a|c$. (استلزام)

إذا كان: $a|b$، فإنّ: $a|mb$ (حيث $m \in \mathbb{Z}$).

إذا كان: $a|b$، فإنّ: $ma|mb$ $(m \in \mathbb{Z}^*)$.

إذا كان: $\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases}$، فإنّ: $a|mb + nc$؛ $(m; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ أو $(m; n) \in \mathbb{Z}^2$.

طُرق:

لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث

العدد الصحيح a يقسم عبارة $f(n)$

نستعمل تعريف قابلية القسمة.

لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث

العبارة $f(n)$ تقسم العدد الصحيح a

نساوي بين $f(n)$ وقواسم a.

لتعيين الأعداد الصحيحة n حيث

العبارة $f(n)$ تقسم العبارة $g(n)$

نُرجع المسألة إلى أنّ عبارة $h(n)$ تقسم عددا صحيحا a.

أمثلة:

عيّن كل الأ

حة n التي $5n$ قاسما n.

❷ القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:

① القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:

مبرهنة:

a **عدد صحيح** وَ b **عدد طبيعي غير معدوم.**

توجد **ثنائية وحيدة** $(q;r)$ من **الأعداد الصحيحة حيث:** $\begin{cases} a = bq + \boxed{r} \\ 0 \leq r < b \end{cases}$.

☒ تسمى عملية **البحث عن الثنائية** $(q\,;r)$ **بـ القسمة الإقليدية** للعدد a على العدد b.

☒ يسمى q **حاصل القسمة الإقليدية** للعدد a على العدد b،

ويسمى r **باقي القسمة الإقليدية** للعدد a على العدد b.

توضيح: العدد a **إما مضاعف** لـ b وَ**إما محصور بين مضاعفين متعاقبين (متتابعين)** لـb،

أي: يوجد **عدد صحيح** q **وحيد** حيث: $\boxed{bq \leq a < b(q+1)}$،

ومنه: $b > \underbrace{a - bq}_{r} \geq 0$، بوضع: $r = a - bq$ نجد: $\begin{cases} a = bq + \boxed{r} \\ 0 \leq r < b \end{cases}$.

ملاحظات:

☒ في حالة $r = 0$ نجد: $a = bq$ (أي: a **مضاعف** لـb).

☒ يُمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية **لعدد صحيح** a على **عدد صحيح غير معدوم** b ونحصل على $\begin{cases} a = bq + \boxed{r} \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$.

② القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

a **عدد طبيعي غير معدوم**، نرمز بـD_a إلى **مجموعة قواسم** العدد a، **مثلا:** $D_8 = \{1\,;2\,;4\,;8\}$ وَ $D_0 = \mathbb{N}^*$.

تعريف:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومان.**

☒ D_a وَ D_b **مجموعتا قواسم** a وَ b على الترتيب

☒ $D_a \cap D_b$ **مجموعة القواسم المشتركة** للعددين a وَ b.

☒ يسمى **أكبر عنصر** من المجموعة $D_a \cap D_b$ **بـالقاسم المشترك الأكبر** للعددين a وَ b.

ونرمز له بالرمز $\boxed{PGCD(a;b)}$.

ملاحظات:

① $PGCD(a\,;a) = a \quad (a \in \mathbb{N}^*)$

② $PGCD(1\,;a) = 1 \quad (a \in \mathbb{N}^*)$

③ $PGCD(a\,;0) = a \quad (a \in \mathbb{N}^*)$

④ $D_a \cap D_b = D_c$ **حيث** $PGCD(a\,;b) = c$

(مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين **هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر)**

تمرين محلول 02 ص47: عيّن **الأعداد الصحيحة** a وَ b حيث أنّ: $4a^2 - b^2 = 15$.

تمرين مقترح من طرف أ: عيّن كل الثنائيات $(a;b)$ من **الأعداد الطبيعية** التي تُحقق: $a^2 - b^2 = 9$.

طريقة:

لحل هذه المعادلة يُمكن **تحليل الطرف الأول إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى** وَ**استغلال قواسم الطرف الثاني.**

③ خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

❑ خاصية 01:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومان** حيث $a \geq b$، r **باقي** قسمة a على b؛

أي: $\boxed{PGCD(a;b) = PGCD(b;r)}$.

❑ خاصية 03:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومان،** k **عدد طبيعي غير معدوم،** فإنّ:

$\boxed{PGCD(ka;kb) = k \times PGCD(a;b)}$.

خوارزمية إقليدس ص48:

❑ خاصية 02:

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a وَ b **هو** آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس.

تعريف:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومين.**

يكون العددان a وَ b **أوليين فيما بينهما** إذا وفقط إذا كان **قاسمهما المشترك يساوي 1.**

أي:

a وَ b **أوليين فيما بينهما** يُكافئ: $\boldsymbol{PGCD(a;b) = 1}$

مثال:

n عدد طبيعي غير معدوم (حيث $n \geq 1$)

تعيين $\boldsymbol{PGCD(n;n+1)}$**:**

لدينا: $\boxed{1}$ $n+1 = n(1)+1$

$n = 1(n)+0$

إذن: $\boxed{\boldsymbol{PGCD(n;n+1) = 1}}$، نستنتج أنّ **كل عددين طبيعيين متتابعين أوليان فيما بينهما.**

❑ خاصية 04:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومين.** d **قاسم مشترك** للعددين a وَ b.

نضع: $a = da'$ وَ $b = db'$

يكون: d **قاسم مشترك أكبر** للعددين a وَ b؛ إذا وفقط إذا كان العددان الطبيعيان a' وَ b' **أوليان فيما بينهما.**

④ تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين:

تعريف:

a وَ b **عددان صحيحان غير معدومين.**

القاسم المشترك الأكبر للعددين a وَ b **هو العدد الطبيعي** d، حيث: $\boxed{d = PGCD(|a|;|b|)}$.

خاصية:

a وَ b **عددان صحيحان غير معدومين.** k **عدد صحيح غير معدوم،**

$\boxed{PGCD(ka;kb) = |k|PGCD(a;b)}$.

❸ الموافقات في $\mathbb{Z}$:

① تعريف:

n **عدد طبيعي غير معدوم** $(n \in \mathbb{N}^*)$.

القول أنّ **عددين صحيحين** a وَ b **متوافقين بتردد** n يعني أنّ a وَ b **لهما نفس الباقي في القسمة على** n.

ونرمز $a \equiv b[n]$ ونقرأ: "a يُوافق b بتردد n".

ملاحظات:

② مبرهنة:

a وَ b عددان صحيحان وَ n عدد طبيعي غير معدوم $(n \in \mathbb{N}^*)$.
a وَ b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا وفقط إذا كان الفرق $a-b$ مضاعف لـ n.

نتيجة:
a وَ b عددان صحيحان وَ n عدد طبيعي غير معدوم $(n \in \mathbb{N}^*)$.

$a \equiv b[n]$
a وَ b متوافقين بتردد n.

$\Leftrightarrow$

$a-b=nk$
أي: $a-b \equiv 0[n]$
(الفرق $a-b$ مضاعف لـ n)

$\Leftrightarrow$

$\begin{cases} a = nq + \boxed{r} \\ b = nq' + \boxed{r} \end{cases}$
a وَ b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

تبرير صحة العبارات:

أ- $45 \equiv 3[7]$

ط1) بمأنّ: $\begin{cases} 45 = 7(6) + \boxed{3} \\ 3 = 7(0) + \boxed{3} \end{cases}$، فإنّ: $\boxed{45 \equiv 3[7]}$. **(التعريف)**

ط2) لدينا: $45 - 3 = 42 = 7(6)$ أي: $45 - 3 \equiv 0[7]$ إذن: $\boxed{45 \equiv 3[7]}$. **(المبرهنة)**

ط3) لدينا: $45 = 7(6) + \boxed{3}$ إذن: $\boxed{45 \equiv 3[7]}$. **(الخاصية 01)**

③ خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$:

في كل ما يلي نعتبر a، b، c وَ d أعداد صحيحة وَ n عدد طبيعي غير معدوم $(n \in \mathbb{N}^*)$.

خاصية 01:
كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n، بتردد n؛ **أي:** $a = nq + \boxed{r}$ **معناه** $n \equiv r[n]$ (حيث $n \geq 2$)

هذه الخاصية تسمح بالانتقال من مساواة إلى موافقة والعكس.

باقي خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$:

خاصية 02: $\boxed{a \equiv a[n]}$.

خاصية 03: إذا كان: $\boxed{a \equiv b[n]}$، فإنّ: $\boxed{b \equiv a[n]}$.

خاصية 04: إذا كان: $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ b \equiv c[n] \end{cases}$، فإنّ: $\boxed{b \equiv c[n]}$.

خاصية 05: إذا كان: $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases}$، فإنّ: $\begin{cases} a + c \equiv b + d[n] \\ a \times c \equiv b \times d[n] \end{cases}$.

خاصية 06: إذا كان: $\boxed{a \equiv b[n]}$، فإنّ: $\boxed{ka \equiv kb[n]}$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$).

خاصية 07: إذا كان: $\boxed{a \equiv b[n]}$، فإنّ: $\boxed{a^p \equiv b^p[n]}$ (حيث $p \in \mathbb{N}^*$).

خاصية 08: (**تمرين** 07 **ص**78) إذا كان: $\boxed{a \equiv b[n]}$، فإنّ: $\boxed{ma \equiv mb[mn]}$، (حيث $m \in \mathbb{N}^*$).

خاصية 09: (**تمرين** 09 **ص**78) إذا كان: $\boxed{a \equiv b[n]}$، فإنّ: $\boxed{a \equiv b[m]}$، (حيث $m|n$).

④ حل معادلة من الشكل :

أعمال موجهة

4 التعداد:

منا قشة النشاط 03 ص67:

① مبرهنة:

x **عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1.**

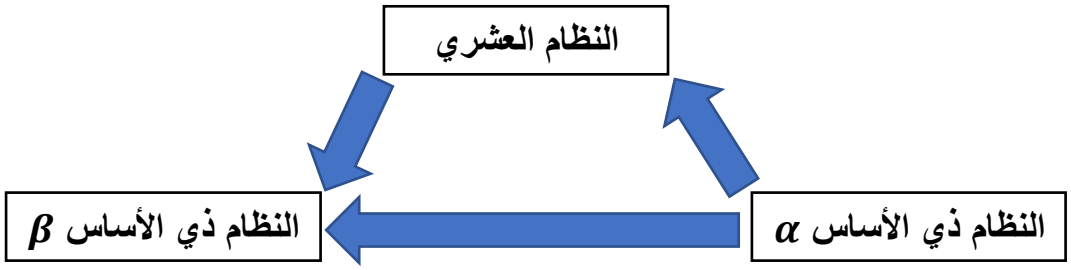
كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يُكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$a = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_2 x^2 + q_1 x + q_0$$

حيث q_0، q_1،...، q_{n-1} وَ q_n أعداد طبيعية وَ $\begin{cases} q_n \neq 0 \\ 0 \leq q_i < x \end{cases}$، نكتب: $a = \overline{q_n q_{n-1} \cdots q_2 q_1 q_0}$

في هذه الحالة نقول أنّنا كتبنا a في نظام تِعداد ذي الأساس x.

② الإنتقال من النظام ذي الأساس α إلى النظام ذي الأساس β:



ملاحظة: في النظام ذي الأساس 12، $\boldsymbol{\alpha = 10}$ وَ $\boldsymbol{\beta = 11}$.

5 الأعداد الأولية:

① تعريف:

القول أنّ العدد الطبيعي n **عدد أولي** معناه أنّ n **يقبل قاسمين مختلفين بالضبط** في $\mathbb{N}$، 1 وn نفسه.

ملاحظات ونتائج:

- 0 **غير أوّلي** لأنّه يقبل ما لانهاية من القواسم.
- 1 **غير أوّلي** لأنّه يقبل قاسم واحد هو 1.
- 2 هو **العدد الأوّلي الزوجي الوحيد**.
- 2؛ 3؛ 5؛ 7؛ 11؛ 13؛ 17؛ 19؛ 23 هي أعداد أولية.

② خواص:

خاصية 01: كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ **يقبل على الأقل قاسما أولياً**.

خاصية 02: كل عدد طبيعي n **غير أوّلي** أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ **يقبل قاسماً أوّليا** a حيث $a \leq \sqrt{n}$.

خاصية 03: مجموعة الأعداد الأوّلية غير منتهية.

ملاحظة مهمة:

إذا كان: $\sqrt{n}$ **عدداً طبيعياً** أي n **مربع تام** فإنّ n **غير أوّلي**؛ مثلاً: 169 **غير أوّلي** لأنّه **مربع تام** $(\sqrt{169} = 13 \in \mathbb{N})$.

③ تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية:

مبرهنة:

كل عدد طبيعي **غير أوّلي** (حيث) **يُمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية.**

❻ المضاعف المشترك الأصغر لعددين:

تمهيد:

a **عدد طبيعي غير معدوم**، نرمز بـM_a إلى **مجموعة مضاعفات** العدد a.

مثال: $a = 6$ لدينا: $M_a = \{0\ ;\ 6\ ;\ 12\ ;\ 18\ ;\ \dots\}$ **مضاعفات** 6 تُكتب من الشكل $6k$ $(k \in \mathbb{N})$.

ملاحظة: المضاعف الوحيد للعدد 0 هو 0.

① تعريف:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومان؛**

- M_a **مجموعة مضاعفات** العدد a
- M_b **مجموعة مضاعفات** العدد b
- $M_a \cap M_b$ هي **مجموعة المضاعفات المشتركة** للعددين a وَ b

يسمى **أصغر عنصر غير معدوم** في المجموعة $M_a \cap M_b$ **المضاعف المشترك الأصغر** للعددين a وَ b ونرمز له بالرمز $PPCM(a;b)$.

ملاحظات:

① $PPCM(a\ ;a) = a$.

② $PPCM(1\ ;a) = a$.

③ **(مجموعة المضاعفات المشتركة** لعددين طبيعيين غير معدومين **هي مجموعة المضاعفات المشترك الأصغر لهما)**

أي: $PPCM(a\ ;b) = c$، **فإنّ:** $M_a \cap M_b = M_c$.

② تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين:

تعريف:

a وَ b **عددان صحيحان غير معدومان؛**

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a وَ b هو أصغر **عدد طبيعي** $\boldsymbol{m}$ **غير معدوم**؛ حيث $\boxed{\boldsymbol{m} = PPCM(|a|;|b|)}$.

③ خاصية المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين:

خاصية:

a وَ b **عددان طبيعيان غير معدومان؛** $\boxed{PPCM(ka;kb) = |k|PPCM(a;b)}$ حيث $k \in \mathbb{Z}^*$.

④ حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية:

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a وَ b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية **المشتركة** في تحليلي العددين a وَ b بحيث يُؤخذ كل عامل من هذه العوامل **مرة واحدة وبأصغر أس.**

⑤ حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية:

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين وَ كلاهما أكبر تماما من هو جداء العوامل الأولية **المشتركة وغير الم كبر أس.**

تمرين 39 ص108:

39 عيّن $PGCD(a;b)$ وَ $PPCM(a;b)$ حيث: $a = 460845$، وَ $b = 372645$.

الحل:

تعيين $PGCD(a;b)$ وَ $PPCM(a;b)$، حيث $a = 460845$ وَ $b = 372645$:

لدينا: $\begin{cases} a = 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 11 \times 19 \\ b = 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 13^2 \end{cases}$، ومنه: $\begin{cases} PGCD(a;b) = a \wedge b = 3^2 \times 5 \times 7^2 \\ PPCM(a;b) = a \vee b = b \times 11 \times 19 \end{cases}$.

⑥ العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

خاصية:

جداء عددين طبيعيين a وَ b كلاهما أكبر تماما من 1 **مساو لجداء قاسمهما المشترك الأكبر** وَ**مضاعفهما المشترك الأصغر**، بعبارة أخرى $\boxed{PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = ab}$.

❼ مبرهنة بيزو Bézout:

① مبرهنة:

يكون **عددان صحيحان a وَ b أوليين فيما بينهما** إذا وفقط إذا وُجد **عددان صحيحان u وَ v** حيث:

$\boxed{au + bv = 1}$.

ملاحظة:

- **الثنائية $(u\,;v)$ ليست وحيدة.**

② خواص:

الخاصية01: إذا كان **القاسم المشترك الأكبر** لعددين صحيحين a وَ b فإنّه **يوجد عددان صحيحان u وَ v** حيث:

$\boxed{au + bv = d}$

الخاصية02: إذا كان **a عدداً أولياً** فإنّ **a أوّلي مع كل الأعداد التي لا يقسمها.**

الخاصية 03: إذا كان **a عدداً أولياً مع عددين صحيحين b وَ c** فإنّ **a أولي مع جدائهما bc.**

نتيجة:

حتى يكون: للمعادلة $ax + by = c$ **حلاً في $\mathbb{Z}^2$**، يجب أن يكون: $PGCD(a;b)$ **يقسم** c.

ولحل هذه المعادلة

أولاً: نقوم بتبسيطها.

ثانياً: نقوم بحلها باستعمال **مبرهنة غوص** وذلك:

❶ بالبحث عن الحل الخاص (إذا لم يُعطى في التمرين)

❷ ثمّ نُطبق المبرهنة.

كما أنّه يمكن حلها باستعمال الموافقات (لا يُنصح بها)

❽ مبرهنة غوص Gauss:

① مبرهنة:

a؛ b وَ c ثلاثة **أعداد صحيحة غير معدومة**.
إذا كان: a **يقسم الجداء** bc وَكان: a **أولياً مع** b؛ فإنّ a **يقسم** c.

② خواص:

الخاصية 01: a وَ b عددان **طبيعيان غير معدومين** وَ p عدد **أولي**.
إذا كان: p **يقسم الجداء** ab؛ فـــإنّ: p **يقسم** a **أو** p **يقسم** b.
الخاصية 02: a، b وَ c أعداد **طبيعية غير معدومة**.
إذا كان: a **مضاعفاً** للعددين b وَ c وَكان: b وَ c **أوليين فيما بينهما**؛ فـــإنّ: a **مضاعف للجداء** bc.

❾ حل في $\mathbb{Z}^2$ معادلة من الشكل $ax + by = c$:

(حل تمارين البكالوريا)

الحمد لله.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (الأعداد والحساب في البكالوريا)

تمارين // الشعبة: الثالثة تقني رياضي؛ رياضيات.

تمارين البكالوريا: حول الأعداد والحساب // التحضير الجيد للبكالوريا // الشعبة: 03 تر؛ ر.

شعبة: تقني رياضي

التمرين 01: (04 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 01 // الشعبة: تقني رياضي.

n عدد طبيعي أكبر من 5.

1/ a و b عددان طبيعيان حيث $a = n - 2$ وَ $b = 2n + 3$.

أ-ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر لعددين a و b؟

ب-بيّن أنّ العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ مضاعفا للعدد 7.

ج-عيّن قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a; b) = 7$.

2/نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث: $p = 2n^2 - 7n - 15$ وَ $q = n^2 - 7n + 10$.

أ-بيّن أنّ كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n - 5$.

ب-عيّن تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p; q)$.

التمرين 02: (04 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: تقني رياضي.

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y: $(I) \dots 4x - 9y = 319$.

1)-تأكد أنّ الثنائية $(82; 1)$ حل للمعادلة (I).

-حل المعادلة (I).

2)عيّن الثنائيات $(a; b)$ الصحيحة، حلول المعادلة: $(II) \dots 4a^2 - 9b^2 = 319$.

3)استنتج الثنائيات $(x_0; y_0)$ حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

التمرين 03: (04 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: تقني رياضي.

1.حل المعادلة التفاضلية: $y' = (\ln 2)y$.

2.نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يُحقق $f(0) = 1$، عيّن عبارة $f(x)$.

3.n عدد طبيعي.

أ) ادرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n.

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$.

4.أ) احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث $S_n = f(0) + f(1) + \cdots + f(n)$.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يقبل من أجلها S_n القسمة على 7.

التمرين 04: (03 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: تقني رياضي.

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يُكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي: $n = \overline{11\alpha 00}$ حيث α عدد طبيعي.

1-عيّن α حتى يكون قابلا للقسمة على .

-عيّن العدد

التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

1- عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13.

2- تحقق أنّ: $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$.

3- عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$.

التمرين 06: (05 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 01// الشعبة: تقني رياضي.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1/المعادلة: $21x + 14y = 40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة.

2/في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون: $\overline{5413} + \overline{1562} = \overline{3421}$.

3/باقي القسمة الإقليدية للعدد: $3^{2011} + \cdots + 3^2 + 3 + 1$ على 7 هو: 6.

التمرين 07: (04 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1)تحقّق أنّ: $-3 \equiv 4[7]$ ثم بيّن أنّ: $A_3 \equiv 6[7]$.

2)ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7.

3)بيّن أنّه إذا كان n فرديا فإنّ: $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7 واستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على7

4)ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7؟

التمرين 08: (03 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 01// الشعبة: تقني رياضي.

1-ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 9^n على 11.

2-ما هو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11؟

3-برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012})$ يقبل القسمة على 11.

4-عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مُضاعفا للعدد 11.

التمرين 09: (03,5 نقطة) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

نسمي (S) الجملة التالية: $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح $(x \in \mathbb{Z})$.

1-بيّن أنّ العدد 153 حل للجملة (S).

2-إذا كان x_0 حلا لِـ(S)، بيّن أنّ: (x حل لـ(S)) يُكافئ $\left(\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}\right)$.

3-حل الجملة (S).

4- يُريد مكتبي وضع عدد من الكتب في عُلب، فإذا استعمل علبا تتسع لِـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب، وإذا استعمل علبا تتسع لِـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب.

إذا علمت أنّ عدد الكتب التي بحوزته محصورة بين 500 و600 كتابا، ما هو عدد الكُتب؟

التمرين 10: (03,5 نقطة) بكالوريا 2013// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

x وَ y عددان صحيحان وَ (E) المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $11x + 7y = 1$.

)أ) عيّن ($_0$ ؛ حل المعادلة الذي يُحقق: .

ب) استنتج

أ) بيّن أنّ $(a;-b)$ حل للمعادلة (E).
ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77؟
3) n عدد طبيعي باقي قسمته على 11 هو 1 وباقي قسمته على 7 هو 2.
عيّن أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2013$.

التمرين 11: (05 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

n وَ p عددان طبيعيان.
1) أدرس، حسب قيم n، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n.
2) نضع: $C_n = 16n + 9$ وَ $D_p = 5^p$.
أ) بيّن أنّه إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي، فإنّه يوجد عدد طبيعي n يُحقق $C_n = D_p$.
ب) عيّن n من أجل $p = 6$.
3) f هي الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 5^{(4x+2)} - 9$
أدرس تغيّرات الدّالة f، ثم استنتج إشارة $f(x)$.
4) (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1} = 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$.
أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$.
ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ u_n عدد طبيعي.
5) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

التمرين 12: (03,5 نقطة) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: تقني رياضي.

1) أ) عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13.
ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $3 - 2014^{2037} + 42 \times 138^{2015}$ على 13.
2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n}[13]$.
ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$.

التمرين 13: (05 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: تقني رياضي.

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $6x - 7y = 19$ حيث x و y عددان صحيحان.
1) جِد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) بحيث: $x_0 = y_0$، ثمّ حل المعادلة (E).
2) استنتج قيم العدد الصحيح λ والتي تُحقّق: $\begin{cases}\lambda \equiv 24[7]\\ \lambda \equiv 5[6]\end{cases}$، ثمّ عيّن باقي قسمة العدد λ على 42.
3) عيّن جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث: $|x + y - 1| \leq 13$.
4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.
ب- عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تُحقّق الجملة: $\begin{cases}n - 5^n \equiv 2020[7]\\ n \equiv 1437[6]\end{cases}$.

التمرين 14: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

1) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي k، $4^{5k} \equiv 1[11]$.
2) استنتج تبعا لقيم العدد الطبيعي بواقي القسمة الإقليدية للعدد n على .
) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي ، العدد يقبل القسمة على
.
على 11.

التمرين 15: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 01// الشعبة: تقني رياضي.

1)عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

2)استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5.

3)برهن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1)$ مضاعف للعدد 5.

4)عيّن الأعداد الطبيعية n حتّى يكون العدد $(3^{4n} + 27^n - 4)$ قابلا للقسمة على 5.

التمرين 16: (04 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

1)نعتبر المعادلة ذات المجهول $(E):(x;y) \dots 5x - 3y = 1$، حيث x وَ y عددان صحيحان.

أ) تحقّق أنّ الثنائية $(6n + 2; 10n + 3)$ حل للمعادلة (E) حيث n عدد طبيعي.

ب) استنتج أنّ العددين $10n + 3$ وَ $6n + 2$ أوليان فيما بينهما.

2)نضع $a = 10n + 3$ وَ $b = 3n + 5$ وليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a وَ b.

أ) بيّن أنّ $d = 1$ أو $d = 41$.

ب) بيّن أنّه إذا كان $d = 41$ فإنّ $n \equiv 12[41]$.

3)ليكن العددان الطبيعيان $A = 20n^2 + 36n + 9$ وَ $B = 6n^2 + 19n + 15$.

أ) بيّن أنّ العددين A وَ B يقبلان القسمة على $2n + 3$.

ب) جد بدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A وَ B.

التمرين 17: (04 نقاط) بكالوريا 2020// الموضوع 01// الشعبة: تقني رياضي.

نعتبر المعادلتين: $(E_1) \dots 693x - 216y = 738$ وَ $(E_2) \dots 77x - 24y = 82$ حيث x و y عددان صحيحان.

1) جد $PGCD(693; 216)$ وَاستنتج أنّ المعادلتين (E_1) وَ (E_2) متكافئتان.

2) تحقّق أنّ ثنائية $(2; 3)$ حلّ للمعادلة (E_2) ثمّ أوجد حلولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3) جد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E_2) التي تُحقّق: $|y - x| \leq 54$.

4) ليكن N عددا طبيعيا يُكتب $\overline{\beta 68\alpha}$ في النظام ذي الأساس 9 وَيُكتب $\overline{1\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذي الأساس 6.

حيث α وَ β عددان طبيعيان.

جد العددين α وَ β، ثمّ أكتب العدد في النظام العشري.

التمرين 18: (04 نقاط) بكالوريا 2020// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

1)أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $8^{2020} - 2 \times 3^{1441} - 1$ على 5.

2) من أجل كل عدد طبيعي n، نعتبر العدد الطبيعي a_n حيث: $a_n = 3^{n+1} + 4$.

عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $a_n \equiv 0[5]$.

3) نعتبر العدد الطبيعي b_n حيث: $b_n = 7a_n + 5$.

أ. عيّن القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a_n وَ b_n.

ب. بيّن أنّ: $a_n \equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا كان $b_n \equiv 0[5]$.

جـ. استنتج الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون a_n وَ b_n أوليين فيما بينهما.

شعبة: رياضيات

التمرين 19: (05 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x وy حيث: $3x-21y=78$.

1)أ-بيّن أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب-أثبت أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x\equiv 5[7]$.

استنتج حلول المعادلة (E).

2)أ-ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب-عيّن الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق $5^x+5^y\equiv 3[7]$.

التمرين 20: (04 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

x عدد طبيعي أكبر من 1 وy عدد طبيعي.

A عدد طبيعي يُكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A=\overline{5566}$.

1)أ-أنشر العبارة $(x+1)(5x^2+6)$ ثم أوجد علاقة تربط بين x وy إذا علمت أنّ $A=(5x^2+6)(2+2y)$.

ب-احسب x وy إذا علمت أنّ x عدد أوّلي أصغر من 12، ثمّ اكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري.

2)أ-عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

ب-عيّن الأعداد الطبيعية a وb حيث $a>b$ التي تُحقق: $\begin{cases}a+b=32\\a^2+b^2=584\end{cases}$.

التمرين 21: (04 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

1.نعتبر المعادلة: (1) ... $7x+65y=2009$، حيث: x وy عددان صحيحان.

أ) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ y مضاعف للعدد 7.

ب) حل المعادلة (1).

2.ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.

3.عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9.

4.نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=2^{6n}-1$.

أ) تحقّق أنّ u_n يقبل القسمة على 9.

ب) حل المعادلة: (2) ... $(7u_1)x+(u_2)y=126567$ ذات المجهول $(x;y)$، حيث: x وy عددان صحيحان.

جـ) عيّن الثنائية $(x_0;y_0)$ حل (2) حيث x_0 وy_0 عددان طبيعيان مع $y_0\geq 25$.

التمرين 22: (04 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: رياضيات.

1-برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13.

2-استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، يقبل كل من العددين $3^{3n+1}-3$ و$3^{3n+2}-9$ القسمة على 13.

3-عيّن، حسب قيم n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13، واستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13.

4-نضع من أجل كل عدد طبيعي p: $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$.

أ-من أجل ، عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد على .

ب-برهن أنّه

5-يُكتب العددان الطبيعيان a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي:

$a=\overline{1001001000}$ و $b=\overline{1000100010000}$.

أ-تحقّق أنّ العددين a و b يُكتبان على الشكل A_p في النظام العشري.

ب-استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13.

التمرين 23: (04 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

(U_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تُحقق:

$\begin{cases} U_4=15 \\ m+d=42 \end{cases}$ حيث $\begin{cases} m=PPCM(U_3;U_5) \\ d=PGCD(U_3;U_5) \end{cases}$.

1/عيّن الحدين U_3 و U_5 ثم استنتج U_0.

2/اكتب U_n بدلالة n، ثم بيّن أنّ: 2010 حد من حدود (U_n) وعيّن رتبته.

3/عيّن الحد الذي ابتداءً منه يكون مجموع 5 حدود من (U_n) يساوي 10080.

4/n عدد طبيعي غير معدوم.

أ) احسب بدلالة n المجموع S حيث: $S=U_0+U_1+U_2+\cdots+U_{2n}$.

ب) استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث:

$S_1=U_0+U_2+U_4+\cdots+U_{2n}$ وَ $S_2=U_1+U_3+U_5+\cdots+U_{2n-1}$.

التمرين 24: (04 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 02// الشعبة: رياضيات.

1)نعتبر المعادلة: $(E)\ldots 13x-7y=-1$ حيث: x و y عددان صحيحان.

حل المعادلة (E).

2)عيّن الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث: $\begin{cases} a\equiv -1[7] \\ a\equiv 0[13] \end{cases}$.

3)ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و13.

4)ليكن العدد الطبيعي b المكتوب، في نظام التعداد ذي الأساس 9، كما يلي: $\overline{\alpha 00\beta 086}$

حيث: α و β عددان طبيعيان؛ $\alpha\neq 0$.

عيّن α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91.

التمرين 25: (04 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

1)نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $(1)\ldots 2011x-1432y=31$.

أ-أثبت أنّ العدد 2011 أولي.

ب-باستعمال خوارزمية إقليدس، عيّن حلاً خاصاً $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1)، ثم حل المعادلة (1).

2)أ-عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7، ثم جِد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7.

ب-عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $2010^n+2011^n+1432^n\equiv 0[7]$.

3)N عدد طبيعي يُكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث: α، β، γ بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (1).

عيّن α، β و γ، ثمّ اكتب N في النظام العشري.

التمرين 26: (04 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: رياضيات.

1)أ-احسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0، u_1، u_2، u_3، u_4 على 7.

ب-خمّن قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث:$u_{2k} \equiv a[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b[7]$.

2)أ-برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+2} \equiv u_n[7]$.

ب-برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي k، $u_{2k} \equiv 2[7]$، ثمّ استنتج أنّ:$u_{2k+1} \equiv 3[7]$.

3)نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$.

أ-بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب-احسب، بدلالة n، كلا من u_n وS_n حيث:$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين 27: (03 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

1.n عدد طبيعي. نعتبر العددين الصحيحين α وβ، حيث:$\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و$\beta = n + 3$.

أ-بيّن أنّ:$PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(\beta;10)$. (يُرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر)

ب-ما هي القيّم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha;\beta)$؟

جـ-عيّن مجموعة قيّم العدد الطبيعي n، بحيث يكون:$PGCD(\alpha;\beta) = 5$.

2.أ-ادرس، حسب قيّم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

ب-عيّن مجموعة قيّم العدد الطبيعي n التي تُحقّق الجملة التالية:$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$.

التمرين 28: (03 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 02// الشعبة: رياضيات.

1.أ-عيّن الأعداد الطبيعية n التي تُحقّق:$2n + 27 \equiv 0[n+1]$.

ب-عيّن الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية، حيث:$(b-a)(a+b) = 24$.

جـ-استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

2.α وβ عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشكل $\alpha = \overline{10141}$ و$\beta = \overline{3403}$.

أ-اكتب العددين α وβ في النظام العشري.

ب-عيّن الثنائية $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث:$\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$.

3.أ-عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و1434، ثمّ استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و478.

ب-حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية:$2013x - 1434y = 27$.

التمرين 29: (04 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

1)نعتبر المعادلة (E):$2013x - 1962y = 54$ حيث x وy عددان صحيحان.

أ) احسب $PGCD(2013;1962)$.

ب) استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا.

جـ) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ:$x \equiv 0[6]$.

د) استنتج حلاً خاصّا $(x_0;y_0)$ حيث $74 < x_0 < 80$ ثمّ حل المعادلة (E).

2)نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x وy حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (E).

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d؟

ب) عيّن قيم العددين الطبيعيين a وb حيث:$671a - 654b = 18$ و$PGCD(a;b) = 18$.

التمرين 30: (04 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

2)أ) بيّن أنّ 89 عدد أوّلي.

ب) عيّن كل القواسم الطبيعية للعدد 7832.

جـ) بيّن أنّ العددين 981 و977 أوّليان فيما بينهما.

3) x وy عددان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك الأكبر هو 2.

عيّن x وy علماً أنّ: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$.

4) a، b وc أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أوّلي مع b وa أوّلي مع c.

أ) باستعمال مبرهنة بيزو، برهن أنّ a أوّلي مع $b \times c$.

ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $PGCD(a; b^n) = 1$.

(يُرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر)

جـ) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و1954^{1962}.

التمرين 31: (04 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 02// الشعبة: رياضيات.

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة، في كل حالة من الحالات الأربع الآتية، مع التعليل.

1) **متتاليات عددية.**

2) **أعداد مركبة.**

3) a، b، c وd أعداد طبيعية غير معدومة وأصغر من أو تساوي 9.

$\overline{abcd}$ عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري.

من أجل كل الأعداد a، b، c وd: يكون العدد $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان:

أ) العدد $(a - b + c - d)$ يقبل القسمة على 11.

ب) العدد $(a + b + c + d)$ يقبل القسمة على 11.

جـ) العدد $\overline{cd}$ المكتوب في النظام العشري، يقبل القسمة على 11.

4) **هندسة فضائية.**

التمرين 32: (05 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 02// الشعبة: رياضيات.

1)حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 8 = 0$

(لاحظ أنّ: $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

A وB نقطتان من المستوي، لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ وَ $z_B = \overline{z_A}$.

2)أ) بيّن أنّ: $\frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}$.

ب) استنتج عُمدة للعدد المركب z_A.

جـ) استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\frac{7\pi}{12}$ و$\sin\frac{7\pi}{12}$.

3)أ) حل، في مجموعة الأعداد الصحيحة، المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $7x - 2y = 1$.

ب) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة، حلا للمعادلة $7x - 24y = 12$ فإنّ x يكون مضاعفا للعدد .

جـ) استنتج كل الثنائيات من الأعداد الصحيحة، حلولا للمعادلة .

التمرين 33: (04,5 نقطة) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما، حدّها الأوّل u_0 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} ln(u_1)+ln(u_2)=11 \\ u_1+u_2=e^4(1+e^3) \end{cases}.$$

1)احسب u_1 وu_2 ثم استنتج قيمة الأساس q.

2)نضع: $u_1=e^4$ و$q=e^3$.

أ) عبّر عن u_n بدلالة n.

ب) نضع: $S_n=ln(u_0)+ln(u_1)+ln(u_2)+\cdots+ln(u_n)$

احسب S_n بدلالة n.

3)من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n=n+3$.

أ) بيّن أنّ: $PGCD(2S_n;a_n)=PGCD(a_n;14)$.

ب) عيّن القيم الممكنة لـ: $PGCD(2S_n;a_n)$.

جـ) عيّن قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها: $PGCD(2S_n;a_n)=7$.

4)ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

5)نضع: $b_n=3na_n-2S_n+1437^{2016}+1$.

عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $\begin{cases} b_n\equiv 0[7] \\ n\equiv 0[5] \end{cases}$.

6)بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $(1437^{9n+1}-3\times 4^{12n+1}+52)$ يقبل القسمة على 7.

التمرين 34: (04 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 02// الشعبة: رياضيات.

1)أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و7^n على 11.

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11.

2)نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $7x-3y=8$، حيث x وy عددان طبيعيان.

أ) حلّ المعادلة (E).

ب) d القاسم المشترك الأكبر للعددين x وy حيث الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E).

-ما هي القيم الممكنة للعدد d؟

-عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d=4$.

جـ) جِد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x}+1437^{3y}\equiv 0[11]$.

التمرين 35: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

1)نعتبر المعادلة: (E) ... $104x-20y=272$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x وy عددان صحيحان.

أ) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و104 ثم بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا.

ب) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x\equiv 3[5]$، ثم استنتج حلول المعادلة (E).

2) λ عدد طبيعي يُكتب $\overline{1\alpha\beta 01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4، ويُكتب $\overline{1\alpha\beta 01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 حيث α وβ عددان طبيعيان.

عيّن α وβ، ثم اكتب λ في النظام العشري.

3)تحقق أن كلا من 2017 و1009 عدد أوّلي، ثم عيّن الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $2m-$

حيث ، .

التمرين 36: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصّحيحين x وy حيث $(E) \dots 63x + 5y = 159$.

1)تحقّق أنّ العددين 5 و63 أوّليان فيما بينهما ثمّ بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا.

2)برهن أنّه إذا كانت الثّنائية $(x;y)$ حلاً للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 3[5]$ ثمّ استنتج حلول المعادلة (E).

3)λ عدد طبيعي يُكتب $\overline{5\alpha 0\alpha}$ في نظام التّعداد ذي الأساس7 ويُكتب $\overline{\beta 10\beta 0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5
جِد العددين الطّبيعيين α وβ ثمّ اكتب العدد $\lambda + 2$ في النظام العشري.

4)أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتّى يقبل العدد $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$ القسمة على 5، حيث $(x;y)$ حلول المعادلة (E) وx عدد طبيعي.

التمرين 37: (04 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 02// الشعبة: رياضيات.

1)α وَβ عددان طبيعيان بحيث: $\begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$.

-عيّن العددين α وَβ، ثمّ بيّن أنّ العددين $\frac{\alpha}{2}$ وَβ أوليان فيما بينهما.

2)عيّن كل الثنائيات الصحيحة $(x;y)$ التي تحقق المعادلة: $1009x - 2017y = 1$.

3)عيّن الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة: $\begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$.

4)أ)n عدد طبيعي، ادرس تبعاً لقيم n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9.

ب)L عدد طبيعي يُكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي: $L = \underbrace{\overline{111\dots1}}_{\text{2018 مرة}}$.

-عيّن باقي القسمة الاقليدية للعدد $42L$ على 9.

التمرين 38: (04 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

1)حل المعادلة $(E) \dots 505x - 673y = 1$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x وَy عددان صحيحان.
(لاحظ أنّ: $2019 = 3 \times 673$ وَ$2020 = 4 \times 505$)

2)بيّن أنّه من أجل كلّ ثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإنّ: x وَy من نفس الإشارة.

3)نعتبر المتتاليتين (u_n) و(v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases}$ وَ $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = v_n + 673 \end{cases}$.

-اكتب u_α بدلالة α ثمّ اكتب v_β بدلالة β حيث α وَβ عددان طبيعيان.

4)أ) عيّن الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و(v_n) ثمّ بيّن أنّ هذه الحدود المشتركة تُشكّل متتالية حسابية (w_n) يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023)$

احسب بدلالة n الجداء $p = X_1.X_2 \dots X_n$.

التمرين 39: (05 نقاط) بكالوريا 2020// الموضوع 01// الشعبة: رياضيات.

ليكن n عدداً طبيعياً أكبر تماما من 1.

نعتبر الأعداد الطبيعية ، وَ حيث: ، وَ .

) أثبت أنّ العددين وَ أوليان فيما بينهما.

) نسمي ا

3) نسمي β القاسم المشترك الأكبر للعددين a وَ bc.
أ. أثبت أنّ α يقسم β.
ب. أثبت أنّ العددين β و b أوليان فيما بينهما ثمّ استنتج أنّ: $\alpha = \beta$.
4) نعتبر العددين الطبيعيين A و B حيث: $A = 4n^2 - 3n - 1$ وَ $B = 18n^3 - 3n^2 - 13n - 2$.
أ. بيّن أنّ كلا من العددين A وَ B مضاعف للعدد الطبيعي $(n-1)$.
ب. نضع: $d = PGCD(A;B)$، عبّر حسب قيم α عن d بدلالة n. (لاحظ أنّ: $bc = 18n^2 + 15n + 2$)

التمرين 40: (04 نقاط) بكالوريا 2020// الموضوع 02// الشعبة: رياضيات.

1) حل المعادلة: $3x - 5y = 2$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x وَ y عددان صحيحان.
2)أ. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 9^n على 7.
ب. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 4^n على 11.
3) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $14 \times 4^n + 11 \times 9^n - 4 \equiv 0[77]$.
4) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع: $u_n = 3 \times 4^n + 4 \times 9^n$ وَ $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{15n}$
أ. عبّر عن S_n بدلالة n.
ب. أثبت أنّ S_n مضاعف للعدد 77.

الأعداد والحساب في النظام القديم

التمرين 41: (نقاط) بكالوريا الجزائر 1997// الشعبة: علوم دقيقة. بالتصرف * منقول *

1) جِد القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 2490، 32785 وَ2905.
2) حلّ في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $7x + 6y = 79$ (لاحظ أنّ: $72 + 7 = 79$)
3) اشترى نادي كرة يد ملابس رياضية للاعبيه، إذا علمنا أنّ ثمن بذلة اللاعب هو 2905 دج وثمن بذلة اللاعبة هو 2490 دج وعلمنا أنّ النادي دفع في المجموع 32785 دج.
ما هو عدد اللاعبين واللاعبات؟

التمرين 42: (نقاط) بكالوريا الجزائر 2001// الشعبة: علوم طبيعة وحياة. بالتصرف * منقول *

1) أثبت أنّ العددين 993 وَ170 أوليان فيما بينهما.
2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ذات المجهولين x وَ y حيث: $993x - 170y = 143$ ... (1).
أ. عيّن الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) حيث: $x_0 + y_0 = 6$.
ب. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1).
3) جِد أصغر عدد طبيعي A بحيث يكون باقي قسمة $(A-1)$ على كل من العددين 1986 وَ340 هو 14 وَ300 على التوالي.

التمرين 43: (نقاط) بكالوريا الجزائر 1998// الشعبة: علوم طبيعة وحياة. بالتصرف * منقول *

1) عيّن مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث: $3x - 5 \equiv 0[11]$.
2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $3x - 11y = 5$ ... (1).
حل هذه المعادلة (يُمكن استعمال نتيجة السؤال الأوّل)
3) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين وَ .
ماهي القيم الـ

التمرين 44: (نقاط) بكالوريا الجزائر **2004**// الشعبة: ت. ر. بالتصرف * منقول *

لتكن في المجموعة $\mathbb{Z}^2$، المعادلة (1) ... $13x - 11y = 23$.

1) عيّن حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) حيث: $x_0 - y_0 = 1$، ثمّ استنتج مجموعة حلول المعادلة (1).

عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون: $-10 < x < 40$.

2) نفرض أنّ x وَ y موجبان وَ d قاسمهما المشترك الأكبر، ما هي القيم الممكنة للعدد d؟

عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون: $d = 23$.

استنتج عندئذٍ الثنائية $(x; y)$ التي يأخذ من أجلها العدد x أصغر قيمة؟

التمرين 45: (نقاط) بكالوريا الجزائر **1995**// الشعبة: علوم الطبيعة والحياة. بالتصرف * منقول *

1) حلّل العدد 1995 إلى جداء عوامل أولية.

2) عيّن كل الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث: $x + 7y = 1995$ وَ $PGCD(x; y) = 19$.

التمرين 46: (نقاط) بكالوريا الجزائر **1996**// الشعبة: علوم دقيقة. بالتصرف * منقول *

a، b وَ c أعداد طبيعية حيث: $1 \leq a \leq b \leq c$.

عيّن a، b وَ c وَالجداء abc علما أنّ: في النظام ذي الأساس a يكون $b + c = \overline{46}$ وَ $bc = \overline{555}$.

التمرين 47: (نقاط) بكالوريا الجزائر **1997**// الشعبة: علوم دقيقة. بالتصرف * منقول *

1) عيّن القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996، 1497 وَ2994.

2) لتكن المعادلة (1) ... $1996x - 1497y = 2994$، حيث x وَ y عددان صحيحان.

أ. أثبت أنّ x مضاعف للعدد 3 وَ y مضاعف للعدد 2، ثمّ عيّن حلول المعادلة (1).

ب. عيّن الحلول $(x; y)$ للمعادلة (1) بحيث يكون: $x.y = 1950$.

التمرين 48: (نقاط) بكالوريا الجزائر **1992**// الشعبة: علوم طبيعة وحياة. بالتصرف * منقول *

1) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1885 وَ580.

2) α عدد صحيح، نعتبر المعادلة (1) ... $1885x - 580y = \alpha$

أوجد الشرط اللازم والكافي الذي يُحققه α حتى تقبل المعادلة (1) حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

3) نفرض أنّ: $\alpha = 1305$،

أ. حلّ المعادلة (1).

ب. أوجد الحلول $(x; y)$ بحيث يكون x قاسما للعدد y.

التمرين 49: (نقاط) بكالوريا الجزائر **2006**// الشعبة: علوم دقيقة. بالتصرف * منقول *

1) حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $18x + 4y = 84$.

ما هي الحلول $(x; y)$ لهذه المعادلة التي تُحقّق: $xy > 0$؟

2) n عدد طبيعي يُكتب $\overline{30\alpha\beta\gamma}$ في النظام ذي الأساس 5 وَيُكتب $\overline{55\alpha\beta}$ في النظام ذي الأساس 7.

عيّن الأعداد الطبيعية α، β وَ γ؛ ثمّ أكتب n في النظام العشري.

التمرين 50: (نقاط) بكالوريا الجزائر **1990**// الشعبة: علوم دقيقة. بالتصرف * منقول *

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ... $5x - 6y = 3$.

) أثبت أنّه إذا كان حلا للمعادلة ، فإنّ مضاعف لـ ، ثمّ استنتج حلا خاصا للمعادلة 1).

3) ما بين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ التي هي حلول للمعادلة (1)
ما هي الثنائيات $(x;y)$ التّي تُحقّق: $x^2-y^2<56$؟

التمرين 51: (نقاط) بكالوريا الجزائر 1996// الشعبة: علوم دقيقة. بالتصرف * منقول *

1) x وy عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما.
أثبت أنّ العددين $(x+y)$ وَxy أوليان فيما بينهما.
2) α وَβ عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما.
عيّن α وَβ حتى يكون: $15\alpha^2-229\beta=30\beta$.
3) x وy عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما.
عيّن مجموعة الثنائيات $(x;y)$ التي تُحقّق: $15(x^2+y^2)=229(x+y)$.

التمرين 52: (نقاط) بكالوريا الجزائر 1997// الشعبة: علوم دقيقة. بالتصرف * منقول *

1) حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x';y')$: $9x'-14y'=13$، علما أنّ $(1;3)$ حلا لها.
2) نعتبر $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $45x-28y=130$.
أ. بيّن أنّه إذا كان $(x;y)$ حلا لهذه المعادلة، فإنّ x مضاعف للعدد 2 وَy مضاعف للعدد 5.
ب. حل هذه المعادلة.
3) N عدد طبيعي يُكتب $\overline{2\alpha\alpha3}$ في نظام تِعداد أساسه 9 وَ$\overline{5\beta\beta6}$ في نظام تِعداد أساسه 7.
عيّن α وَβ، ثمّ أكتب N في النظام العشري.

التمرين 53: (نقاط) بكالوريا الجزائر 2005// الشعبة: علوم دقيقة. بالتصرف * منقول *

α وβ عددان، حيث: $\alpha=n^2+n$ وَ$\beta=n+2$ مع $n\in\mathbb{N}$.
1)أ. برهن أنّ: $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;n)$.
ب. استنتج القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha;\beta)$.
2) a وb عددان طبيعيان يُكتبان في نظام التّعداد ذي الأساس n كما يلي: $a=\overline{3520}$ و$b=\overline{384}$.
أ. برهن أنّ العدد $3n+2$ هو قاسم مشترك للعددين a وَb.
ب. استنتج تبعا لقيم n أنّ: $PGCD(a;b)=3n+2$ أو $PGCD(a;b)=2(3n+2)$.
جـ. عيّن α وَβ إذا علمت أنّ: $PGCD(a;b)=41$.

التمرين 54: (نقاط) بكالوريا الجزائر 2007// الشعبة: علوم دقيقة. بالتصرف * منقول *

n عدد طبيعي حيث $n>2$، نعتبر الأعداد الطبيعية: $a=2n+1$، $b=4n+3$ وَ$c=2n+3$.
1) أثبت أنّ العددين a وَb أوليان فيما بينهما واستنتج أنّ الأعداد a، b، c أولية فيما بينها.
2) عيّن تبعا لقيم n قيمة القاسم المشترك الأكبر للعددين b وَc.
عيّن قيمة n بحيث يكون: $PGCD(b;c)=3$ وَ$PPCM(b;c)=1305$.
3) أكتب b^2 في نظام أساسه a.

التمرين 55: (نقاط) بكالوريا الجزائر 1994// الشعبة: علوم دقيقة. بالتصرف * منقول *

1)أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 10.
ب. استنتج رقم أحاد العدد 1994^{1414}.
2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرّفة بحدّها العام .
أ. تحقّق من

ب. أوجد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلا القسمة على 10.

التمرين 56: (نقاط) بكالوريا الجزائر **2004**// الشعبة: علوم طبيعة وحياة. بالتصرف * منقول *

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10.
استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي k، العدد $(7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3})$ يقبل القسمة على 10.

2) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$.
- أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $S_{n+4} \equiv S_n[10]$.
- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد S_n على 10.

التمرين 57: (نقاط) بكالوريا الجزائر **1980**// الشعبة: علوم دقيقة. بالتصرف * منقول *

1) أوجد أعدادا طبيعية مربع كل منها يقسم العدد 1980.
2) عيّن الأعداد الطبيعية a و b التي تُحقّق: $m^2 - 5d^2 = 1980$.
حيث $d = PGCD(a;b)$ وَ $m = PPCM(a;b)$.

التمرين 58: (نقاط) بكالوريا الجزائر **2007**// الشعبة: علوم الطبيعة والحياة. بالتصرف * منقول *

نعتبر المعادلة: $(E) \dots 4862x - 1430y = 2002$ حيث x و y عددان صحيحان.
1) أحسب القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 4862، 1430 وَ2002.
2)أ. بيّن أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.
ب. حل المعادلة (E).
3) a وَ b عددان طبيعيان حيث $(a;b)$ حل للمعادلة (E)، نضع: $d = PGCD(a;b)$.
أ. عيّن القيم الممكنة لـd.
ب. عيّن الثنائيات $(a;b)$ عندما $d = 7$.

التمرين 59: (نقاط) بكالوريا الجزائر **2009**// الشعبة: علوم الطبيعة والحياة. بالتصرف * منقول *

n عدد طبيعي،
1) عيّن باقي قسمة 4^{2n} على 5.
2) أدرس بواقي قسمة 3^n على 5.
3) ما هو باقي قسمة العدد 1429^{2009} على 5؟
4) ليكن العدد الطبيعي $A_n = 2 + 4^{2n} + 3^n$.
عيّن قيم n بحيث A_n يقبل القسمة على 5.

الأعداد والحساب -بكالوريات أجنبية-

التمرين 60: (نقاط) بكالوريا آسيا **2003**// الشعبة:. بالتصرف * منقول *

1)أ. n عدد طبيعي، أنشر العبارة $(n+3)(3n^2 - 9n + 16)$، ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، يكون العدد $3n^3 - 11n + 48$ قابلا القسمة على $n+3$.
ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم.
2) بيّن أنّه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة ، و تكون المساواة التالية صحيحة:

4)أ. عيّن مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48.

ب. استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $A = \frac{3n^3-11n}{n+3}$ عدداً طبيعيا.

التمرين 61: (نقاط) بكالوريا لبنان 2005// الشعبة:. بالتصرف * منقول *

1) نعتبر المعادلة: $(E) \dots 109x - 226y = 1$ حيث x و y عددان صحيحان.

أ/ عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 وَ226، ماذا يُمكن استنتاجه فيما يخص المعادلة (E)؟

ب/ برهن أنّ مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الثنائيات من الشكل $(141 + 226k; 68 + 109k)$، حيث k عدد صحيح.

جـ/ استنتج أنّه يوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم d أصغر من أو يساوي 226، ويوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم e يُحقّق $109d = 1 + 226e$ (يُطلب تعيين قيمتي d وَe).

2) برهن أنّ 227 عدد أوّلي.

3) نسمي A مجموعة الأعداد الطبيعية a حيث $a \leq 226$، نعتبر الدّالتين f وَg للمجموعة A في نفسها.

f تُرفق بكل عدد a، باقي قسمة a^{109} على 227، g تُرفق بكل عدد a، باقي قسمة a^{141} على 227.

أ. تحقّق من أنّ $g[f(0)] = 0$.

ب. برهن أنّه من أجل كل $a \in A - \{0\}$، $a^{226} \equiv 1[227]$.

جـ. استنتج من 1)ب. أنّه من أجل كل $a \in A - \{0\}$، فإنّ $g[f(a)] = a$؛ ما القول عن $g[f(a)] = a$؟

التمرين 62: (نقاط) بكالوريا فرنسا 1981// الشعبة:. بالتصرف * منقول *

a عدد طبيعي غير معدوم، نعتبر العددين a وb حيث: $a = 11n + 3$ و$b = 13n - 1$.

1) برهن أنّ كل قاسم مشترك للعددين a وb هو قاسم أيضا للعدد 50.

2) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة: $50x - 11y = 3$.

3) استنتج قيم n التي يكون من أجلها يكون 50 القاسم المشترك الأكبر للعددين a وb.

عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون 25 القاسم المشترك الأكبر للعددين a وَb.

التمرين 63: (نقاط) بكالوريا تونس 2008// الشعبة: رياضيات. بالتصرف * منقول *

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E) \dots 3x - 8y = 5$.

برهن أنّ مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الثنائيات من الشكل $(8k - 1; 3k - 1)$، حيث k عدد صحيح.

2)أ. n، x وَy ثلاثة أعداد صحيحة، بحيث: $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$.

برهن أنّ الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E).

ب. نعتبر الجملة (S): $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$، حيث n عدد صحيح.

برهن أنّ n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n \equiv 23[24]$.

3)أ. k عدد طبيعي، برهن أنّ باقي قسمة 2^{2k} على العدد 3 هو باقي قسمة 7^{2k} على العدد 8.

ب. تحقّق أنّ 1991 حل للجملة (S)، وبيّن أنّ العدد الطبيعي $1991^{2008} - 1$ يقبل القسمة على 24.

التمرين 64: (نقاط) بكالوريا تونس 2008// الشعبة: علوم. بالتصرف * منقول *

) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين وَ حيث .

أ. تأكد أنّ الث

جـ. استنتج حلول المعادلة (E).

2) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم، نضع: $a = 5n + 2$ وَ $b = 7n + 5$.

أ. احسب $5b - 7a$، ثمّ استنتج أنّ $PGCD(a;b) = 1$ أو $PGCD(a;b) = 11$.

ب. عيّن، باستعمال السؤال 1)، الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $PGCD(a;b) = 11$.

التمرين 65: (نقاط) بكالوريا المغرب 2011// الشعبة: علوم. بالتصرف * منقول *

ليكن العدد الطبيعي $N = \underbrace{111\ldots111}_{2010 \text{ مرة الرقم } 1}$ المُمثل في النظام التّعداد العشري.

1) بيّن أنّ العدد N يقبل القسمة على 11.

2)أ. تحقّق أنّ العدد 2011 أولي وأنّ: $9N = 10^{2010} - 1$.

ب. بيّن أنّ العدد 2011 يقسم العدد $9N$.

جـ. استنتج أنّ العدد 2011 يقسم العدد N.

3) بيّن أنّ العدد N يقبل القسمة على 22121.

التمرين 66: (نقاط) بكالوريا كالدونيا الجديدة 2008// الشعبة: علوم. بالتصرف * منقول *

نرمز بـ 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، α، وَ β إلى أرقام النظام ذي الأساس 12.

1)أ/ N_1 عدد مكتوب في النظام ذي الأساس 12 كما يلي: $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$.

عيّن كتابة N_1 في النظام العشري.

ب/ N_2 عدد مكتوب في النظام العشري كما يلي: $N_2 = 1131$.

أكتب العدد N_2 في النظام ذي الأساس 12.

2) في كل ما يلي عدد طبيعي N يُكتب بشكل عام كما يلي: $N = \overline{a_n \ldots a_1 a_0}^{12}$.

3)أ/ برهن أنّ: $N \equiv a_0 [3]$، استنتج خاصية لقابلية القسمة على 3 لعدد طبيعي مكتوب في النظام ذي الأساس 12.

ب/ انطلاقا من الكتابة في النظام ذي الأساس 12، حدّد إذا كان N_2 يقبل القسمة على 12، ثمّ تحقّق من صحة ذلك بكتابته في النظام العشري.

4)أ/ برهن أنّ: $N \equiv (a_n + \cdots + a_1 + a_0)[11]$، ثمّ استنتج خاصية لقابلية القسمة على 11 لعدد طبيعي مكتوب في النظام ذي الأساس 12.

ب/ انطلاقا من الكتابة في النظام ذي الأساس 12، حدّد إذا كان N_1 يقبل القسمة على 11، ثمّ تحقّق من صحة ذلك بكتابته في النظام العشري.

5) N عدد طبيعي يُكتب في النظام ذي الأساس 12 كما يلي: $\overline{x4y}^{12}$.

عيّن الأعداد الطبيعية x وَ y حتى يكون العدد N يقبل القسمة على 33.

التمرين 67: (نقاط) بكالوريا Antilles Guyane 2001// الشعبة: علوم. بالتصرف * منقول *

1) a وَ b عددان طبيعيان غير معدومين، بحيث: $PGCD(a+b;ab) = p$ مع p عدد أولي.

أ/ برهن أنّ p يقسم a^2 (يُمكنك ملاحظة: $a^2 = a(a+b) - ab$).

ب/ استنتج أنّ p يقسم a، واستنتج أنّ p يقسم b.

جـ/ برهن أنّ: $PGCD(a;b) = p$.

2) a وَ b عددان طبيعيان غير معدومين بحيث $a \leq b$.

أ/ حل الجملة التالية: .

التمرين 68: (نقاط) بكالوريا Antilles Guyane 2011// الشعبة: علوم. بالتصرف * منقول *

I- نعتبر المعادلة (E): $11x-7y=5$ حيث x وَ y عددان صحيحان.

1) تحقّق بواسطة نص مبرهنة أنّه توجد، على الأقل، ثنائية $(u;v)$ بحيث $11u-7v=5$.

أوجد ثنائية $(u;v)$.

2) استنتج حلول المعادلة (E).

3) استنتج حلول المعادلة (E).

4) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، نعتبر المستقيم (D) المُعرّف بالمعادلة الديكارتية:

$$11x-7y-5=0$$

نسمي (C) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث: $0\leq x\leq 50$ وَ $0\leq y\leq 50$.

عيّن عدد النقط من المستقيم (D) والتي تنتمي للمجموعة (C) والتي إحداثييها أعداد صحيحة.

II- نعتبر المعادلة (F): $11x^2-7y^2=5$، حيث x وَ y عددان صحيحان.

1) برهن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (F)، فإنّ: $x^2\equiv 2y^2[5]$.

2) لتكن x وَ y أعداد صحيحة، أنقل ثمّ أكمل الجدولين التاليين:

$x\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$x^2\equiv$						[5]

$y\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$2y^2\equiv$						[5]

ما هي القيم الممكنة لباقي القسمة الإقليدية للعدد x^2 وللعدد $2y^2$ على العدد 5؟

3) استنتج أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (F)، فإنّ: x وَ y من مضاعفات 5.

III- بيّن أنّه إذا كان العددين x و y من مضاعفات 5، فإنّ: الثنائية $(x;y)$ ليست حل للمعادلة (F).

ماذا تستنتج بالنسبة للمعادلة (F)؟

التمرين 69: (نقاط) بكالوريا Polynésie 2011// الشعبة: علوم. بالتصرف * منقول *

نُذكر بالنتيجة المسماة بـ<< المبرهنة الصغيرة لِـ فيرما *Fermat* >> إذا كان p عددا أوليا وَ a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p، فإنّ: p يقسم العدد $a^{p-1}-1$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=10u_n+21$.

1) احسب الحدود u_1، u_2 وَ u_3.

2)أ. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $3u_n=10^{n+1}-7$.

ب. استنتج من أجل كل عدد طبيعي n، كتابة العدد u_n في النظام العشري.

3) برهن أنّ u_2 عدد أولي.

نقترح فيما يلي دراسة قابلية القسمة للحدود u_n على بعض الأعداد الأولية.

4) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، u_n لا يقبل القسمة على كل من الأعداد 2، 3 وَ5.

5)أ. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $3u_n\equiv 4-(-1)^n[11]$.

ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، u_n لا يقبل القسمة على 11.

6)أ. برهن أنّ: $10^{16}\equiv 1[17]$.

ب. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي k، u_{16k+8} يقبل القسمة على 17.

تمارين مقترحة

التمرين 70: (نقاط) بكالوريا تجريبية مقترح وزاري **2008**// الشعبة:. بالتصرف * منقول *

1) أثبت أنّ العدد 251 عدد أولي.

2) حلّل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية.

أ/ استنتج كل الأعداد الأولية التي مكعب كل منها يقسم العدد 2008.

ب/ عيّن الأعداد الطبيعية a وَ b بحيث: $m^3 + 35d^3 = 2008$،

علما أنّ $m = PPCM(a;b)$ وَ $d = PGCD(a;b)$.

الحمد لله.

مجلة العبقري في الرياضيات (الأعداد والحساب في البكالوريا)

حلول// الشعبة: الثالثة تقني رياضي؛ رياضيات.

حلول تمارين البكالوريا: حول الأعداد والحساب// التحضير الجيد للبكالوريا// الشعبة: 03 تر؛ ر.

شعبة: تقني رياضي

حل التمرين 01: (04 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 01// الشعبة: تقني رياضي.

n عدد طبيعي أكبر من 5.

$a/1$ و b عددان طبيعيان حيث $a = n - 2$ وَ $b = 2n + 3$.

أ-ايجاد القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر لعددين a وb:

☒ لدينا: $b = a(2) + 7$ أي: $b - 2a = 7$

☒ نضع: $PGCD(a;b) = d$، ومنه: d **يقسم** a وَ**يقسم** b

وعليه: d **يقسم الفرق** $b - 2a$.

أي: d **يقسم** 7 $(d \in D_7)$، إذن: $\boxed{d = 1}$ أو $\boxed{d = 7}$.

ب-تبيان أنّ العددين a وb من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ مضاعفا للعدد 7:

a و b من **مضاعفات 7** معناه: $\begin{cases} a \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[7] \end{cases}$

يُكافئ: $a - b \equiv 0[7]$

يُكافئ: $n + 5 \equiv 0[7]$

أي: $n + 5$ **مضاعفاً للعدد 7**.

ج-تعيين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b) = 7$

بناءً على **جواب السؤال السابق** فإنّ قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b) = 7$ هي نفسها قيم n التي يكون من أجلها $n + 5$ مضاعفاً للعدد 7، أي: $n + 5 \equiv 0[7]$

ومنه: $n + 5 = 7k$

وعليه: $\boxed{n = 7k - 5}$ (حيث $k \in \mathbb{N}$ وَ $k > 1$)

2/لدينا: العددين الطبيعيين p و q حيث، $p = 2n^2 - 7n - 15$ وَ $q = n^2 - 7n + 10$.

أ-تبيان أنّ كل من العددين p وq يقبل القسمة على $n - 5$:

لدينا: $\begin{cases} p = (n-5)(2n+3) \\ q = (n-5)(n-2) \end{cases}$، إذن: p و q **يقبلان القسمة على** $n - 5$.

ب-تعيين تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p;q)$:

لدينا: $PGCD(p;q) = (n-5)PGCD(b;a)$

نُميز حالتين:

الحالة 01: من أجل $PGCD(a;b) = 7$، فإنّ $PGCD(p;q) = 7(n-5)$ مع $n = 7k - 5$.

الحالة 02: من أجل ،

حل التمرين 02: (04 نقاط) بكالوريا 2008// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

لدينا: $(I) \dots 4x - 9y = 319$.

1)-التأكد أنّ الثنائية $(82;1)$ حل للمعادلة (I):

لدينا: $4(82) - 9(1) = 328 - 9 = 319$، إذن: الثنائية $(82;1)$ حل للمعادلة (I).

-حل المعادلة (I):

ط 01: لدينا: $\begin{cases} 4x - 9y = 319 \dots \dots \dots (1) \\ 4(82) - 9(1) = 319 \dots (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد: $4(x - 82) - 9(y - 1) = 0$

ومنه: $4(x - 82) = 9(y - 1)$

وبمأنّ: 9 **يقسم** $4(x - 82)$ وَ9 **أولي مع 4**

فـإنّ: **حسب مبرهنة غوص،** 9 **يقسم** $(x - 82)$ وبالتالي: $x - 82 = 9k$ أي: $\boxed{x = 9k + 82}$ $(k \in \mathbb{Z})$

وبتعويض قيمة x في (I) نجد: $4(9k + 82) - 9y = 319$

ومنه: $-9y = -4(9k) - 9$

وعليه: $\boxed{y = 4k + 1}$ $k \in \mathbb{Z}$

إذن: حلول المعادلة (I) هي $\boxed{(x;y) = (9k + 82; 4k + 1)}$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$).

2)تعيين الثنائيات $(a;b)$ الصحيحة، حلول المعادلة $(II) \dots 4a^2 - 9b^2 = 319$:

(II) تُكافئ: $(2a - 3b)(2a + 3b) = 319$

ولدينا: $D_{319} = \{1; 11; 29; 319\}$

نلاحظ أنّ: إذا كانت $(a;b)$ حل لـ(II) فإنّ $(-a;-b)$ حل لـ(II)

يُمكن البحث عن الحلول الموجبة فقط، وَ$2a + 3b > 2a - 3b$.

الحالة 01: $\begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ 2a + 3b = 319 \end{cases}$، نجد: $\begin{cases} a = 80 \\ b = 53 \end{cases}$.

الحالة 02: $\begin{cases} 2a - 3b = 11 \\ 2a + 3b = 29 \end{cases}$، نجد: $\begin{cases} a = 10 \\ b = 3 \end{cases}$.

إذن: $\boxed{(a;b) \in \{(10;3); (-10;3); (10;-3); (-10;-3); (80;53); (-80;53); (80;-53); (-80;-53)\}}$.

3)استنتاج الثنائيات $(x_0;y_0)$ حلول المعادلة (I) بحيث x_0 وy_0 مربعين تامين:

$4a^2 - 9b^2 = 319$ تُكافئ: $4x_0 - 9y_0 = 319$، حيث $\begin{cases} x_0 = a^2 \\ y_0 = b^2 \end{cases}$

ومنه: $\boxed{(x_0;y_0) \in \{(100;9); (6400;2809)\}}$.

حل التمرين 03: (04 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

1.حل المعادلة التفاضلية، $y' = (\ln 2)y$:

حلول المعادلة التفاضلية $y' = (\ln 2)y$ هي **الدّوال من الشكل** $y = Ce^{(\ln 2)x}$ (حيث $C \in \mathbb{R}$).

2. f **حل خاص للمعادلة الذي يُحقق $f(0) = 1$، تعيين عبارة $f(x)$:**

لدينا: $f(0) = 1$، ومنه: $Ce^{(\ln 2)(0)} = 1$، أي: $C = 1$، إذن: $\boxed{f(x) = e^{(\ln 2)x}}$.

3. n عدد طبيعي.

أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد :

لدينا: $\begin{cases} 2^0 \equiv 1[7] \\ 2^1 \equiv 2[7] \\ 2^2 \equiv 4[7] \\ 2^3 \equiv 1[7] \end{cases}$؛

بواقي قسمة 2^n على 7 **تُشكل متتالية دورية، دورها 3**، وبالتالي:

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	[7]

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$:

لدينا: $f(x) = e^{x(ln2)} = 2^x$، ومنه: $f(2009) = 2^{2009}$

وبما أنّ: $2009 = 3(669) + 2$ من الشكل $3k + 2$، فإنّ: $2^{2009} \equiv 4[7]$

ويكون: $2^{2009} - 4 \equiv 4 - 4[7]$

أي: $\boxed{f(2009) - 4 \equiv 0[7]}$

إذن: باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$ هو **0**. **($f(2009) - 4$ يقبل القسمة على 7)**

4.أ) حساب، بدلالة n، المجموع S_n حيث $S_n = f(0) + f(1) + \cdots + f(n)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} S_n &= f(0) + f(1) + \cdots + f(n) \\ &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n \\ &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n \\ &= \frac{1-2^{n-0+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يقبل من أجلها S_n القسمة على 7:

S_n **يقبل القسمة على** 7 معناه: $S_n \equiv 0[7]$

أي: $2^{n+1} - 1 \equiv 0[7]$

ومنه: $2^{n+1} \equiv 1[7]$

وعليه: $n + 1 = 3k$

إذن: $\boxed{n = 3k - 1}$ (حيث $k \in \mathbb{N}^*$).

حل التمرين 04: (03 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: تقني رياضي.

لدينا: n عدد طبيعي يُكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي: $n = \overline{11\alpha 00}$ حيث α عدد طبيعي $(0 \leq \alpha < 7)$.

1-تعيين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3:

☒ لدينا: $n = \overline{11\alpha 00} = 1 \times 7^4 + 1 \times 7^3 + \alpha \times 7^2 + 0 \times 7^1 + 0 \times 7^0 = 7^2\alpha + 7^3 + 7^4$

ومنه: $n \equiv 7^2\alpha + 7^3 + 7^4[3]$

ويكون: $n \equiv \alpha + 1 + 1[3]$ (لاحظ أنّ $7 \equiv 1[3]$)

أي: $n \equiv \alpha + 2[3]$

☒ يكون n **قابلا للقسمة على 3** إذا وفقط إذا كان: $\alpha + 2 \equiv 0[3]$

ومنه: $\alpha \equiv -2[3]$

ويكون:

وبالتالي: حيث ، وَ

إذن:

☒ لدينا: $n=\overline{11\alpha00}=7^2\alpha+7^3+7^4$، ومنه: $n\equiv 7^2\alpha+7^3+7^4[5]$

وعليه: $n\equiv 7^2(\alpha+7+7^2)[5]$

ويكون: $n\equiv 4(\alpha+2+4)[5]$

أي: $n\equiv 4(\alpha+1)[5]$

☒ يكون n **قابلا للقسمة على 5** إذا وفقط إذا كان: $\alpha+1\equiv 0[5]$

ومنه: $\alpha\equiv -1[5]$

ويكون: $\alpha\equiv 4[5]$

وبالتالي: $\alpha=5k+4$ حيث $k\in\mathbb{N}$، وَ $0\leq\alpha<7$

إذن: $\boxed{\alpha=4}$.

استنتاج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15:

يكون n **قابلا للقسمة على 15** إذا وفقط إذا كان: **قابلا للقسمة على 3 وَعلى 5**

إذن: يكون n **قابلا للقسمة على 15**، من أجل $\boxed{\alpha=4}$.

3-لدينا: $\alpha=4$، **كتابة العدد n في النظام العشري:** $n=\overline{11400}=7^2(4)+7^3+7^4=2940$.

حل التمرين 05: (04 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

1- تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13:

لدينا:
$$\begin{cases}10^0\equiv 1[13]\\10^1\equiv 10[13]\\10^2\equiv 9[13]\\10^3\equiv 12[13]\\10^4\equiv 3[13]\\10^5\equiv 4[13]\\10^6\equiv 1[13]\end{cases}$$

بواقي قسمة 10^n على 13 **تُشكل متتالية دورية، دورها 6**، وبالتالي:

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k\in\mathbb{N}$
$10^n\equiv$	1	10	9	12	3	4	[13]

2-التحقق أنّ، $(10^{2008})^2+10^{2008}+1\equiv 0[13]$:

بمأنّ: $2008=6(334)+4$ من الشكل $6k+4$، فإنّ: $10^{2008}\equiv 3[13]$

ويكون: $(10^{2008})^2+10^{2008}+1\equiv 3^2+3+1[13]$

أي: $(10^{2008})^2+10^{2008}+1\equiv 13[13]$

إذن: $\boxed{(10^{2008})^2+10^{2008}+1\equiv 0[13]}$.

3- تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون، $10^{2n}+10^n+1\equiv 0[13]$:

$10^{2n}+10^n+1\equiv 0[13]$ تُكافئ: $(10^n)^2+10^n\equiv 12[13]$

لتعيين قيم العدد الطبيعي n، **نستعمل الجدول التالي:**

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k\in\mathbb{N}$
$10^n\equiv$	1	10	9	12	3	4	[13]
$(10^n)^2$							]

حل التمرين 06: (05 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 01// الشعبة: تقني رياضي.

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة:

1/المعادلة: $21x+14y=40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة ـــــــــــــــــ **(صحيح)**

لأن: $PGCD(21;14)=7$، وَ 7 **لا يقسم** 40.

2/في نظام التِعداد ذي الأساس 7 يكون: $\overline{5413}=\overline{1562}+\overline{3421}$ ـــــــــــــــــ **(خطأ)**

التبرير: في **النظام العشري** لدينا: $\begin{cases}\overline{3421}=3\times7^3+4\times7^2+2\times7^1+1\times7^0=1240\\ \overline{1562}=1\times7^3+5\times7^2+6\times7^1+2\times7^0=632\\ \overline{5413}=5\times7^3+4\times7^2+1\times7^1+3\times7^0=1921\end{cases}$،

وبمأنّ: $1240+632\neq1921$، فإنّ: $\overline{3421}+\overline{1562}\neq\overline{5413}$.

3/باقي القسمة الإقليدية للعدد، $1+3+3^2+\cdots+3^{2011}$ على 7 هو: 6 ـــــــــــــــــ **(خطأ)**

التبرير: لدينا: $1+3+3^2+\cdots+3^{2011}=\frac{1-3^{2011-0+1}}{1-3}=\frac{3^{2012}-1}{2}$

ولدينا من جهة أخرى: $\begin{cases}3^0\equiv1[7]\\ 3^1\equiv3[7]\\ 3^2\equiv2[7]\\ 3^3\equiv6[7]\\ 3^4\equiv4[7]\\ 3^5\equiv5[7]\\ 3^6\equiv1[7]\end{cases}$؛

وبمأنّ: $2012=6(335)+2$ من الشكل $6k+2$، فإنّ: $3^{2012}\equiv2[7]$

ومنه: $3^{2012}-1\equiv1[7]$

أي: $2(1+3+3^2+\cdots+3^{2011})\equiv1[7]$

وعليه: $1+3+3^2+\cdots+3^{2011}\equiv4[7]$

إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد، $1+3+3^2+\cdots+3^{2011}$ على 7 هو:4.

حل التمرين 07: (04 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

لدينا: $A_n=2^n+3^n+4^n+5^n+6^n$، $n\in\mathbb{N}$.

1)التحقّق أنّ، $4\equiv-3[7]$:

***ط01)* نُبين أنّ الفرق $(-3)-4$ مضاعف لـ 7.**

لدينا: $4-(-3)=7=7(1)$، أي: $4-(-3)\equiv0[7]$، إذن: $\boxed{4\equiv-3[7]}$.

***ط02)* لدينا:** $7\equiv0[7]$، ومنه: $4+3\equiv0[7]$، ويكون: $\boxed{4\equiv-3[7]}$.

تبيان أنّ، $A_3\equiv6[7]$:

لدينا: $A_3=2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$، ولدينا: $\begin{cases}4\equiv-3[7]\\ 5\equiv-2[7]\end{cases}$،

ومنه: 3

أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n:

لدينا: $\begin{cases} 2^0 \equiv 1[7] \\ 2^1 \equiv 2[7] \\ 2^2 \equiv 4[7] \\ 2^3 \equiv 1[7] \end{cases}$؛

بواقي قسمة 2^n على 7 **تُشكل متتالية دورية، دورها 3** وبالتالي:

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	$k \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	[7]

أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 3^n:

لدينا: $\begin{cases} 3^0 \equiv 1[7] \\ 3^1 \equiv 3[7] \\ 3^2 \equiv 2[7] \\ 3^3 \equiv 6[7] \\ 3^4 \equiv 4[7] \\ 3^5 \equiv 5[7] \\ 3^6 \equiv 1[7] \end{cases}$،

بواقي قسمة 3^n على 7 **تُشكل متتالية دورية، دورها 6** وبالتالي:

$n =$	6α	$6\alpha+1$	$6\alpha+2$	$6\alpha+3$	$6\alpha+4$	$6\alpha+5$	$\alpha \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]

3)تبيان أنّه إذا كان n فرديا فإنّ، $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7:

لدينا: $A_n \equiv 2^n + 3^n + (-3)^n + (-2)^n + (-1)^n [7]$

إذا كان: n **فرديا** فإنّ: $\begin{cases} (-3)^n = -3^n \\ (-2)^n = -2^n \\ (-1)^n = -1^n = -1 \end{cases}$،

ومنه: $A_n \equiv 2^n + 3^n - 3^n - 2^n - 1^n [7]$، وعليه: $A_n \equiv -1[7]$

ويكون: $A_n + 1 \equiv 0[7]$

أي: $A_n + 1$ **يقبل القسمة على** 7.

استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7:

بمأنّ **2011 عدد فردي**، فإنّ: $A_{2011} + 1 \equiv 0[7]$

ومنه: $A_{2011} \equiv -1[7]$

ويكون: $\boxed{A_{2011} \equiv 6[7]}$، إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7 هو 6.

4)ايجاد باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7:

لدينا: $A_n \equiv 2^n + 3^n + (-3)^n + (-2)^n + (-1)^n [7]$

بمأنّ: **1432 زوجي** فإنّ: $\begin{cases} (-3)^{1432} = 3^{1432} \\ (-2)^{1432} = 2^{1432} \\ (-1)^{1432} = 1 \end{cases}$،

ومنه: $1[7]$

ولدينا من جهة

$3^{1432} \equiv 4[7]$، لأنّ: $1432 = 6(238) + 4$ من الشكل $6\alpha + 4$.

وعليه: $A_{1432} \equiv 2 \times 2 + 3 \times 4 + 1[7]$، ومنه: $A_{1432} \equiv 4 + 8 + 1[7]$

ويكون: $\boxed{A_{1432} \equiv 6[7]}$،

إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7 هو 6.

حل التمرين 08: (03 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 01// الشعبة: تقني رياضي.

1-دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 9^n على 11:

لدينا:
$$\begin{cases} 9^0 \equiv 1[11] \\ 9^1 \equiv 9[11] \\ 9^2 \equiv 4[11] \\ 9^3 \equiv 3[11] \\ 9^4 \equiv 5[11] \\ 9^5 \equiv 1[11] \end{cases}$$،

بواقي قسمة 9^n على 11 تُشكل متتالية دورية، دورها 5 وبالتالي:

$n =$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	$k \in \mathbb{N}$
$9^n \equiv$	1	9	4	3	5	[11]

2-ايجاد باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11:

لدينا: $2011 \equiv 9[11]$

ومنه: $2011^{2012} \equiv 9^{2012}[11]$

وبمأنّ: $2012 = 5(402) + 2$ من الشكل $5k + 2$، فإنّ: $9^{2012} \equiv 4[11]$

وبالتالي: $\boxed{2011^{2012} \equiv 4[11]}$

إذن: باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 هو 4.

3-البرهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $\left(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012}\right)$ يقبل القسمة على 11:

بمأنّ: $15n + 1 = 5(3n) + 1$ من الشكل $5k + 1$، فإنّ: $9^{15n+1} \equiv 9[11]$

وبمأنّ: $10n = 5(2n)$ من الشكل $5k$، فإنّ: $2011^{10n} \equiv 1[11]$ لأنّ: $2011 \equiv 9[11]$

ولدينا: $2011^{2012} \equiv 4[11]$

نجد: $(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012}) \equiv (4(9) + 4(1) + 4)[11]$

ومنه: $(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012}) \equiv 4(11)[11]$

وبالتالي: $\boxed{(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012}) \equiv 0[11]}$

إذن: العدد $(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012})$ يقبل القسمة على 11.

4-تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مُضاعفا للعدد 11:

العدد $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مُضاعفا للعدد 11 معناه: $2011^{2012} + 2n + 2 \equiv 0[11]$

ومنه: $4 + 2n + 2 \equiv 0[11]$

وعليه: $2n \equiv -6[11]$

ويكون:

وبالتالي:

حل التمرين 09: (03,5 نقطة) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

لدينا: (S) الجملة التالية: $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح $(x \in \mathbb{Z})$.

1-تبيان أنّ العدد 153 حل للجملة (S):

لدينا: $\begin{cases} 153 \equiv 15(10) + \boxed{3} \\ 153 \equiv 7(21) + \boxed{6} \end{cases}$، ومنه: $\begin{cases} 153 \equiv 3[15] \\ 153 \equiv 6[7] \end{cases}$، أي أنّ: العدد 153 حل للجملة (S).

2-إذا كان x_0 حلا لِـ(S)، تبيان أنّ (x حل لـ(S)) يُكافئ $\left(\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}\right)$:

أولاً: نبرهن أنّه إذا كان x_0 حلا لِـ(S)، وَx حل لـ(S) فإنّ $\left(\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}\right)$.

لدينا: x_0 حلا لِـ(S) معناه: $\begin{cases} x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{cases}$،-------**(1)**

وَx حلا لِـ(S) معناه: $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$،-------**(2)**

من **(1)** وَ**(2)** نستنتج أنّ: $\begin{cases} x \equiv x_0[15] \\ x \equiv x_0[7] \end{cases}$ وبالتالي: $\boxed{\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}}$.

عكسياً: نبرهن أنّه إذا كان x_0 حلا لِـ(S)، وَ$\left(\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}\right)$ فإنّ x حل لـ(S).

لدينا: x_0 حلا لِـ(S) معناه: $\begin{cases} x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{cases}$،-------**(1)**

وَ $\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$،----------**(2)**

حسب **خاصية الجمع** نجد: $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$، وبالتالي: x حل لـ(S).

3-حل الجملة (S):

لدينا: 153 حلا لِـ(S) وَx حلا لِـ(S)، يُكافئ: $\begin{cases} x - 153 \equiv 0[15] \\ x - 153 \equiv 0[7] \end{cases}$.

وبمأنّ: 15 **أولي مع** 7 فإنّ: $x - 153 \equiv 0[15 \times 7]$

أي: $x - 153 \equiv 0[105]$

وعليه: $x \equiv 153[105]$

ويكون: $x \equiv 48[105]$

إذن: $\boxed{x = 105k + 48}$، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

4-نفرض أنّ عدد الكتب هو x،

يُريد مكتبي وضع عدد من الكتب في عُلب، فإذا استعمل علبا تتسع لِـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب، وإذا استعمل علبا تتسع لِـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب، أي: x يُحقق الجملة (S).

لدينا: $500 < x < 600$، وَحسب جواب السؤال 3- $\boxed{x = 105k + 48}$

ومنه: 600

وعليه: 552

حل التمرين 10: (03,5 نقطة) بكالوريا 2013// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

x وَ y عددان صحيحان وَ(E) المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $11x+7y=1$.

1)أ) تعيين $(x_0;y_0)$؛ حل المعادلة (E) الذي يُحقق، $x_0+y_0=-1$:

الثنائية $(x_0;y_0)$ **تُحقق** الجملة $\begin{cases}11x_0+7y_0=1\\x_0+y_0=-1\end{cases}$

تُكافئ: $\begin{cases}11x_0+7y_0=1\\-7x_0-7y_0=7\end{cases}$، **بالجمع طرف لطرف** نجد: $4x_0=8$

ومنه: $x_0=2$

ويكون: $y_0=-1-x_0=-3$

إذن: $\boxed{(x_0;y_0)=(2;-3)}$.

ب) استنتاج حلول المعادلة (E):

لدينا: $(2;-3)$ **حل خاص** للمعادلة (E)، ومنه: $\begin{cases}11x+7y=1 & (1)\\11(2)+7(-3)=1 & (2)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد: $11(x-2)+7(y+3)=0$

ومنه: $11(x-2)=7(-y-3)$

بمأنّ: 7 **يقسم** $11(x-2)$ **وَأولي مع** 11، فإنّ: حسب **مبرهنة غوص**، 7 **يقسم** $(x-2)$

أي: $x-2=7k$

وبالتالي: $\boxed{x=7k+2}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

وبتعويض قيمة x في المعادلة (E)، نجد: $11(7k+2)+7y=1$

ومنه: $7y=-11(7k)-21$

وبالتالي: $\boxed{y=-11k-3}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن: **حلول المعادلة (E)** هي $\boxed{(x;y)=(7k+2;-11k-3)}$، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

2)a و b عددان طبيعيان وS العدد الذي يُحقق، $\begin{cases}S=11a+1\\S=7b+2\end{cases}$.

أ) تبيان أنّ $(a;-b)$ حل للمعادلة (E):

لدينا: $\begin{cases}S=11a+1\\S=7b+2\end{cases}$، ومنه: $11a+1=7b+2$

وعليه: $11a-7b=1$

أي: $11a+7(-b)=1$

إذن: $(a;-b)$ حل للمعادلة (E).

ب) ايجاد باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77:

لدينا: $(a;-b)$ حل للمعادلة (E)، معناه: $\begin{cases}a=7k+2\\-b=-11k-3\end{cases}$

بتعويض قيمة a في المعادلة $S=11a+1$، نجد: $S=11(7k+2)+1$

ومنه: $S=77k+\boxed{23}$

إذن: **باقي** القسمة الإقليدية للعدد S على 77 هو $\boxed{23}$.

3)n عدد طبيعي باقي قسمته على هو وباقي قسمته على هو معناه:

تعيين أكبر قي

$n < 2013$ معناه: $77k + 23 < 2013$

ومنه: $k < \frac{1990}{77}$

وعليه: **أكبر قيمة للعدد n** حتى يكون $n < 2013$ **من أجل أكبر قيمة لـ k** (أي: $k = 25$) إذن: $\boxed{n = 1948}$.

حل التمرين 11: (05 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

n و p عددان طبيعيان.

1)دراسة، حسب قيم n، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n:

لدينا: $\begin{cases} 5^0 \equiv 1[16] \\ 5^1 \equiv 5[16] \\ 5^2 \equiv 9[16] \\ 5^3 \equiv 13[16] \\ 5^4 \equiv 1[16] \end{cases}$،

بواقي قسمة 5^n على 16 **تُشكل متتالية دورية، دورها 4** وبالتالي:

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k \in \mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	5	9	13	[16]

2)لدينا: $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$.

أ) تبيان أنّه إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي، فإنّه يوجد عدد طبيعي n يُحقق: $C_n = D_p$

لدينا: من أجل $p = 4k + 2$، فإنّ: $5^p \equiv 9[16]$ (من الجدول السابق)

أي: $D_p \equiv 9[16]$

وبالتالي: **يوجد عدد طبيعي n**، يُحقق $D_p = 16n + 9 = C_n$.

ب) تعيين n من أجل $p = 6$:

لدينا: $p = 6 = 4(1) + 2$ من الشكل $4k + 2$

ومنه: $D_6 \equiv 9[16]$

ويكون: $D_6 = 16n + 9$

أي: $5^6 = 16n + 9$

إذن: $\boxed{n = 976}$ $(D_6 = C_{976})$

3) f دالّة معرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 5^{(4x+2)} - 9 = e^{(4x+2)\ln 5} - 9$.

دراسة تغيّرات الدّالة f :

النهايات: لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{(4x+2)\ln 5} - 9\right) = +\infty$

اتجاه التغيّر:

f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$، ولدينا: $f'(x) = 4 \ln 5\, e^{(4x+2)\ln 5} > 0$

ومنه: f **متزايدة تماماً** على $]0; +\infty[$، ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		$+\infty$

استنتاج إشارة $f(x)$:

بمأنّ: f **متزايدة تماماً** على $[0;+\infty[$ **وَ** $f(0)=16$، فإنّ: $f(x)\geq 16$ أي: $\boxed{f(x)>0}$.

4)لدينا: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=5^4\left(u_n+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16} \end{cases}$.

أ) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$:

نلاحظ أنّ $u_n=\frac{5^{(4n+2)}-9}{16}=\frac{f(n)}{16}$.

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n=0$، لدينا: $u_0=\frac{f(0)}{16}=\frac{16}{16}=1$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n=\frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$ **(فرضية التراجع)**
- ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1}=\frac{5^{(4n+6)}-9}{16}}$

البرهان: لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1}&=5^4\left(u_n+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16} \\ &=5^4\left(\frac{5^{(4n+2)}-9}{16}+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16} \\ &=5^4\left(\frac{5^{(4n+2)}}{16}\right)-\frac{9}{16} \\ &=\frac{5^{(4n+6)}}{16}-\frac{9}{16}=\frac{5^{(4n+6)}-9}{16} \end{aligned}$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\frac{5^{(4n+2)}-9}{16}$.

ب) البرهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ u_n عدد طبيعي:

لدينا: $5^{4n+2}\equiv 9[16]$، ومنه: $5^{4n+2}-9\equiv 0[16]$

أي: $5^{4n+2}-9$ **مضاعف لـ 16**،

وبالتالي: $\frac{5^{4n+2}-9}{16}\in\mathbb{N}$، أي: $\boxed{u_n\in\mathbb{N}}$.

5)استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

لدينا: $u_n=\frac{f(n)}{16}=\frac{1}{16}f(n)$ **وَ** $\frac{1}{16}>0$، ومنه: (u_n) **متزايدة تماماً** لأنّ f **متزايدة تماماً** على $[0;+\infty[$.

حل التمرين 12: (03,5 نقطة) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: تقني رياضي.

1)أ) تعيين، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13:

$\begin{cases} 8^0\equiv 1[13] \\ 8^1\equiv 8[13] \end{cases}$

لدينا: $8^2\equiv 12[13]$ ،

$5[13]$

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k\in\mathbb{N}$
$8^n\equiv$	1	8	12	5	[13]

ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3$ على 13:

لدينا: $\boxed{42\equiv 3[13]}$

ولدينا: $138\equiv 8[13]$، ومنه: $138^{2015}\equiv 8^{2015}[13]$.

وبمأنّ $2015=4(503)+3$ من الشكل $4k+3$ فـــإنّ $8^{2015}\equiv 5[13]$

وبالتالي: $\boxed{138^{2015}\equiv 5[13]}$.

ولدينا: $2014\equiv 12[13]$، ومنه: $2014\equiv -1[13]$

وعليه: $2014^{2037}\equiv (-1)^{2037}[13]$

وبالتالي: $2014^{2037}\equiv -1[13]$.

وعليه: $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3\equiv 3\times 5+(-1)-3[13]$

وبالتالي: $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3\equiv 11[13]$

إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3$ على 13 هو 11.

2)أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv (5n+6)8^{2n}[13]$:

لدينا: $\boxed{64^n=(8^2)^n=8^{2n}}$

ولدينا: $5\equiv -8[13]$، ومنه: $5^{2n+3}\equiv (-8)^{2n+3}[13]$

وعليه: $5^{2n+3}\equiv (-1)^{2n+3}\times 8^{2n+3}[13]$

أي: $5^{2n+3}\equiv -8^{2n}\times 8^3[13]$

وبالتالي: $\boxed{5^{2n+3}\equiv -5\times 8^{2n}[13]}$.

وعليه: $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv (5n+1)\times 8^{2n}-(-5\times 8^{2n})[13]$

وبالتالي: $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv (5n+1+5)8^{2n}[13]$

إذن: $\boxed{(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv (5n+6)8^{2n}[13]}$.

ب) تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون، $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv 0[13]$:

$(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv 0[13]$، تُكافئ: $(5n+6)\times 8^{2n}\equiv 0[13]$

وبمأنّ: 8 **أولي مع** 13 فإنّ: 8^{2n} **أولي مع** 13

ومنه: $5n+6\equiv 0[13]$

وعليه: $5n\equiv -6[13]$

ويكون: $5n\equiv 7[13]$

وبالتالي: $n\equiv 4[13]$

إذن: $\boxed{n=13\alpha+4}$، حيث $\alpha\in\mathbb{N}$.

حل التمرين 13: (05 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: تقني رياضي.

لدينا: المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$، $6x-7y=19$ حيث x و y عددان صحيحان.

1)ايجاد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) بحيث، $x_0=y_0$:

$(x_0;y_0)$ **حل خاص** للمعادلة (E) بحيث، $x_0=y_0$ معناه: $6x_0-7x_0=19$

وبالتالي:

إذن: الحل الخ

حل المعادلة (E):

لدينا: $(-19;-19)$ **حل خاص** للمعادلة (E)، ومنه: $\begin{cases} 6x-7y=19 & (1) \\ 6(-19)-7(-19)=19 & (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد: $6(x+19)-7(y+19)=0$

ومنه: $6(x+19)=7(y+19)$

بمأنّ: 7 **يقسم** $6(x+19)$ **وَأولي مع** 6، فإنّ: حسب **مبرهنة غوص**، 7 **يقسم** $(x+19)$

أي: $x+19=7k$

وبالتالي: $\boxed{x=7k-19}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

وبتعويض قيمة x في المعادلة (E)، نجد: $6(7k-19)-7y=19$

ومنه: $-7y=-6(7k)+133$

وبالتالي: $\boxed{y=6k-19}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن: **حلول المعادلة** (E) هي $\boxed{(x;y)=(7k-19;6k-19)}$، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

2)استنتاج قيم العدد الصحيح λ والتي تُحقّق، $\begin{cases} \lambda\equiv 24[7] \\ \lambda\equiv 5[6] \end{cases}$:

$\begin{cases} \lambda\equiv 24[7] \\ \lambda\equiv 5[6] \end{cases}$ تُكافئ: $\begin{cases} \lambda=7\alpha+24 \\ \lambda=6\beta+5 \end{cases}$

ومنه: $6\beta-7\alpha=19$

نستنتج أنّ: $\boxed{\beta=x=7k-19}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

وبالتالي: $\lambda=6(7k-19)+5$

إذن: $\boxed{\lambda=42k-109}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

تعيين باقي قسمة العدد λ على 42:

لدينا: $\lambda=42k-109$، وبمأنّ: $-109\equiv 17[42]$ فإنّ: باقي قسمة العدد λ على 42 هو 17.

3)تعيين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث، $|x+y-1|\leq 13$:

لدينا: $(x;y)=(7k-19;6k-19)$

$|x+y-1|\leq 13$ تُكافئ: $|13k-39|\leq 13$

ومنه: $|k-3|\leq 1$

وعليه: $-1\leq k-3\leq 1$

ويكون: $2\leq k\leq 4$

أي: $k\in\{2;3;4\}$

إذن: $\boxed{(x;y)\in\{(-5;-7);(2;-1);(9;5)\}}$.

4)أ-دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7:

لدينا: $\begin{cases} 5^0\equiv 1[7] \\ 5^1\equiv 5[7] \\ 5^2\equiv 4[7] \\ 5^3\equiv 6[7] \\ 5^4\equiv 2[7] \end{cases}$،

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k\in\mathbb{N}$
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	$[7]$

ب-تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تُحقّق الجملة، $\begin{cases}n-5^n\equiv 2020[7]\\ n\equiv 1437[6]\end{cases}$:

$\begin{cases}n-5^n\equiv 2020[7]\\ n\equiv 1437[6]\end{cases}$ تُكافئ: $\begin{cases}n-5^n\equiv 4[7]\\ n\equiv 3[6]\end{cases}$

ومنه: $\begin{cases}n-5^n\equiv 4[7]\\ n=6k+3\end{cases}$

وعليه: $\begin{cases}n-6\equiv 4[7]\\ n=6k+3\end{cases}$

ويكون: $\begin{cases}n\equiv 3[7]\\ n=6k+3\end{cases}$

نجد: $\begin{cases}6k\equiv 0[7]\\ n=6k+3\end{cases}$

وعليه: $\begin{cases}k\equiv 0[7]\\ n=6k+3\end{cases}$

وبالتالي: $\begin{cases}k=7k'\\ n=6k+3\end{cases}$

إذن: $\boxed{n=42k'+3}$ حيث $k'\in\mathbb{N}$.

حل التمرين 14: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

1)تبيان أنّ، من أجل كل عدد طبيعي k، $4^{5k}\equiv 1[11]$:

لدينا: $4^5\equiv 1[11]$ (لأنّ $4^5=1024$)

ومنه: $(4^5)^k\equiv 1^k[11]$ (حيث $k\in\mathbb{N}$)

إذن: $\boxed{4^{5k}\equiv 1[11]}$.

2)استنتاج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11:

من أجل كل عدد طبيعي k،

- لدينا: $\boxed{4^{5k}\equiv 1[11]}$،
- ولدينا: $\begin{cases}4^{5k}\equiv 1[11]\\ 4^1\equiv 4[11]\end{cases}$، ومنه: $\boxed{4^{5k+1}\equiv 4[11]}$،
- ولدينا: $\begin{cases}4^{5k}\equiv 1[11]\\ 4^2\equiv 5[11]\end{cases}$، ومنه: $\boxed{4^{5k+2}\equiv 5[11]}$،
- ولدينا: $\begin{cases}4^{5k}\equiv 1[11]\\ 4^3\equiv 9[11]\end{cases}$ ومنه: $\boxed{4^{5k+3}\equiv 9[11]}$،
- ولدينا: $\begin{cases}4^{5k}\equiv 1[11]\\ 4^4\equiv 3[11]\end{cases}$ ومنه: $\boxed{4^{5k+4}\equiv 3[11]}$.

3)تبيان أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $\left(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\right)$ يقبل القسمة على 11:

- لدينا:

وعليه: $1438^{10n} \equiv 4^{5(2n)} \times 4^{5n}[11]$

ويكون: $\boxed{1438^{10n} \equiv 1[11]}$.

ومنه: $2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1 \equiv 2 \times 9 + 3 \times 1 + 1[11]$

أي: $2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1 \equiv 22[11]$

وبالتالي: $\boxed{2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1 \equiv 0[11]}$

إذن: العدد $(2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1)$ **يقبل القسمة على 11.**

4)تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(2 \times 2017^{5n+2} + n - 3)$ قابلا للقسمة على 11:

$(2 \times 2017^{5n+2} + n - 3)$ **قابلا للقسمة على** 11 معناه: $2 \times 2017^{5n+2} + n - 3 \equiv 0[11]$

ومنه: $2 \times 4^{5n+2} + n - 3 \equiv 0[11]$

وعليه: $2 \times 5 + n - 3 \equiv 0[11]$

ويكون: $n \equiv -7[11]$

وبالتالي: $n \equiv 4[11]$

إذن: $\boxed{n = 11k + 4}$، حيث $k \in \mathbb{N}$.

حل التمرين 15: (04 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 01// الشعبة: تقني رياضي.

1)تعيين، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5:

لدينا: $\begin{cases} 3^0 \equiv 1[5] \\ 3^1 \equiv 3[5] \\ 3^2 \equiv 4[5] \\ 3^3 \equiv 2[5] \\ 3^4 \equiv 1[5] \end{cases}$،

بواقي قسمة 3^n على 5 **تُشكل متتالية دورية، دورها 4** وبالتالي:

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	4	2	[5]

2)استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5:

لدينا: $1437 \equiv 2[5]$، ومنه: $1437 \equiv -3[5]$

وعليه: $1437^{2017} \equiv (-3)^{2017}[5]$

أي: $1437^{2017} \equiv -3^{2017}[5]$

وبمأنّ: $2017 = 4(504) + 1$ **من الشكل** $4k + 1$ فإنّ: $3^{2017} \equiv 3[5]$

وبالتالي: $1437^{2017} \equiv -3[5]$

ويكون: $1437^{2017} \equiv 2[5]$

إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5 هو 2.

3)البرهان أنّ، من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1)$ مضاعف للعدد 5:

- لدينا: $48 \equiv 3[5]$، ومنه: $48^{4n+3} \equiv 3^{4n+3}[5]$، ويكون: $\boxed{48^{4n+3} \equiv 2[5]}$.
- ولدينا: $5[\ 2^{2n+1}\ \ 2^{2n+1}$ ، ومنه: $4n+2\ \ \ 2n+1$ ، ويكون: $\boxed{\ \ \ \

وبالتالي: $\boxed{48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1 \equiv 0[5]}$

إذن: العدد $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1)$ **مضاعف للعدد 5.**

4)تعيين الأعداد الطبيعية n حتّى يكون العدد $(3^{4n} + 27^n - 4)$ قابلا للقسمة على 5:

$(3^{4n} + 27^n - 4)$ **قابلا للقسمة على 5**، معناه: $3^{4n} + 27^n - 4 \equiv 0[5]$

ومنه: $1 + (3^3)^n - 4 \equiv 0[5]$

وعليه: $3^{3n} \equiv 3[5]$

وبالتالي: $3n = 4k + 1$ (من الجدول)

أي: $3n \equiv 1[4]$

ويكون: $n \equiv 3[4]$

إذن: $\boxed{n = 4\alpha + 3}$، حيث $\alpha \in \mathbb{N}$.

حل التمرين 16: (04 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 02// الشعبة: تقني رياضي.

1)لدينا: المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $(E) \dots 5x - 3y = 1$، حيث x وَ y عددان صحيحان.

أ) التحقّق أنّ الثنائية $(6n + 2; 10n + 3)$ حل للمعادلة (E) حيث n عدد طبيعي:

لدينا: $5(6n + 2) - 3(10n + 3) = 30n + 10 - 30n - 9 = 1$

إذن: الثنائية $(6n + 2; 10n + 3)$ **حل للمعادلة** (E).

ب) استنتاج أنّ العددين $10n + 3$ وَ $6n + 2$ أوليان فيما بينهما:

بمأنّ: $(6n + 2)(5) + (10n + 3)(-3) = 1$،

فإنّ: **حسب مبرهنة بيزو**، العددين $10n + 3$ وَ $6n + 2$ أوليان فيما بينهما.

2)لدينا: $a = 10n + 3$ وَ $b = 3n + 5$ وليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a وَ b.

أ) تبيان أنّ $d = 1$ أو $d = 41$:

بمأنّ: $d = PGCD(a; b)$ فإنّ: d **يقسم** a **وَيقسم** b

ومنه: d **يقسم** $10b - 3a$

أي: d يقسم 41

وبمأنّ: 41 **عدد أولي**، فإنّ: $\boxed{d = 1}$ **أو** $\boxed{d = 41}$.

ب) تبيان أنّه إذا كان $d = 41$ فإنّ $n \equiv 12[41]$:

لدينا: $\begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a \equiv 0[d] \\ b \equiv 0[d] \end{cases}$

أي: $\begin{cases} 10n + 3 \equiv 0[41] \quad (1) \\ 3n + 5 \equiv 0[41] \quad (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد: $7n - 2 \equiv 0[41]$

وعليه: $7n \equiv 2[41]$

ويكون: $42n \equiv 12[41]$

وبمأنّ: **42 أولي مع 41** فإنّ: $\boxed{n \equiv 12[41]}$.

3)لدينا: العددان الطبيعيان $A = 20n^2 + 36n + 9$ وَ $B = 6n^2 + 19n + 15$.

أ) تبيان أنّ العددين A وَ B يقبلان القسمة على $2n + 3$:

لدينا: $3)a$ $+$ ، إذن: العددين وَ **يقبلان القسمة على** .

من أجل: $PGCD(a;b)=1$، فإنّ: $\boxed{PGCD(A;B)=2n+3}$ حيث $n\neq 41k+12$ مع $k\in\mathbb{N}$.

ومن أجل: $PGCD(a;b)=41$، فإنّ: $\boxed{PGCD(A;B)=41(2n+3)}$، حيث $n\equiv 12[41]$.

حل التمرين 17: (04 نقاط) بكالوريا 2020// الموضوع 01// الشعبة: تقني رياضي.

لدينا: $(E_1)\ldots 693x-216y=738$ وَ $(E_2)\ldots 77x-24y=82$ حيث x و y عددان صحيحان.

1) ايجاد $PGCD(693;216)$ وَاستنتاج أنّ المعادلتين (E_1) وَ (E_2) متكافئتان:

☒ لدينا: $\begin{cases}693=3^2\times 7\times 11\\216=2^3\times 3^3\end{cases}$، ومنه: $\boxed{PGCD(693;216)=3^2=9}$.

☒ ولدينا: $693x-216y=738$، تُكافئ: $9\times 77x-9\times 24y=9\times 82$

تُكافئ: $9(77x-24y)=9\times 82$

تُكافئ: $77x-24y=82$

إذن: المعادلتين (E_1) وَ (E_2) متكافئتان.

2) التحقّق أنّ الثنائية $(2;3)$ حلّ للمعادلة (E_2) ثمّ ايجاد حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

☒ لدينا: $77\times 2-24\times 3=154-72=82$، إذن: الثنائية $(2;3)$ حلّ للمعادلة (E_2).

☒ لدينا: $(2;3)$ **حل خاص** للمعادلة (E_2)، ومنه: $\begin{cases}77x-24y=82 & (1)\\77(2)-24(3)=82 & (2)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد: $77(x-2)-24(y-3)=0$

ومنه: $77(x-2)=24(y-3)$

بمأنّ: 24 **يقسم** $77(x-2)$ **وَأولي مع** 77، فإنّ: حسب **مبرهنة غوص**، 24 **يقسم** $(x-2)$

أي: $x-2=24k$

وبالتالي: $\boxed{x=24k+2}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

وبتعويض قيمة x في المعادلة (E_2)، نجد: $77(24k+2)-24y=82$

ومنه: $-24y=-77(24k)-72$

وبالتالي: $\boxed{y=77k+3}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن: **حلول المعادلة (E_2)** هي $\boxed{(x;y)=(24k+2;77k+3)}$، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

3) ايجاد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E_2) التي تُحقّق $|y-x|\leq 54$:

$|y-x|\leq 54$ تُكافئ: $|(77k+3)-(24k+2)|\leq 54$

أي: $|77k+3-24k-2|\leq 54$

ومنه: $|53k+1|\leq 54$

وعليه: $-54\leq 53k+1\leq 54$

ومنه: $-55\leq 53k\leq 53$

ويكون: $-\frac{55}{53}\leq k\leq 1$

وهذا يعني أنّ: $k\in\{-1;0;1\}$، إذن: $\boxed{(x;y)\in\{(-22;-74);(2;3);(26;80)\}}$.

4) **لدينا:** $N=\overline{\beta 68\alpha}^{9}=\overline{1\alpha\beta 0\alpha}^{6}$، حيث α وَ β عددان طبيعيان.

ملاحظة: 6 وَ .

ايجاد العددين وَ ، ثمّ كتابة العدد في النظام العشري: