5 min Maths

ترجمة و تصرف الأستاذ شعبان أسامة



7 seven DAYS maths 14

تمرين محلول من بكالوريات اجنبية

شعب علمية

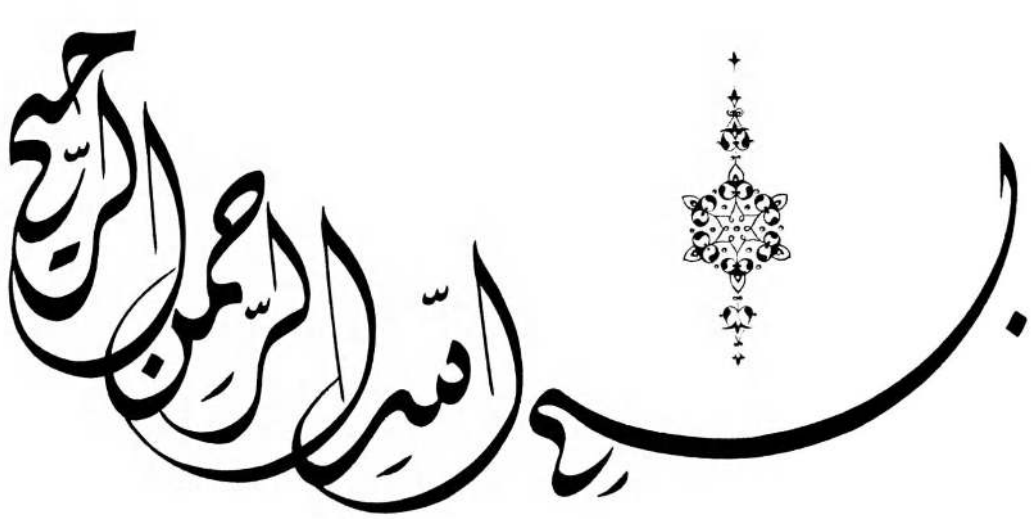


Super fan

عبد الفتاح بوقفة

عدد سكان الأرض هو حوالي 7874965825 ،
تجاهل كلامهم السلبي مثلما تجاهلت عددهم و
ستكون أسعد 🥰

حساباتي عبر منصات التواصل الاجتماعي:



تجدون في هذا العمل14 تمرين انجليزي مترجم مع حل مقترححلول مأخوذة من بكالوريات أجنبية تم تداولها في فترة العطل الشتائية.

على صفحة الأستاذ شعبان أسامة الرسمية(5⃣🕓min Maths)

و هذا على شكل تحدي كل يوم تمرينين بالحل.



أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا

و ثانيا لجميع محبي المادة



Bac TOGO 2009

دالة لوغارتمية

التمرين الأول

مدة الانجاز 01سا

الجزء -أ- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=x\ln(x)-x+1$ و (C) التمثيل البياني الممثل للدالة f في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الرسم: $2cm$).

1.أدرس تغيرات الدالة g.

2.ليكن $(C_{\ln})$ التمثيل البياني للدالة $x\mapsto\ln(x)$ في المعلم السابق.

أ-بين أن المنحنيين (C) و $(C_{\ln})$ يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما 1 و e.

ب-بين أنه من أجل كل x من $[1;e]$ ، $x\ln(x)-x+1\le\ln(x)$.

3.أ-مستعينا بالتكامل بالتجزئة أحسب J حيث $J=\int_1^e(x-1)\ln(x)dx$.

ب- استنتج المساحة ب cm^2 مساحة الحيز المحددة بالمنحنيين (C) و $(C_{\ln})$ والمستقيمات ذات المعادلة : $x=1$ و $x=e$.

الجزء –ب- نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ الشكل: $f(x)=\dfrac{1}{x-1}\ln(x)$.

1.جد نهايتي الدالة f عند 1 و $+\infty$.

2.عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها (لاحظ أنه يمكن كتابة $f'(x)$ بدلالة $g(x)$).

3.أرسم المنحنى الممثل للدالة f.

4. بين أن المعادلة : $f(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حل وحيد α حيث $3.5\prec\alpha\prec3.6$.

الجزء –ج - نعتبر الدالة h المعرفة على $]1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x)+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

1.بين أن α حل للمعادلة : $h(x)=x$.

2.أدرس اتجاه تغير الدالة h.

3.نضع $I=[3;4]$ بين انه من أجل كل عنصر x من I ، $h(x)\in I$



Bac TOGO 2001

دالة أسية

التمرين الثاني

وحدة الانجاز 01سا

لتكن f الدالة العددية المعرفة بالشكل: $f(x)=2x+\dfrac{e^x}{2\left(e^x-1\right)}$ و (C) التمثيل الباني الممثل للدالة f في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الرسم: $1cm$)

الجزء- أ-

1.عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2.بين أنه من أجل كل x من D_f ، $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\left(e^x-1\right)}$.

3.احسب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.

4.أ-بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=2x+\dfrac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب-أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

الجزء - ب-

1.حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2e^{2x}-5e^x+2\succ 0$.

2.أ-احسب $f'(x)$ (f' الدالة المشتقة للدالة f)

ب-استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]0;+\infty[$.

3.ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C) على المجال $]0;+\infty[$.

4.ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=2x+m$

الجزء -ج-

ليكن n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 و نعرف العدد I_n حيث: $I_n=\displaystyle\int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}\left[\frac{e^x}{e^x-1}\right]dx$

1.-بين أن: $I_n=\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي $n\succ 1$.

ب-احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{n\to 1} I_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

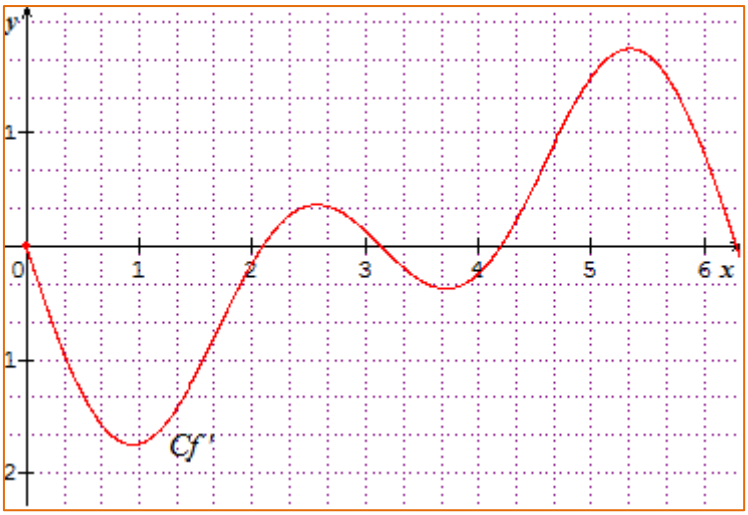
2. نعتبر من أجل كل عدد طبيعي $n\succ 1$ ، المجموع S_n حيث $S_n=I_2+I_3+...+I_n$. احسب S_n.

3.أ- احسب $A(n)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات ذات المعادلة: $y=2x+\dfrac{1}{2}$ ، $x=\ln 2$ و $x=\ln(n+1)$

ب-عين نهاية $A(n)$ من أجل n يؤول الى عدد كبير بالقدر الكافي.

مدة الانجاز 45د

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;2\pi]$ كما يلي : $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x)+1$. الشكل الموضح أسفله هو المنحنى الممثل للدالة f' (الدالة المشتقة للدالة f) .



1.أ- أوجد الدالة المشتقة f' للدالة f .

ب- باستعمال العلاقة التالية : $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$ ،

بين انه من أجل كل x من $[0;2\pi]$ ، $f'(x)=-\sin(x)[1+2\cos(x)]$

2.حل في المجال $[0;2\pi]$ المعادلة : $\sin(x)[1+2\cos(x)]=0$.

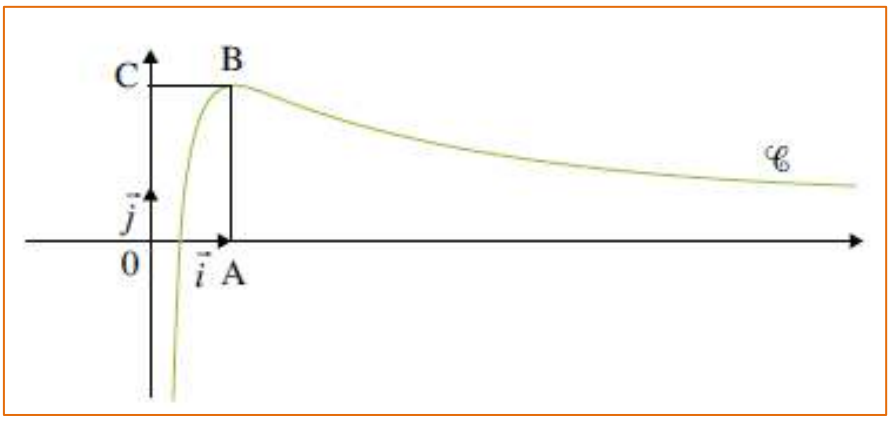
3.أ- عين اشارة $f'(x)$ على المجال $[0;2\pi]$.

ب- مستعينا بالنتائج السابقة شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;2\pi]$.

4.أرسم المنحنى الممثل للدالة f على المجال في $[0;2\pi]$ المعلم السابق.

في الشكل الموضح أسفله رسمنا في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنى (C) الممثل للدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$. لتكن النقط $A(1;0)$ ، $B(1;2)$ و $C(0;2)$ ،

المنحنى (C) يشمل النقطة B و المستقيم (BC) مماس المنحنى (C) في النقطة B.



a و b عددان حقيقيا موجبان حيث من أجل كل متغير حقيقي x موجب تماما ، $f(x)=\dfrac{a+b\ln(x)}{x}$.

1.أ-بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$.

ب-تحقق أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{(b-a)-b\ln(x)}{x^2}$

ج-استنتج قيمتي العددين a و b.

2.أ-بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ،اشارة $f'(x)$ من اشارة الدالة $x\mapsto -\ln(x)$. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب-احسب نهايتي الدالة f . (يمكنك ملاحظة أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f(x)=\dfrac{2}{x}+2\dfrac{\ln(x)}{x}$).

ج-شكل جدول تغيرات الدالة f .

3.أ- بين أن المعادلة : $f(x)=1$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;1[$.

ب- بين أن المعادلة : $f(x)=1$ تقبل حل وحيد β على المجال $]1;+\infty[$. حيث $n\prec\beta\prec n+1$ و n عدد طبيعي يطلب تعيينه.



Bac LIBAN- Juin 2004

دالة أسية

التمرين الخامس

وحدة الانجاز 1 ساعة

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}$.

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2.احسب، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)+f(-x)$ ماذا يمكن ان نقول عن النقطة $(0;1+\ln 4)$.

3.أدرس اتجاه تغير الدالة f .

4.أ-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m المعادلة $f(x)=m$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$.

ب-عين حصر سعته 10^{-1} للعدد α حل المعادلة $f(x)=3$.

ج- من أجل أي قيمة ل m العدد $(-\alpha)$ حل للمعادلة $f(x)=m$.

5.أ-بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ،

ب-بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+\ln 4$ و المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+2+\ln 4$ مستقيمان مقاربان للمنحنى (C)

6.أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ).

7.نعتبر α العدد الحقيقي الموجب .

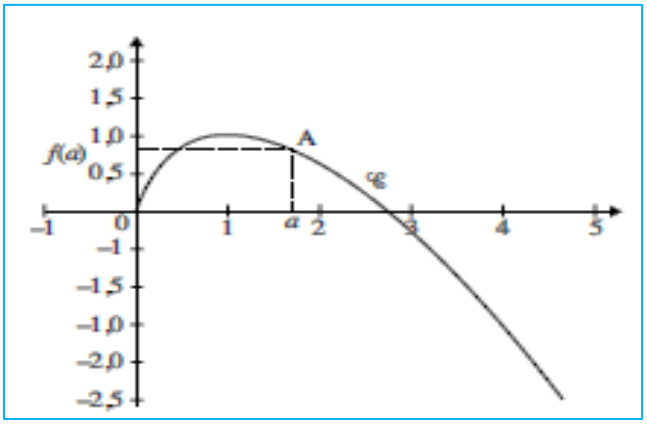
ماذا يمثل التكامل التالي: $I(\alpha)=\int_0^{\alpha}[f(x)-x-\ln 4]dx$ ؟

ب- بين أن $I(\alpha)=2\ln\left(\dfrac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)$.

ج-احسب α من أجل $I(\alpha)=1$.

التمرين السادس — دالة لوغاريتمية — Bac FRANCE-Métropole2010

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x(1-\ln(x))$. الشكل الموضح أسفله هو المنحنى (C) الممثل للدالة f



مدة الانجاز 45د

1. أدرس حسب قيم x اشارة $f(x)$.

2. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. (نقبل أن $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$).

3. أحسب $f'(x)$.

ب-عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4. ليكن a عدد حقيقي موجب تماما نعتبر المماس (T_a) مماس المنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة a.

احسب بدلالة a احداثيتي النقطة A' نقطة تقاطع المماس (T_a) مع محور التراتيب.

5. لتكن $A(a)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و محور الفاصل و المستقيمات ذات المعادلة: $x=a$ و $x=e$.

احسب $A(a)$ من أجل $a\prec e$

التمرين السابع — دالة أسية — Bac MAROC 2020

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على© بما يلي: $f(x)=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$ و (C) المنحنى الممثل للدالة في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (الوحدة $2cm$)

مدة الانجاز 45د

1. بين أن $\lim f(x)=-\infty$ و أن $\lim f(x)=+\infty$.

2.أ-برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+\frac{5}{2}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب- حل المعادلة $e^{x-2}-4=0$ ثم بين أن المنحنى (C) يوجد فوق (Δ) على المجال $]-\infty;2+\ln 4]$ و تحت (Δ) على المجال $[2+\ln 4;+\infty[$.

3.بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$.

4.أ-بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$.

ب-شكل جدول تغيرات الدالة f

5. ثم بين أن $A(2;2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

6.بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$.

7.أنشئ (Δ) و (C) في نفس المعلم (نأخذ القيمتين المقربتين التاليتين $\ln 2\simeq 0,7$ ، $\ln 3\simeq 1,1$).

التمرين الثامن — دالة لوغارتمية — Bac MAROC 2020

مدة الانجاز 40د

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$.

1.أ-بين أن لكل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$.

ب-بين أن الدالة g متزايدة على المجال $]1;+\infty[$.

ج-استنتج أن لكل x من المجال $]1;+\infty[$ ، $0\le\ln x\le 2\sqrt{x}$. لاحظ أن: $(2\sqrt{x}-2\le 2\sqrt{x})$.

د-بين أنه من اجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $0\le\frac{(\ln x)^3}{x^2}\le\frac{8}{\sqrt{x}}$ ثم استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x^2}$.

2.أ-بين أن الدالة G المعرفة بما يلي: $G(x)=x\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)$ هي دالة أصلية للدالة g على $]0;+\infty[$.

ب-احسب التكامل $\int_1^4 g(x)dx$.

التمرين التاسع — دالة أسية — Bac MAROC 2021

مدة الانجاز 35د

1. أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $e^{2x}-4e^{x}+3=0$

ب- حل في المتراجحة: $e^{2x}-4e^{x}+3\leq 0$

ج- أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}$.

2. بين أن المعادلة : $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ تقبل حلا في المجال $[-1;0]$.

التمرين العاشر — دالة عددية — Bac FRANCE

مدة الانجاز 55د

لتكن الدالتان f و g المعرفتان كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+\dfrac{1}{x}\right)$ و $g(x)=2x^3+x^2-1$.

وليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. بين أنه من أجل كل $x\neq 0$ لدينا: $f'(x)$ و $g(x)$ من نفس الاشارة.

2. أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

3. أ-بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيدا α حيث $\alpha\in]0;1[$.

ب- استنتج حسب قيم x اشارة $g(x)$.

4. شكل جدول تغيرات الدالة f .

5. لتكن النقطتين $I\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)$ و $J(1;1)$.

أ-بين أن المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C) في النقطة J .

ب-عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة I .

ج-أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المماس (T).

6. أرسم المماس (T) و المنحنى (C).(نأخذ $f(\alpha)\simeq 0.8$)

7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة: $x^3+x^2-3mx+1=0$.

التمرين الحادي عشر — دالة أسية — Bac TUNISIE 2014

مدة الانجاز 35د

1. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$ و (C_f) التمثيل الباني الممثل للدالة f في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.تحق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$ ثم استنتج أن الدالة f فردية.

2.احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3.أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ و أعط جدول تغيرات الدالة f .

ب-استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $1-\frac{2}{e^x+1}\le\frac{1}{2}x$.

4.بن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+\frac{1}{2}x\right]=0$ فسر بيانيا.

5.انشئ في المعلم السابق المستقيم الذي معادلته : $y=1-\frac{1}{2}x$ ثم أرسم المنحنى (C_f).

في المعلم السابق المستقيم الذي معادلته : $y=1-\frac{1}{2}x$ ثم أرسم المنحنى (C_f).

التمرين الثاني عشر — دالة عددية — Bac Liban juin 2010

مدة الانجاز 55د

I.لتكن u الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $u(x)=x^2-2+\ln x$

1.أ-احسب نهايتي الدالة عند 0 و $+\infty$.

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة u.

2.بين أن المعادلة $u(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;+\infty[$ يطلب تعيين حصر له سعته 10^{-2}.

3.عين حسب قيم x اشارة $u(x)$.

4.بين أن: $\ln\alpha=2-\alpha^2$

II.نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$

2.استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$.

III. ليكن في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

Γ المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية و M نقطة من Γ .

1.نعتبر النقطة $A(0;2)$ ، بين ان المسافة AM تعطي بالعبارة: $AM=\sqrt{f(x)}$.

2.لتكن g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ-بين أن الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$.

ب-بين أن المسافة AM أصغرية عند النقطة P التي يطلب تعيين احداثياها.

ج-بين أن: $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. هل المستقيم (AP) و مماس المنحنى Γ عند النقطة P متعامدان؟

التمرين الثالث عشر — المتتاليات — Bac Antilles Guyane FRANCE-2012

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{2}\\ u_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n}u_n\end{cases}$

مدة الانجاز 40د

1.احسب u_2,u_3 و u_4.

2.أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، u_n موجبة تماما.

ب-بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

ج- ماذا يمكن القول عن المتتالية (u_n).

3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n . نضع: $v_n=\dfrac{u_n}{n}$.

أ-بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول v_1 .

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n=\dfrac{n}{2^n}$.

4.نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\ln x-x\ln 2$.

أ-احسب نهاية الـ f $+\infty$

مدة الانجاز 40د

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=xe^{1-x}$.

1.بين أنه من اجل كل x عدد حقيقي، $f(x)=e\times\frac{x}{e^x}$.

2. عين نهاية الدالة عند $-\infty$ و $+\infty$ عند ثم فسر النتيجة هندسيا.

3. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

II.من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم و نعتبر الدالتان g_n و h_n المعرفتان على:

$g_n(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n$ و $h_n(x)=1+2x+\ldots+nx^{n-1}$

1.بين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $(1-x)g_n(x)=1-x^{n+1}$.

2.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1، $h_n(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

3.نضع $S_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$:

أ-احسب بدلالة n المجموع S_n ب-احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

1.

الجزء -أ- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=x\ln(x)-x+1$

1.دراسة تغيرات الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث $g'(x)=\ln(x)+x\left(\frac{1}{x}\right)-1$
$=\ln(x)$

و منه

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	

و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

النهايات:

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)-x+1=1$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$ نهاية شهيرة.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\ln(x)-x+1$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln(x)-1+\frac{1}{x}\right]$$
$$=+\infty$$

جدول تغيرات g :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖ 1	↘	0	↗	$+\infty$

لدينا $g(1)=0$ (يمكن أن نلاحظ من خلال جدول تغيرات الدالة g أن $g(x)\geq 0$ من أجل كل $x\succ 0$)

.2

أ-اثبات أن المنحنيين (C) و $(C_{\ln})$ يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما 1 و e.

نقوم بحل المعادلة:

$x\ln(x)-x+1=\ln(x)$

أي: $g(x)=\ln(x)-x+1$ أي $x\ln(x)-x+1-\ln(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\ln(x)-1)(x-1)=0$

تكافئ: $\ln(x)-1=0$ و $x-1=0$ وعليه $x=e$ و $x=1$.

و منه المنحنيين (C) و $(C_{\ln})$ يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما 1 و e.

ب-بين أنه من أجل كل x من $[1;e]$ ، $x\ln(x)-x+1\leq\ln(x)$.

$x\ln(x)-x+1\leq\ln(x)$ تكافئ $x\ln(x)-x+1-\ln(x)\leq 0$ وعليه نحل المتراجحة $(\ln(x)-1)(x-1)\leq 0$.

x	0		1		e		$+\infty$
$x-1$		-	0	+			
$\ln(x)-1$		-		0	+		
$(\ln(x)-1)(x-1)$		+	0	-	0	+	

و منه نلاحظ أن من أجل x من $[1;e]$، $(\ln(x)-1)(x-1)\leq 0$.

3.أ- نحسب J بالتكامل بالتجزئة : $J=\int_1^e (x-1)\ln(x)dx$

نضع $v'(x)=x-1$ و بالتالي $v(x)=\frac{x^2}{2}-x$.

و $u(x)=\ln(x)$ وعليه $u'(x)=\frac{1}{x}$.

اذن J يصبح

$$J=\int_1^e (x-1)\ln(x)dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}dx$$

و عليه

$$=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2x}-\frac{x}{x}\right)dx$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e$$

اذن:

$$=\frac{e^2}{2}-e-\left(\frac{e^2}{4}-e-\frac{1}{4}+1\right)$$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e-\frac{3}{4}=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}$$

و بالتالي : $J=\int_1^e (x-1)\ln(x)dx=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}$.

ب.مساحة الحيز المحددة بالمنحنيين (C) و $(C_{\ln})$ والمستقيمات ذات المعادلة : $x=1$ و $x=e$.

لدينا المنحنى (C) يقع تحت المنحنى $(C_{\ln})$ من أجل كل x من $[1;e]$ و بالتالي نسمي S مساحة الحيز.

$$\begin{aligned}
S &= \left(\int_1^e \ln(x)-g(x)dx\right)\left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\| \\
&= \left(\int_1^e \ln(x)-x\ln(x)+x-1dx\right)4 \\
&= \left(\int_1^e -\ln(x)(x-1)+x-1dx\right)4 \\
&= \left(\int_1^e -\ln(x)(x-1)dx+\int_1^e x-1dx\right)4 \\
&= \left(-J+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^e\right)4 \\
&= -4J+\left(\frac{e^2}{2}-e-\frac{1}{2}+1\right)4 \\
&= -4\left(\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}\right)+2e^2-4e+2 \\
&= -e^2+3+2e^2-4e+2 \\
&= e^2-4e+5
\end{aligned}$$

و منه $S=e^2-4e+5$

الجزء –ب- نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ الشكل: $f(x)=\dfrac{1}{x-1}\ln(x)$.

1. نهايتي الدالة f عند 1 و $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}\ln(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$ (نرفع ح ع نت باستعمال العدد المشتق).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}\ln(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x-1}\approx\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$.

2. اتجاه تغير الدالة ثم f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x-1}\ln(x)\right)'=\left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right)'$$
$$=\frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln(x)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{\frac{x-1-x\ln(x)}{x}}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x-1-x\ln(x)}{x(x-1)^2}$$
$$=\frac{-g(x)}{x(x-1)^2}$$

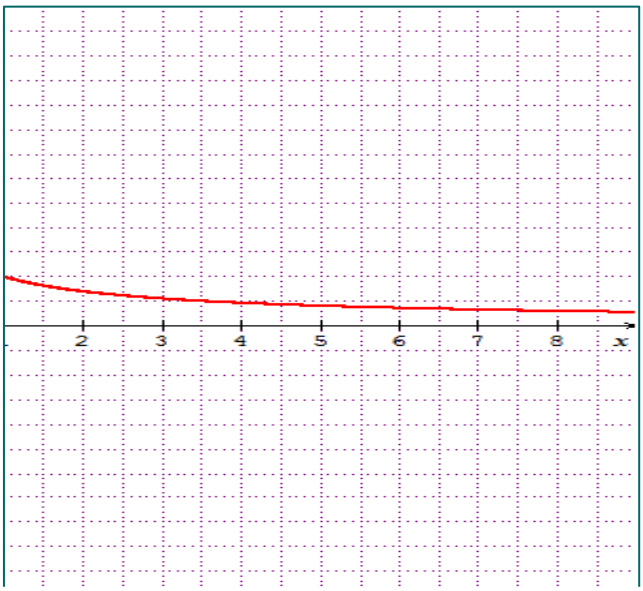
اذن اشارة $f'(x)$ من اشارة $-g(x)$. وعليه:

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	

و بالتالي للدالة f متناقصة تماما على $]1;+\infty[$.

x	1	$+\infty$
$f(x)$	1 ↘	0

3.رسم المنحنى الممثل للدالة f.



4. اثبات أن المعادلة : $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حل وحيد α حيث $3.5 \prec \alpha \prec 3.6$.

الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متناقصة تماما على $]1;+\infty[$).

حيث: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\end{cases} \Leftarrow \frac{1}{2}\in[0;1]$ و لدينا $f(3.5)\geq\frac{1}{2}$ و $f(3.6)\leq\frac{1}{2}$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حل وحيد α حيث $3.5 \prec \alpha \prec 3.6$.

الجزء –ج نعتبر الدالة h المعرفة على $]1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

1. α حل للمعادلة : $h(x)=x$ تكافئ $h(\alpha)=\alpha$

لدينا $h(\alpha)=\ln(\alpha)+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}$.....(1) و نعلم أن α حل للمعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ أي $f(\alpha)=\frac{1}{2}$ بالتعويض نجد

$$\frac{1}{\alpha-1}\ln(\alpha)=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2\ln(\alpha)=\alpha-1$$
$$\Leftrightarrow \ln(\alpha)=\frac{\alpha-1}{2}=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}$$

نعوض هذه النتيجة في العبارة (1) نجد:

$$(1).....h(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}$$
$$h(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\alpha$$
$$=\alpha$$

2.أدرس اتجاه تغير الدالة h.

الدالة h قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ حيث $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$

من أجل كل x من $]1;+\infty[$ لدينا $h'(x)\succ 0$ و عليه الدالة h متزايدة تماما على $]1;+\infty[$.

3.نضع $I=[3;4]$ بين انه من أجل كل عنصر x من I ، $h(x)\in I$

لدينا $3\leq x\leq 4$ أي أن

$$\left.\begin{array}{l}\ln 3 \le \ln(x) \le \ln 4 \\ 2 \le \frac{x}{2}+\frac{1}{2} \le \frac{5}{2}\end{array}\right\} \ln 3+2 \Rightarrow \le \ln(x)+\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \le \ln 4+\frac{5}{2}$$

$$3 \le h(x) \le 4$$

$$\Rightarrow h(x) \in I$$

2.

➢ ا. لتكن f المعرفة بالشكل: $f(x)=2x+\dfrac{e^x}{2\left(e^x-1\right)}$

1.تعين D_f مجموعة تعريف الدالة f : f الدالة من أجل: $2\left(e^x-1\right)\neq 0$ و منه $e^x-1\neq 0$ و عليه $x\neq 0 \Leftrightarrow e^x\neq 1$. اذن $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$.

2.بين أنه من أجل كل x من D_f ،

أي $2x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\left(e^x-1\right)}=2x+\dfrac{e^x}{2\left(e^x-1\right)}$ نوحد المقامات

$$=f(x)$$

3. نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x+\dfrac{e^x}{2\left(e^x-1\right)}=+\infty$ بعد راسة اشارة المقام.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x+\frac{e^x}{2\left(e^x-1\right)}$$

و

$$\lim_{x\to+\infty} 2x+\frac{e^x}{2e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=+\infty$$

4.أ- المستقيم (Δ) :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim_{x\to+\infty} 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}-\left(2x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}$$

$$=0$$

و بالتالي المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=2x+\dfrac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب- الوضع النسبي للمنحنى (C) و للمستقيم (Δ) :

ندرس اشارة الفرق : $f(x)-y$ نجد أن الاشارة من اشارة العبارة $\frac{1}{e^x-1}$ أي e^x-1 .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		-	0	+	
$f(x)-y$		-	0	+	
الوضعية	(Δ) يقع تحت (C)			(Δ) يقع فوق (C)	

II. 1.حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2e^{2x}-5e^x+2\succ 0$.

نضع $t=e^x$ و بالتالي المتراجحة تصبح $2t^2-5t+2\succ 0$. $t_1=2$ و $t_2=\frac{1}{2}$.

تكافئ $x_1=\ln t_1=\ln 2$ و $x_2=\ln t_2=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$ و منه

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$		$+\infty$
$2e^{2x}-5e^x+2$		+	0	-	0	+	

و بالتالي حلول المتراجحة $2e^{2x}-5e^x+2\succ 0$ هي المجال $]-\ln 2;\ln 2[$.

2.أ-احسب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x)=2-\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$$

و منه

$$=\frac{2\left(e^x-1\right)^2-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}+2-4e^x-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{\left(e^x-1\right)^2}$$

ب-اتجاه تغير الدالة f : اشارة $f'(x)$ من اشارة البسط أي: $2e^{2x}-5e^x+2$ (تم مناقشة اشارتها في السؤال السابق).

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\ln 2;+\infty[$.

و متناقصة تماما على المجال $]0;\ln 2]$.

جدول تغيرات f .

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(ln2)$	↗	$+\infty$

حيث $f(ln2)=2\ln(2)+1=1+\ln 4$

3.ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C) على المجال $]0;+\infty[$.



4.ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=2x+m$

حلول المعادلة $f(x)=2x+m$ هس فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+m$.

من أجل $m\leq\frac{1}{2}$ لا يوجد حلول.

من أجل $m\succ\frac{1}{2}$ يوجد حل واحد.

الجزء -ج-ليكن n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 و نعرف العدد I_n حيث: $I_n=\int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}\left[\frac{e^x}{e^x-1}\right]dx$

1-أ.حساب العدد I_n ك:

$$I_n=\int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}\left[\frac{e^x}{e^x-1}\right]dx=\left[\ln\left(e^x-1\right)\right]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}$$
$$=\ln\left(e^{\ln(n+1)}-1\right)-\ln\left(e^{\ln(n)}-1\right)$$
$$=\ln\left(n+1-1\right)-\ln\left(n-1\right)$$ أي
$$=\ln\left(n\right)-\ln\left(n-1\right)$$
$$=\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

ب--احسب النهايات التالية:

$$\lim_{n\to 1} I_n=\lim_{n\to 1}\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)=+\infty$$

و $$\lim_{n\to +\infty} I_n=\lim_{n\to +\infty}\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)=0$$

2. نعتبر من أجل كل عدد طبيعي $n\succ 1$ ، المجموع S_n حيث $S_n=I_2+I_3+...+I_n$. حساب S_n .

$$S_n=I_2+I_3+...+I_n$$
$$=\ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+...+\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$ حسب الخواص الجبرية للدالة اللوغاريتم
$$=\ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times...\times\frac{n}{n-1}\right)$$
$$=\ln(n)$$

3.أ- حساب $A(n)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات ذات المعادلة: $y=2x+\frac{1}{2}$ ، $x=\ln 2$ و $x=\ln(n+1)$

على المجال $[\ln 2;\ln(n+1)]$ بالمنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) اذن

$$A(n)=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}[f(x)-y]dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\left[2x+\frac{e^x}{2\left(e^x-1\right)}-2x-\frac{1}{2}\right]dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\left[\frac{e^x}{2\left(e^x-1\right)}-\frac{1}{2}\right]dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\left[\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)}-1\right]dx$$

و منه

$$A(n)=\frac{1}{2}\left[\ln\left(e^x-1\right)-x\right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(e^{\ln(n+1)}-1\right)-\ln(n+1)\right]-\frac{1}{2}\left[\ln\left(e^{\ln(2)}-1\right)-\ln(2)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln(n)-\ln(n+1)\right]+\frac{1}{2}\ln 2$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+\ln\left(\sqrt{2}\right)$$

ب-عين نهاية $A(n)$: $\lim_{n\to +\infty} A_n=\lim_{n\to +\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+\ln\left(\sqrt{2}\right)=\ln\left(\sqrt{2}\right)$

3.

لدينا الدالة f المعرفة على $[0;2\pi]$ كما يلي : $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x)+1$.

1.أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0;2\pi]$ حيث

$$f'(x)=-\sin(x)-2\frac{1}{2}\sin(2x)$$

و منه $=-\sin(x)-\sin(2x)$

$=-[\sin(x)+\sin(2x)]$

نذكر هنا أنه علينا استعمال مشتق مركب دالتين: $[(f\circ g)(x)]'=g'(x)\times f'(g(x))$

ب- لدينا $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$ بالتعويض في ما سبق نجد

أي $f'(x)=-[\sin(x)+\sin(2x)]$

$=-[\sin(x)+2\sin(a)\cos(a)]$

و بالتالي من أجل كل x من $[0;2\pi]$، $f'(x)=-\sin(x)[1+2\cos(x)]$

2.حل في المجال $[0;2\pi]$ المعادلة : $\sin(x)[1+2\cos(x)]=0$.

$$\left.\begin{matrix}\sin(x)=0\\ [1+2\cos(x)]=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=0,x=\pi,x=2\pi\\ \cos(x)=\frac{-1}{2}\Rightarrow x=\frac{2}{3}\pi,x=\frac{4}{3}\pi\end{cases}$$

$$S=\left\{0;\frac{2}{3};\pi;\frac{4}{3}\pi;2\pi\right\}$$

3.أ- اشارة $f'(x)$:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	0	−	0	+	0	−	0	+	0

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;2\pi]$. لدينا :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	0	−	0	+	0	−	0	+	0
$f(x)$	2,5	↘	0,25	↗	0,5	↘	0,25	↗	2,5

حيث:

$$f(0)=\cos 0+\frac{1}{2}\cos 0+1=1+\frac{1}{2}+1=2,5\ ;$$

$$f(\pi)=\cos\pi+\frac{1}{2}\cos(2\pi)+1=-1+\frac{1}{2}+1=0,5\ ;$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1-\frac{3}{4}=0,25.$$

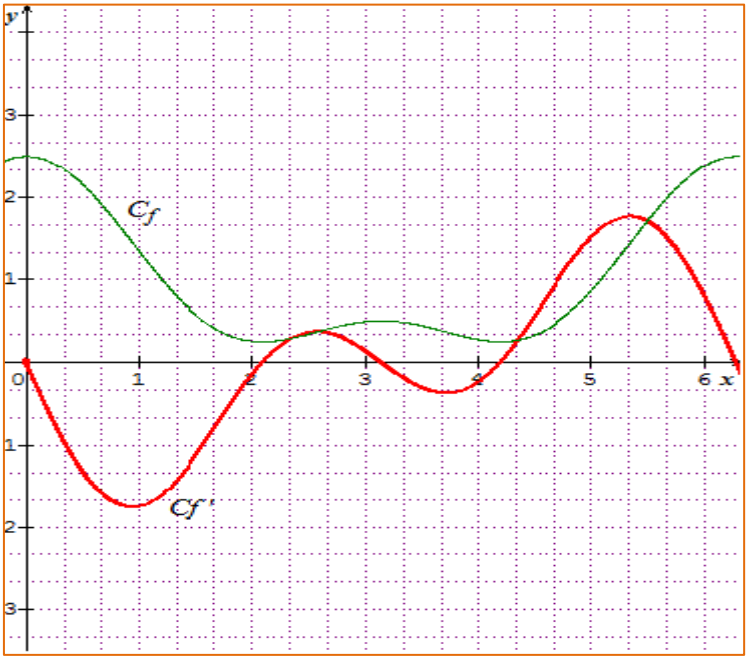
$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)+1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)+1$$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0,25.$$

$$f(2\pi)=\cos(2\pi)+\frac{1}{2}\cos(4\pi)+1=1+\frac{1}{2}+1=2,5\ .$$

4.رسم المنحنى الممثل للدالة f : نستعين بقيم مساعدة من أجل دقة الرسم:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2,5	1,3	0,3	0,5	0,3	0,9	2,4



4

1.أ-بقراءة بيانية بما أن المنحنى (C) يشمل النقطة B فان نجد $f(1)=2$.

و $f'(1)$ هو معامل توجيه مماس منحنى الدالة f في النقطة ذات الفاصلة 1 أي النقطة B . نلاحظ أن المماس يوازي محور الفواصل و بالتالي معامل توجيهه يساوي 0 و منه $f'(1)=0$.

ب- حساب $f'(x)$:

أي: $f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{b}{x}\right)x-a+b\ln(x)}{x^2}$

$=\dfrac{b-a+b\ln(x)}{x^2}$

اذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{(b-a)-b\ln(x)}{x^2}$

ج-استنتاج قيمتي العددين a و b:

لدينا $f(1)=2$ و $f'(1)=0$. $f(1)=\dfrac{a+b\ln(1)}{1}=a$ و عليه $a=2$.

$f'(1)=\dfrac{(b-a)-b\ln(1)}{1^2}=b-2=0$ و منه $b=2$.

بعد التعويض نجد $f'(x)=\dfrac{-2\ln(x)}{x^2}$.

2.أ- لدينا $f'(x)=\dfrac{-2\ln(x)}{x^2}$ و منه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $x^2\succ 0$ اذن اشارة $f'(x)$ من اشارة الدالة $x\mapsto -2\ln(x)$ أي من اشارة $x\mapsto -\ln(x)$.

اتجاه تغير الدالة f :

x	0		1	$+\infty$
$-\ln x$		$+$	0	$-$

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

ب-حساب نهايتي الدالة f :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2+2\ln(x)}{x}=-\infty$ لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} 2+2\ln(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\end{cases}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+2\ln(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+2\frac{\ln(x)}{x}$$
$$=0$$

لأن: حسب التزايد المقارن لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{\ln(x)}{x}=0$

ج-جدول تغيرات الدالة f .

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	||	+	0	−	
$f(x)$	||	$-\infty$ ↗	2	↘	0

3.أ- بين أن المعادلة : $f(x)=1$ تقبل حل وحيد على المجال $]0;1]$.

الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]0;1]$.

حيث $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ و $f(1)=2$ و بالتالي $1\in]-\infty;2]$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة : $f(x)=1$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;1]$.

ب- من خلال جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أنه يوجد حل وحيد β لأن الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و لدينا كذلك $f(1)=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ اذن $1\in]0;2]$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة : $f(x)=1$ تقبل حل وحيد β على المجال $]1;+\infty[$

باستعمال خاصية *Tableau* المتوفرة في الألة الحاسبة العلمية نحسب صور للدالة f من المجال $]1;+\infty[$ نجد أن الحل ينتمي للمجال $]5;6[$ و بالتالي $n=5$. اذن $5\prec\beta\prec 6$.

5.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}$.

1.نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1} = -\infty$$

2.لدينا:

$$f(x)+f(-x) = x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}-x+\ln 4+\frac{2}{e^{-x}+1}$$

أي:

$$= 2\ln 4+\frac{2}{e^x+1}+\frac{2}{\frac{1}{e^x}+1}$$

$$= 2\ln 4+\frac{2\left(e^x+1\right)}{e^x+1} = 2\ln 4+2$$

اذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)+f(-x) = 2+2\ln 4$.

و عليه النقطة $\left(0;1+\ln 4\right)$ هي مركز تناظر المنحنى (C).

3.اتجاه تغير الدالة f.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x) = 1-2\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}$

اذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)>0$ لأن $e^{2x}+1>0$ و $\left(e^x+1\right)^2>0$

و عليه فان الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

4.أ- لدينا الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=m$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$.

ب-ليكن α حل المعادلة $f(x)=3$ باستعمال الآلة الحاسبة نتحصل على $f(1,1) = 2,98<3$ و $f(1,2) = 3,04>3$

اذن $1,1<\alpha<1,2$.

ج- من أجل أي قيمة ل m العدد $\left(-\alpha\right)$ حل للمعادلة $f(x)=m$.

من السؤال 2.

$f(-\alpha)=2+2\ln 4-f(\alpha)=2+2\ln 4-3=2\ln 4-1$

و عليه $(-\alpha)$ حل للمعادلة من أجل $m=2\ln 4-1$.

5.أ-من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$$\begin{aligned}x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}&=x+\ln 4+\frac{2+2e^x-2e^x}{e^x+1}\\&=x+\ln 4+\frac{2\left(e^x+1\right)}{e^x+1}+\frac{-2e^x}{e^x+1}\\&=x+\ln 4+2-\frac{2e^x}{e^x+1}\\&=f(x)\end{aligned}$$

ب- لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)-y&=\lim_{x\to+\infty} x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}-\left(x+\ln 4\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0\end{aligned}$$

اذن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+\ln 4$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

و لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x)-y&=\lim_{x\to-\infty} x+\ln 4+2-\frac{2e^x}{e^x+1}-\left(x+\ln 4+2\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}-\frac{2e^x}{e^x+1}=0\end{aligned}$$

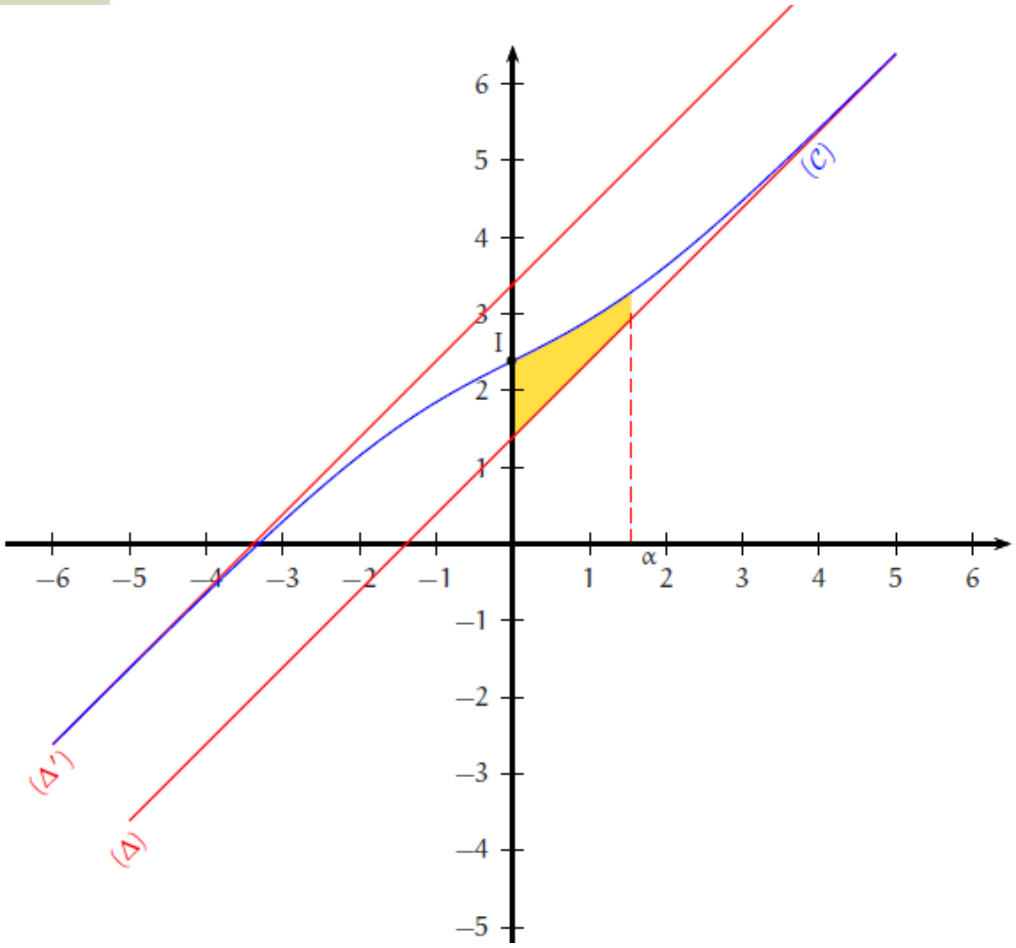
و بالتالي المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+2+\ln 4$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$.

6.الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ):

بدراسة اشارة الفرق $f(x)-y$ نجد: $f(x)-y=\frac{2}{e^x+1}>0$.

اذن المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) على $\mathbb{R}$.

الرسم (غير مطلوب)



7.نعتبر α العدد الحقيقي الموجب .

لدينا : $I(\alpha)=\int_0^{\alpha}[f(x)-x-\ln 4]dx$

$I(\alpha)$ يمثل مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمان الذين معادلاتهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

ب- لدينا:

$$I(\alpha)=I(\alpha)=\int_0^{\alpha}[f(x)-x-\ln 4]dx=$$

$$=\int_0^{\alpha}2-2\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$=\left[2x-2\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^{\alpha}$$

اذن:

$$=2\alpha-2\ln\left(e^{\alpha}+1\right)+2\ln 2$$

$$=2\left[\ln e^{\alpha}-\ln\left(e^{\alpha}+1\right)+\ln 2\right]$$

$$=2\ln\left(\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)$$

ج-حساب α من أجل $I(\alpha)$:

$$I(\alpha)=1 \Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}=e^{\frac{1}{2}}$$

نجد من هذا:

$$\Leftrightarrow 2e^{\alpha}=e^{\frac{1}{2}}\left(e^{\alpha}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha}\left(2-e^{\frac{1}{2}}\right)=e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha}=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\left(2-e^{\frac{1}{2}}\right)}$$

6.

1. اشارة $f(x)$: على المجال $]0;+\infty[$ أي $x \succ 0$

لدينا : $\begin{matrix}1-\ln x \succ 0 \\ \ln x \prec 1 \Leftrightarrow x \prec e\end{matrix}$ نلخص اشارة $f(x)$ في الجدول التالي:

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	

2.احسب نهايات الدالة f :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x(1-\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x-x\ln x=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\ln x)=-\infty$.

3.الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث $f'(x)=1-\ln x+x\left(\frac{-1}{x}\right)=-\ln(x)$

ب- اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f'(x)=-\ln(x)$ و بالتالي اشارة م اشارة $[-\ln x]$ اذن:

الدالة متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow 1 \searrow$	$-\infty$

$f(1) = 1 \times (1 - \ln 1) = 1.$

4.معادلة المماس (T_a) مماس المنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة a تعطى بالعبارة: $(T_a): y = f'(a)(x-a)+f(a)$

$y = -\ln(a)(x-a)+a-a\ln a$ أي $y = -x\ln(a)+a$.

من أجل $x=0$ نجد $y=a$ و منه $A'(0;a)$ النقطة A' نقطة تقاطع المماس (T_a) مع محور التراتيب.

5.حساب $A(a)$:

في الحالة $a \prec e$:

$$A(a) = \int_a^e f(x)dx$$

$$= \int_a^e x(1-\ln(x))dx = \int_a^e x - x\ln(x)dx$$

$$= \int_a^e xdx - \int_a^e x\ln(x)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^e - I$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{a^2}{2} - I$$

نضع: $I = \int_a^e x\ln(x)dx$

نحسب التكامل I بالتجزئة:

نضع $v'(x) = x$ و بالتالي $v(x) = \frac{x^2}{2}$.

و $u(x) = \ln(x)$ و عليه $u'(x) = \frac{1}{x}$.

$$I=\int_a^e x\ln(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_a^e-\int_a^e\frac{x^2}{2x}dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln a-\int_a^e\frac{x}{2}dx$$

اذن

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln a-\left[\frac{x^2}{4}\right]_a^e$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln a-\frac{e^2}{4}+\frac{a^2}{4}$$

$$A(a)=\frac{e^2}{2}-\frac{a^2}{2}-\left(\frac{e^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln a-\frac{e^2}{4}+\frac{a^2}{4}\right)$$

$$=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\ln a+\frac{e^2}{4}-\frac{a^2}{4}$$

اذن

$$=-\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\ln a+\frac{e^2}{4}$$

7.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

1.النهايات:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)=-\infty$ لأن :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}-x+\frac{5}{2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)=-\infty\end{cases}$$

و أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)=+\infty$ لأن:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}-x+\frac{5}{2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)=0\end{cases}$$

2.أ- المستقيم المقارب (Δ):

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-y$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)-\left(-x+\frac{5}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$$

$$=0$$

و عليه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+\frac{5}{2}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب- حل المعادلة: $e^{x-2}-4=0$ تكافئ $e^{x-2}=4$ معناه $x-2=\ln 4$ أي $x=2+\ln 4$. و منه $S=\{2+\ln 4\}$.

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) ندرس اشارة الفرق: $f(x)-y$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)-\left(-x+\frac{5}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$$

و منه اشارة الفرق: $f(x)-y$ من اشارة $-\left(e^{x-2}-4\right)$ لأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{2}e^{x-2}\succ 0$.

x	$-\infty$	$2+\ln 4$	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	-
الوضعية	(C) يقع فوق (Δ)	$(C)\cap(\Delta)=\{(2+\ln 4; f(2+\ln 4))\}$	(C)يقع تحت (Δ)

وعليه المنحنى (C)يوجد فوق (Δ)على المجال $]-\infty;2+\ln 4]$.و تحت (Δ)على المجال $[2+\ln 4;+\infty[$.

3.حساب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-1+\frac{5}{2x}-\frac{1}{2x}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}-1+\frac{5}{2x}-\left(\frac{e^{-2}}{2}\right)\frac{e^x}{x}\left(e^{x-2}-4\right)$$
$$=-\infty$$

اذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$.

4.أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=-1-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)+e^{x-2}\left(-\frac{1}{2}e^{x-2}\right)$$
$$=-1-\left(e^{x-2}\right)^2+2e^{x-2}$$
$$=-\left[1+\left(e^{x-2}\right)^2-2e^{x-2}\right]$$
$$=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-\left(e^{x-2}-1\right)^2\le 0$. أي $f'(x)\le 0$ اذن الدالة f متناقصة على $\mathbb{R}$.

ب- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

5. نقطة انعطاف:

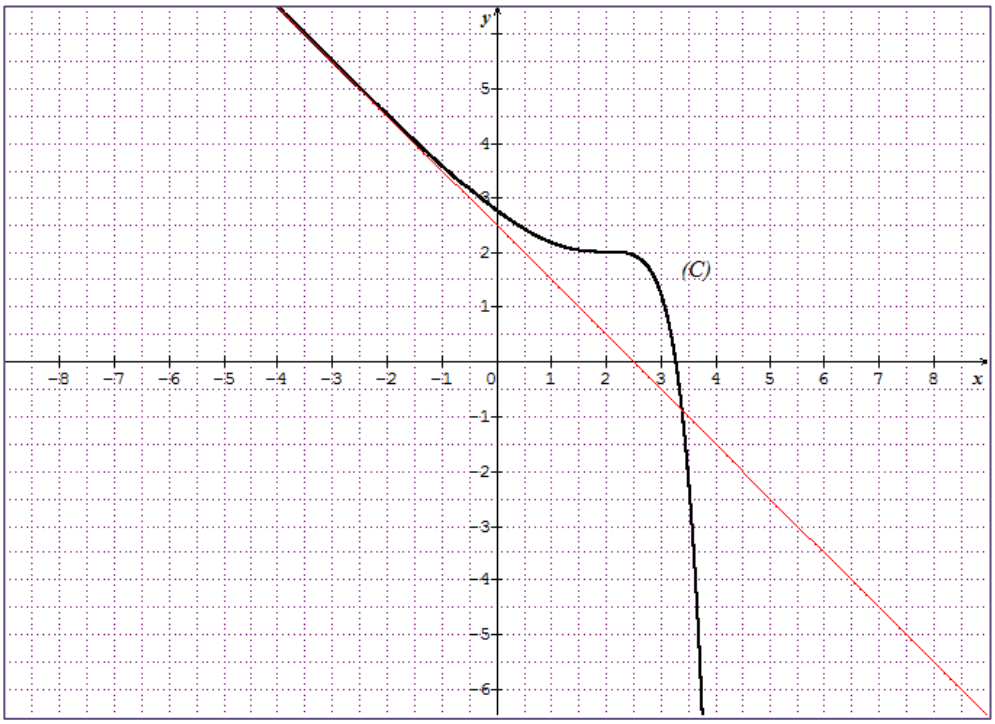
لدينا الدالة المشتقة الأولى f' تنعدم من أجل $x=2$ و لا تغير من اشارتها اذن النقطة $A\left(2;f\left(2\right)\right)$ حيث

$$f(2)=-2+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{2-2}\left(e^{2-2}-4\right)$$
$$=-2+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=2$$

ثم بين أن $A(2;2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

6.بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$. (تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة).

7.أنشئ (Δ) و (C) في نفس المعلم (نأخذ القيمتين المقربتين التاليتين $\ln 2\simeq 0,7$ ، $\ln 3\simeq 1,1$).



8.

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$.

1.أ- الدالة العددية g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ،

$$g'(x)=2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)$$

أي:

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-x}{x^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

و بالتالي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$

ب-لدينا $x\in[1;+\infty[$ أي $x\geq 1$

و بما أن $\sqrt{x}\geq 1$ تكافئ $\sqrt{x}-1\geq 0$ اذن $g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}\geq 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

ج-استنتاج أن لكل x من المجال $[1;+\infty[$ ، $0\leq \ln x\leq 2\sqrt{x}$ لاحظ أن ($2\sqrt{x}-2\leq 2\sqrt{x}$).

لدينا $\sqrt{x}\geq 1$ و بما أن الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.افان $g(x)\geq g(1)$ أي $g(x)\geq 0$

و بالتالي: $2\sqrt{x}-2-\ln x\geq 0$ أي $2\sqrt{x}-2\geq \ln x$ و حسب الملاحظة لدينا $2\sqrt{x}\geq 2\sqrt{x}-2\geq \ln x$ اذن حسب خاصة التعدي

لدينا $0\leq \ln x\leq 2\sqrt{x}$. من الواضح أن من أجل كل x من المجال $[1;+\infty[$ ، $\ln x\geq 0$

د- مما سبق لدينا

$$0\leq \ln x\leq 2\sqrt{x}$$

$$0\leq (\ln x)^3\leq \left(2\sqrt{x}\right)^3$$

$$0\leq (\ln x)^3\leq 8x\sqrt{x}$$

أي

$$0\leq \frac{(\ln x)^3}{x^2}\leq \frac{8x\sqrt{x}}{x^2}$$

$$0\leq \frac{(\ln x)^3}{x^2}\leq \frac{8\sqrt{x}}{x}$$

$$0\leq \frac{(\ln x)^3}{x^2}\leq \frac{8}{\sqrt{x}}$$

اذن من اجل كل x من $]1;+\infty[$، $0 \le \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \le \dfrac{8}{\sqrt{x}}$

استنتاج النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$:

لدينا $0 \le \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \le \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8}{\sqrt{x}}$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8}{\sqrt{x}} = 0$ و منه حسب مبرهنة الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} = 0$.

$0 \le \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \le 0$

2.أ- الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على $]0;+\infty[$. معناه $G'(x) = g(x)$

الدالة G قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ،

$$G'(x) = \left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)+\left(\frac{2}{3\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)x$$

أي $= -1+\dfrac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x+\dfrac{2x}{3\sqrt{x}}-1 = -2-\ln(x)+\dfrac{4}{3}\sqrt{x}+\dfrac{2\sqrt{x}}{3}$

$= -2-\ln(x)+2\sqrt{x} = g(x)$

ب-احساب التكامل $\int_1^4 g(x)dx$:

$$\int_1^4 g(x)dx = [G(x)]_1^4 = G(4)-G(1) = \frac{19}{3}-4\ln 4$$

9

1. أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $e^{2x}-4e^x+3=0$

نضع: $e^x = t$ و منه المعادلة تصبح: $t^2-4t+3=0$ أي : $t_1=1$ و $t_2=3$.

و لدينا $e^x = t$ تكافئ: $x=\ln t$ أي $x_1=\ln 1=0$ و $x_2=\ln 3$ اذن $S=\{0;\ln 3\}$ ..

2. ب- حل في المتراجحة: $e^{2x}-4e^x+3\le 0$.

مما سبق لدينا : $e^{2x}-4e^x+3=0$ تكافئ: $S=\{0;\ln 3\}$ اذن اشارة العبارة : $e^{2x}-4e^x+3$ كالتالي

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و عليه حلول المتراجحة: $e^{2x}-4e^{x}+3\leq 0$ هي: $S=[0;ln3]$.

ج- حسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}$. عند التعويض المباشر تظهر حالة عدم التعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$ و بالتالي نرفعها عن طريق التحليل للبسط و المقام.

مما سبق ن أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^{2x}-4e^{x}+3=\left(e^{x}-3\right)\left(e^{x}-1\right)$ و $e^{2x}-1=\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}-1\right)$

اذن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{x}-3\right)\left(e^{x}-1\right)}{\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{x}-3\right)}{\left(e^{x}+1\right)}=\dfrac{-2}{2}=-1$

2.اثبات أن المعادلة : $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ تقبل حجلا قفي المجال $[-1;0]$.

نضع $f(x)=e^{2x}+e^{x}+4x$. حيث الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x)=2e^{2x}+e^{x}+4$ نلاحظ أن $f'(x)\geq 0$ يعني أن الهدالة متزايدة تماما على .

دالة f هي مجموع دوال مستمرة على $\mathbb{R}$ اذن هدي دالة مستمرة على $\mathbb{R}$.

و من جهة أخرى لدينا $f(0)=2\succ 0$ و $f(-1)=e^{-2}+e^{-1}-4\prec 0$ اذن $f(-1)\times f(0)\prec 0$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ تقبل حلا في المجال $[-1;0]$.

.10

لتكن الدالتان f و g المعرفتان كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(x^{2}+x+\dfrac{1}{x}\right)$ و $g(x)=2x^{3}+x^{2}-1$.

1.اثبات أنه من أجل كل $x\neq 0$ لدينا: $f'(x)$ و $g(x)$ من نفس الاشارة.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*}$: $f'(x)=\dfrac{1}{3}\left(2x+1-\dfrac{1}{x^{2}}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2x^{3}+x^{2}-1}{x^{2}}\right)=\dfrac{2x^{3}+x^{2}-1}{3x^{2}}=\dfrac{g(x)}{3x^{2}}$

اذن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{3x^{2}}$ و لدينا $x\in\mathbb{R}^{*}$ يعني: $3x^{2}>0$ و منه اشارة $f'(x)$ من نفس الاشارة $g(x)$.

2.دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x^3+x^2-1\right) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x^3+x^2-1\right) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $g'(x) = 6x^2+2x$.

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{-1}{3} \end{array}\right\} \Leftarrow 6x^2+2x=0 \Leftarrow g'(x)=0$$.

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g\left(\frac{-1}{3}\right)$	↘	$g(0)$	↗	$+\infty$

$g(0) = -1$

حيث: $g\left(\dfrac{-1}{3}\right) = \dfrac{-26}{27}$

3.أ-اثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيدا α حيث $\alpha \in]0;1[$. الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]0;1[$ و $g(0) = -1 < 0$ $g(1) = 2 > 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α . (لم يطلب تعيين حصر له).

ب- استنتاج حسب قيم x اشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

4.شكل جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

نحسب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

5. لتكن النقطتين $I\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$ و $J(1;1)$.

أ-اثبات أن المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C) في النقطة J. حيث: $I\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$ و $J(1;1)$.

نعين معادلة المستقيم (IJ):

معامل توجيه المستقيم (IJ) هو: $a=\frac{y_J-y_I}{x_J-x_I}=\frac{1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{2}{3}$ و بالتالي المستقيم (IJ) من الشكل: $y=\frac{2}{3}x+b$.

$J\in(IJ)$ و منه: $(IJ):\mathrm{y}=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

من جهة ثانية نعين معادلة المماس للمنحنى (C) في النقطة J أي: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و نجد: $\mathrm{y}=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

المستقيم (IJ) هو مماس للمنحنى (C) في النقطة J.

ب-تعين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة I .

$$(T):y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$$
$$(T):y=\frac{-2}{3}(x+1)-\frac{1}{3}$$
$$y=\frac{-2}{3}x-1$$

ج-دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) و المماس (T).

ندرس اشارة الفرق $f(x)-\mathrm{y}$ نجد:

$$f(x)-y=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{-2}{3}x-1\right)=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{3x}$$

باستعمال القسمة نتحصل: نلاحظ ان (-1) جذر للبسط

$$f(x)-y=\frac{(x+1)^2(x+1)}{3x}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		-	0	+		+	
$3x$			-		‖	+	
$f(x)-y$		+	0	-	‖	+	

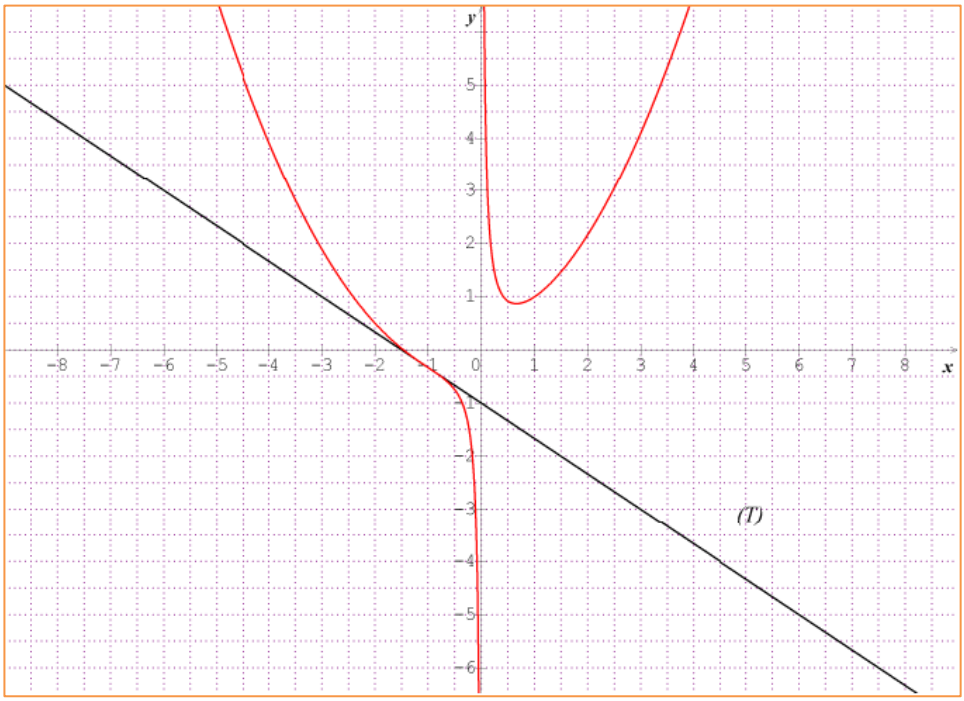
اذن من أجل $x\in]-\infty;-1[$ (C) يقع فوق المماس (T).

من أجل $x\in]-1;0[$ (C) يقع تحت المماس (T).

من أجل $x\in]0;+\infty[$ (C) يقع فوق المماس (T).

المنحنى (C) يتقاطع مع المماس (T) في النقطة $I\left(-1;\frac{-1}{3}\right)$.

6.رسم المماس (T) و المنحنى (C).(نأخذ $f(\alpha)\simeq 0.8$).



7.المناقشة

$$x^3+x^2-3mx+1=0 \Rightarrow x^3+x^2+1=3mx$$

لدينا: $\Rightarrow x^2+x+\frac{1}{x}=3m$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)=m \Rightarrow f(x)=m$$

حلول هذه المعادلة بيانيا هي تعين فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) المستقيم ذا المعادلة: $y=m$.

- لما $m\in]-\infty, f(\alpha)[$ يوجد حل واحد .
- لما $m=f(\alpha)$ يوجد حلان أحدهما حل وحيد مضاعف
- لما $m\in]f(\alpha),+\infty[$ يوجد ثلاث حلول

8.حساب مساحة الحيز S المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=1$ و $x=e$

لدينا من أجل $x\in[1;e]$ ، $f(x)>0$ و بالتالي:

$$S=\int_1^e f(x)-ydx=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^e\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\ln x\right]_1^e=\frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3}+\frac{e^2}{2}+\ln e\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3}+\frac{e^2}{2}+1\right)-\frac{5}{18}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3}+\frac{e^2}{2}\right)-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3}+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{3}\right)u.a$$

.11

1. لتكن f الدالة العددية المعرفةعلى $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$.

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{\frac{1}{e^{x}}+1}=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$$

$$=\frac{e^{x}+1-1}{e^{x}+1}=\frac{e^{x}+1}{e^{x}+1}-\frac{1}{e^{x}+1}$$

$$=1-\frac{1}{e^{x}+1}$$

وعليه $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$

استنتاج: من أجل كل x و $-x$ من $\mathbb{R}$ ،

$$f(-x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{-x}+1}$$

$$=1+\frac{1}{2}x-2+\frac{2}{e^{x}+1}$$

اذن الدالة f فردية.

$$=-1+\frac{1}{2}x+\frac{2}{e^{x}+1}$$

$$=-\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}\right)=-f(x)$$

2.احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}=-\infty$.

3.أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

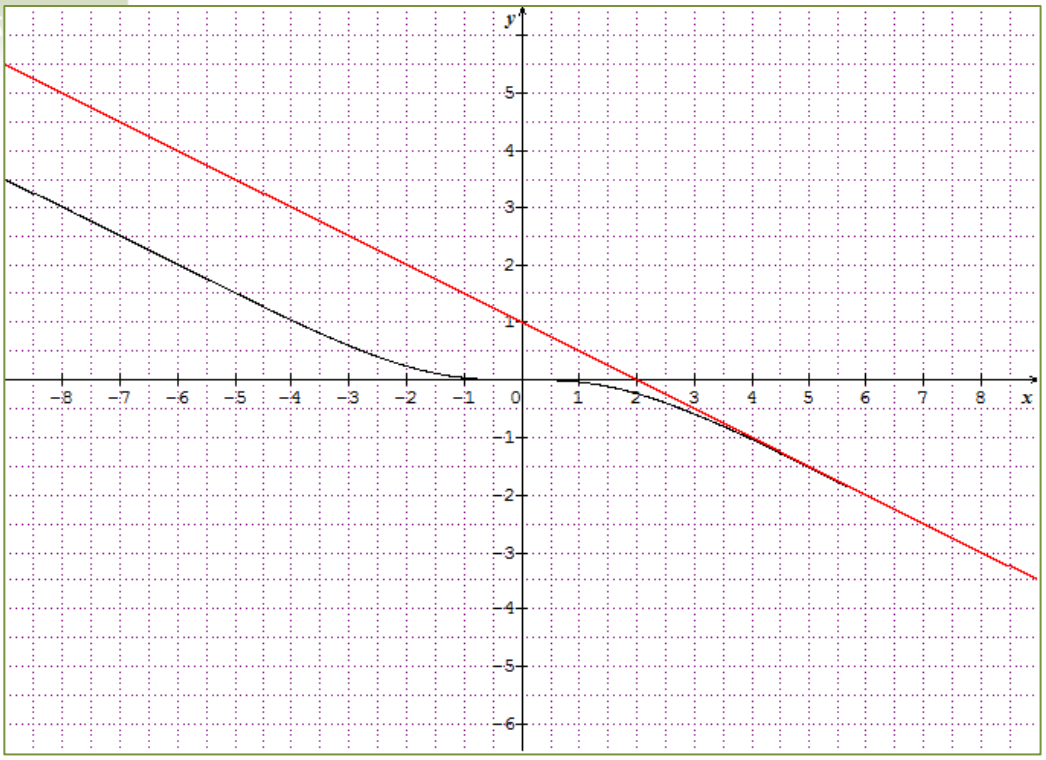
$$=\frac{-\left(e^{x}+1\right)^{2}+4e^{x}}{2\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$=\frac{-\left(e^{x}-1\right)^{2}}{2\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

و بالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)\le 0$ اذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

5.انشئ في المعلم السابق المستقيم الذي معادلته : $y=1-\frac{1}{}x$ ثم أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$.



12.

I. u الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ ، $u(x)=x^2-2+\ln x$

1.أ- النهايات

$$\lim_{x\to 0} u(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2-2+\ln x\right)=-\infty$$

و كذلك

$$\lim_{x\to +\infty} u(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-2+\ln x\right)=+\infty$$

ب-اتجاه تغير الدالة u على $]0;+\infty[$:

الدالة u قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، $u'(x)=2x+\dfrac{1}{x}$ و عليه على المجال $]0;+\infty[$ ، $u'(x)>0$

اذن الدالة u متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

2. الدالة u مستمرة و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

و لدينا $\lim_{x\to 0} u(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} u(x)=+\infty$

لدينا $u(1)=-1$ اذن نأخذ قيم حقيقية أكبر تماما من 1. بالآلة الحاسبة نتحصل :

$u(1,31)=-0,01<0$ و $u(1,32)=0,02>0$ و منه $u(1,31)<u(\alpha)<u(1,32)$ أي $1,31<\alpha<1,32$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $u(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;+\infty[$ حيث $1,31<\alpha<1,32$

3.اشارة $u(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$		-	0	+	

4. لدينا:

$$u(\alpha)=0$$
$$\alpha^2-2+\ln\alpha=0\Leftrightarrow\ln\alpha=2-\alpha^2$$

اذن : $\ln\alpha=2-\alpha^2$

II.نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$

1.احسب من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)$ بدلالة $u(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$:

$$f(x)=2x+2\left(-\frac{1}{x}\right)(2-\ln x)$$
$$=\frac{2\left(x^2-2\ln x\right)}{x}$$
$$=\frac{2u(x)}{x}$$

2.استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$.

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ اشارة $f'(x)$ من اشارة $u(x)$ أي:

x		0	α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

اذن الدالة f متناقصة على المجال $]0;\alpha[$ و متزايدة على المجال $]\alpha;+\infty[$.

III. 1.نعتبر النقطة $A(0;2)$ ، بين ان المسافة AM تعطي بالعبارة: $AM=\sqrt{f(x)}$.

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $AM=\sqrt{(x-0)^2+(\ln x-2)^2}=\sqrt{x^2+(\ln x-2)^2}=\sqrt{f(x)}$

2.لتكن g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ- الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

و عليه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}>0$ اذن اشارة $g'(x)$ من اشارة $f'(x)$

و هكذا الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$.

ب-بين أن المسافة AM أصغرية عند النقطة P .

من السؤال.(II. 2.) الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0;+\infty[$ تبلغها عند α و بما ان الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$. المسافة AM أصغرية من أجل $x=\alpha$ و عليه $P(\alpha;\ln\alpha)$.

ج-لدينا

$$AP=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{\alpha^2+(2-\ln\alpha)^2}=\sqrt{\alpha^2+(2-2-\alpha^2)^2}$$

أي:

$$=\sqrt{\alpha^2+(\alpha^2)^2}=\sqrt{\alpha^2(1+(\alpha^2))}$$

$$=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$$

و عليه : $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. معامل توجيه المستقيم (AP) هو: $a=\dfrac{y_p-y_A}{x_P-x_A}=\dfrac{\ln\alpha-2}{\alpha}$

و معامل توجيه مماس المنحنى Γ عند النقطة P هو: $a'=\dfrac{1}{\alpha}$

لدينا: $a\times a'=\dfrac{\ln\alpha-2}{\alpha}\times\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\ln\alpha-2}{\alpha^2}=-1$

$$\ln\alpha=2-\alpha^2$$

اذن المستقيم (AP) و مماس المنحنى Γ عند النقطة P متعامدان.

.13

1.حساب الحدود:

$$u_2=\frac{1+1}{2(1)}u_1=\frac{1}{2}$$
$$u_3=\frac{3}{4}u_2=\frac{3}{8}$$
$$u_4=\frac{4}{6}u_3=\frac{1}{4}$$

2.أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، u_n موجبة تماما أي $u_n>0$.

من اجل $n=1$ ، $u_1=\frac{1}{2}>0$ وعليه $u_1>0$.

ليكن $n\geq 1$ نفرض أن $u_n>0$ و نتحقق من أن $u_{n+1}>0$. أي: $\frac{n+1}{2n}u_n>0$.

لدينا $u_n>0$ و $\frac{n+1}{2n}>0$ فبالتالي $\frac{n+1}{2n}u_n>0$ اذن $u_{n+1}>0$.

و عليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراج فان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>0$.

ب- ليكن $n\geq 1$ ، $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{2n}\leq\frac{n+n}{2n}=1$ حيث: $u_n\neq 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$$

فبالتالي: $u_{n+1}<u_n$.اذن المتتالية (u_n) متناقصة.

ج- المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد 0 اذن هي متقاربة.

3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n. نضع: $v_n=\frac{u_n}{n}$.

لدينا : $v_1=\frac{u_1}{1}=\frac{1}{2}$

أ- ليكن $n\geq 1$ $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{2n}u_n=\frac{u_n}{2n}=\frac{1}{2}\frac{u_n}{n}=\frac{1}{2}v_n$

$$\Leftrightarrow v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$$

و عليه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_1=\frac{1}{2}$.

و بالتالي: $v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$

ب- لدينا $v_n = \frac{u_n}{n}$ أي $u_n = nv_n$. و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n = \frac{n}{2^n}$

4.نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln x - x\ln 2$.

أ-نهاية الدالة f عند $+\infty$.

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x - x\ln 2$$
$$= \lim_{x\mapsto+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - \ln 2\right) = -\infty$$

ب- نهاية المتتالية (u_n).

اعلم أن المتتالية (u_n) متقاربة و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم،

لدينا : $u_n = \frac{n}{2^n} = \frac{e^{\ln(n)}}{e^{n\ln(2)}} = e^{\ln(n)-n\ln 2} = e^{f(n)}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{f(n)} = e^{\lim_{n\to+\infty} f(n)} = 0$ اذن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

.14

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^{1-x}$.

1.ليكن x عدد حقيقي $f(x) = xe^{1-x} = x\times e\times e^{-x} = ex\frac{1}{e^x}$

اذن بين أنه من اجل كل x عدد حقيقي، $f(x) = e\times\frac{x}{e^x}$.

2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{1-x} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} e\times\frac{x}{e^x} = 0$ اذن $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f عند $+\infty$.

3. اتجاه تغير الدالة f الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$.

من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{1-x} > 0$ و بالتالي اشارة $f'(x)$ من اشارة $1-x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

جدول تغيرات:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

II.1. ليكن x عدد حقيقي،

$$\begin{aligned}(1-x)g_n(x) &= g_n(x)-xg_n(x)\\ &=\left(1+x+x^2+\ldots+x^n\right)-x\left(1+x+x^2+\ldots+x^n\right)\\ &=\left(1+x+x^2+\ldots+x^n\right)-\left(x+x^2+\ldots+x^n+x^{n+1}\right)\\ &=1-x^{n+1}\end{aligned}$$

اذن من أجل كل $x\neq 1$ ، $g_n(x)=\dfrac{\left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)}$.

2.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1،

نلاحظ أن أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1، $h_n(x)=g_n'(x)$ و عليه

و بالتالي:

$$\begin{aligned}g'_n(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x)+\left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2}\\ &=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

3.نضع $S_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$:

حساب بدلالة n المجموع S_n:

$$S_n = f(1)+f(2)+\ldots+f(n) = \frac{1}{e^0}+\frac{2}{e^1}+\frac{3}{e^2}+\ldots+\frac{n}{e^{n-1}}$$
$$= 1+2\left(\frac{1}{e}\right)^1+3\left(\frac{1}{e}\right)^2+\ldots+n\left(\frac{1}{e}\right)^n$$
$$= h_n\left(\frac{1}{e}\right)$$
$$= \frac{n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n+1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = ne^{-n-1} = e^{-2}ne^{1-n} = e^{-2}f(n)$

و عليه $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2}f(n) = 0$.

و كذلك $(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n = (n+1)e^{-n} = f(n+1)$

و عليه نستنتج ان: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2$.