التمرين الأول ☹

I - لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=-2x^2+2-\ln x$

1. أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
2. احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II - f دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{-1+\ln x}{x}-2x+2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x+2e$ قريبا من المائل له عند $+\infty$.

ج- حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ- أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]0,4;0,5[$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f).

الحل ☺

I - لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=-2x^2+2-\ln x$

1. دراسة تغيرات الدالة g ثم شكل مخدل تغيراتها.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} -2x^2+2=2$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(-2x+\frac{2}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=-4x-\dfrac{1}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $-4x<0$ و $-\dfrac{1}{x}<0$ عندئذ $g'(x)<0$ وبالتالي الدالة g تناقصية تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

2. حساب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

$$g(1)=2(1)^2+2-\ln 1=0$$

aziz_musl@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

من أجل $x \in]0;1[$ ، $g(x) > 0$

من أجل $x \in]1;+\infty[$ ، $g(x) < 0$

II - f دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{-1+\ln x}{x} - 2x + 2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} + \frac{\ln x}{x} - 2x + 2e = -\infty$$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-1+\ln x}{x} = -\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1+\ln x}{x} - 2x + 2e = -\infty$

ب- نبين أن المستقيم (Δ) **ذا المعادلة** $y = -2x + 2e$ **مقارب مائل لـ** (C_f) **بجوار** $+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (-2x+2e) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$ وهذا يعني أن (C_f) يقترب من المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -2x + 2e$ بجوار $+\infty$.

ج- نحدد وضعية (C_f) **بالنسبة إلى المستقيم** (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$.

لدينا $f(x) - y = \frac{-1+\ln x}{x}$ وهذا $x > 0$ وإشارة $f(x) - y$ من إشارة $-1+\ln x$.

$f(x) - y = 0$ يكافئ $-1+\ln x = 0$ يكافئ $\ln x = 1$ أي $x = e$.

$f(x) - y > 0$ يكافئ $-1+\ln x > 0$ يكافئ $\ln x > 1$ أي $x > e$.

x	0		e		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	‖ (C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(e;0)$	(C_f) فوق (Δ)	

2. أ- نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x **من المجال** $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - (-1+\ln x)}{x^2} - 2 = \frac{2 - \ln x - 2x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

من أجل $x \in]-\infty;1[$ ، $f'(x) > 0$ ؛ ومن أجل $x \in]1;+\infty[$ ، $f'(x) < 0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

aziz_mustapha@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

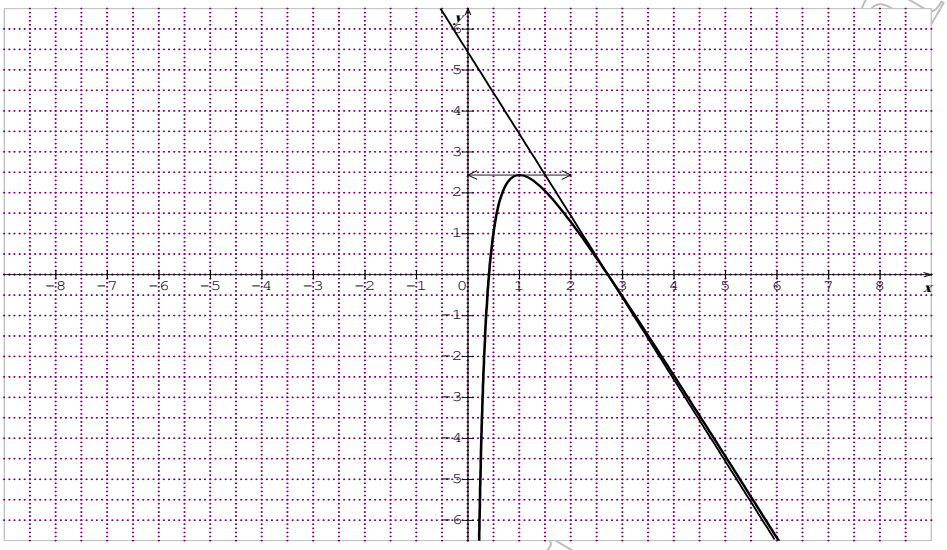
جدول تغيرات الدالة f .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$2e-3$	↘	$-\infty$

3. أ- بإثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 فإن المجال $]0,4;0,5[$.

الدالة f تزايدية ومتزايدة على المجال $]0;1]$ وخاصة على المجال $[0,4;0,5]$ ولدينا $f(0,4)\approx -0,15$ و $f(0,5)\approx 1,04$ إذ يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 في المجال $]0,4;0,5[$ تحقق $f(x_1)=0$ وأرجعة يتسع حقيقي انظر الخطط.

ب- نرسم (Δ) و (C_f).



التمرين الثاني ☹

I- لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+2-2\ln(x)$

1. ادرس تغيرات الدالة g واحسب $g(1)$.
2. استنتج أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II- f دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x$ قريبا مائلا له عند $+\infty$.

ج- حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) .

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ- بين أنه يوجد مماس وحيد (Δ) للمنحنى (C_f) ، موازٍ للمستقيم (D) .

aziz_mus
Mostefa A/Elazi

ب - اكتب معادلة المماس (Δ).

ج- بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $\frac{1}{2}<\alpha<1$

د - أنشئ المستقيمين (Δ) و (D) والمنحنى (C_f).

هـ- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $mx-2\ln(x)=0$.

الحل☺

I- لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+2-2\ln(x)$

1. **ادرس تغيرات الدالة g واحسب $g(1)$.**

$\lim\limits_{x\to 0^+} 2\ln x=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+2=2$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+2-2\ln x=+\infty$ إذن

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(x+\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

$g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}$ لأن $x>0$ و إشارة $g'(x)$ من إشارة x^2-1

x	0		1		$+\infty$
x^2-1	‖	$-$	0	$+$	

$g(1)=1+2+2\ln 1=3$

جدول تغيرات الدالة g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

2. **استنتج أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $g(x)>0$.**

بما أن 3 قيمة حدية صغرى للدالة g على المجال $]0;+\infty[$ فإنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$، $g(x)\geq 3$ ومنه $g(x)>0$.

II- f دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+\frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **أ - احسب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{2\ln x}{x}=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{x}=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x+\frac{2\ln x}{x}=-\infty$

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

ب ـ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}=0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x$ بجوار $+\infty$.

ج ـ تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

لدينا $f(x)-x=\dfrac{2\ln x}{x}$ ؛ إشارة $f(x)-x$ من نفس إشارة $\ln x$.

$f(x)-x=0$ يكافئ $\ln x=0$ أي $x=1$

$f(x)-x>0$ يكافئ $\ln x>0$ يكافئ $x>1$

$f(x)-x<0$ يكافئ $\ln x<0$ يكافئ $0<x<1$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

2. أ ـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=1+2\left[\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}\right]=1+\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{x^2+2-2\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

ب ـ استنتج اتجاه تغير الدالة f.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $g(x)>0$ و $x^2>0$ إذن $f'(x)>0$ ولما كانت f' موجبة تماما على $]0;+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة.

جدول تغيرات الدالة f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3. أ ـ بين أنه يوجد مماس وحيد (T) لـ (C_f)، موازي للمستقيم (Δ).

(T) موازي (Δ) يعني $f'(x_0)=1$.

$f'(x_0)=1$ يكافئ $\dfrac{g(x_0)}{{x_0}^2}=1$ يكافئ ${x_0}^2+2-2\ln x_0={x_0}^2$ أي $\ln x_0=1$ أي $x_0=e$

إذن (C_f) يقبل مماس وحيد (T) موازي لـ (Δ) في النقطة التي فاصلتها e هي $\left(e;e+\dfrac{2}{e}\right)$.

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

ب- كتابة معادلة (Δ).

$y=f'(e)(x-e)+f(e)$ ومنه $y=(x-e)+e+\frac{2}{e}$ أي $y=x+\frac{2}{e}$.

ج- تبيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $\frac{1}{2}<\alpha<1$

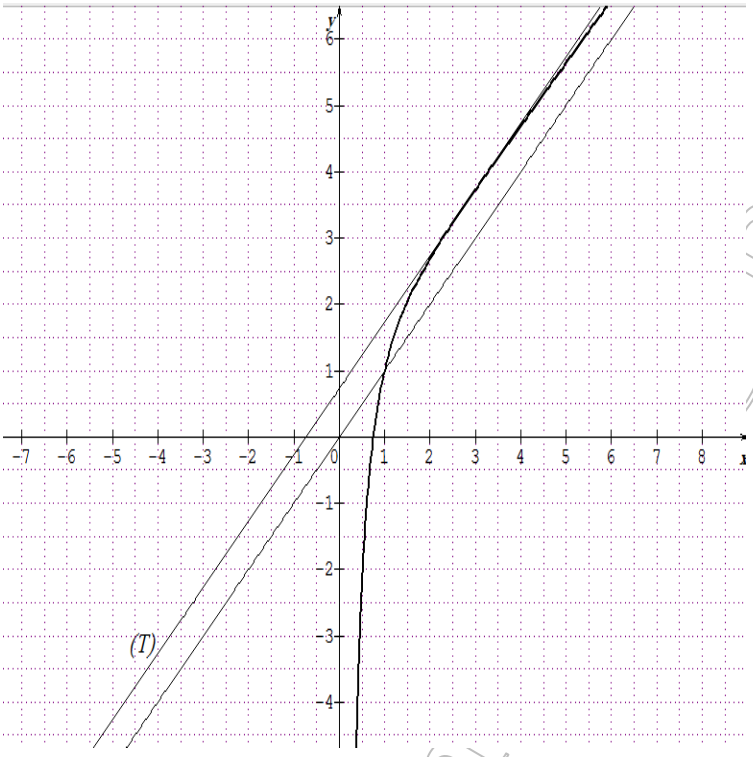
لدينا الدالة f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0,5;1]$ و $f(0,5)\approx -2,27$ ، $f(1)=1$

أي $f(0,5)\times f(1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]0,5;1[$ بحيث

$f(\alpha)=0$ وبما أنّ الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن α وحيد أي (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في

نقطة فاصلتها α حيث $0,5<\alpha<1$

د- رسم المستقيم (Δ) و (T) والمنحنى (C_f).



هـ- المناقشة بيانيا، حسب قيم العدد الحقيقي m،

عدد حلول المعادلة : $mx-2\ln(x)=0$.

$mx-2\ln(x)=0$ تكافئ $mx=2\ln(x)$

تكافئ $m=\frac{2\ln(x)}{x}$ تكافئ

$x+m=x+\frac{2\ln(x)}{x}$ أي $f(x)=x+m$

ومنه حلول المعادلة فواصل النقط المشتركة بين

(C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=x+m$

بقراءة بيانية:

إذا كان $m\le 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا واحدا.

إذا كان $0<m<\frac{2}{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m=\frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $m>\frac{2}{e}$ فإن المعادلة لا تقبل حلول.

حذار: قيم m العالقة لها بمجموعة تعريف الدالة f.

التمرين الثالث ☹

I- h دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1. احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

2. بيّن أنّه، من أجل x من $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات h.

3. احسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x.

aziz_motmail.fr

II- f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ- احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

ب- باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ بين أن: $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

ج- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

هـ- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2.بين أنه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات f .

3.بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

4.ارسم (C_f) .

الحل☺

I- h دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1.**حساب** $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} h(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1}\ln(x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} x^2+2x=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x=+\infty$

2.**بين أنه، من أجل كل** x **من** $]-1;+\infty[$ **:** $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$.

$$h'(x)=2(x+1)+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$$

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $h'(x)>0$ ولأن الدالة h متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

جدول تغيرات h .

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	$+$
$h(x)$	‖ $-\infty$	0	$+\infty$

3.**حساب** $h(0)$

$$h(0)=0^2+2(0)+\ln(0+1)=0$$

aziz_musi@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

استنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x.

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II- f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ - احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\ln(x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} x+1=0^+$

وعليه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$.

ببساطة استخدام النتيجة: $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ عبر عن أن: $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

نضع $u=e^t$ عندئذ $t=\ln u$ إذا كان t يؤول إلى $+\infty$ فإن u يؤول إلى $+\infty$.

وعليه $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{\ln u}=+\infty$ وهذه $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{u}{\ln u}}=0$

ج- استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$ وعليه $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$

د - بحساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ واستنتاج وجود مستقيم مقارب مائل (C_f) بجوار $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ ؛ إذن يوجد مستقيم مقارب مائل (C_f) بجوار $+\infty$ معادلته $y=x-1$

هـ - دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.

لدينا $f(x)-y=\dfrac{-\ln(x+1)}{x+1}$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$، $x+1>0$ وعليه إشارة $f(x)-y$ من نفس إشارة $-\ln(x+1)$.

$f(x)-y=0$ يكافئ $-\ln(x+1)=0$ يكافئ $\ln(x+1)=0$ يكافئ $x+1=1$ أي $x=0$

$f(x)-y>0$ يكافئ $-\ln(x+1)>0$ يكافئ $\ln(x+1)<0$ يكافئ $0<x+1<1$ أي $-1<x<0$

$f(x)-y<0$ يكافئ $-\ln(x+1)<0$ يكافئ $\ln(x+1)>0$ يكافئ $x+1>1$ أي $x>0$.

aziz_mustapha@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية النسبية	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) قطع (Δ) في النقطة $A(0;-1)$	(C_f) تحت (Δ)	

2. تبيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=1-\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $h(x)$.

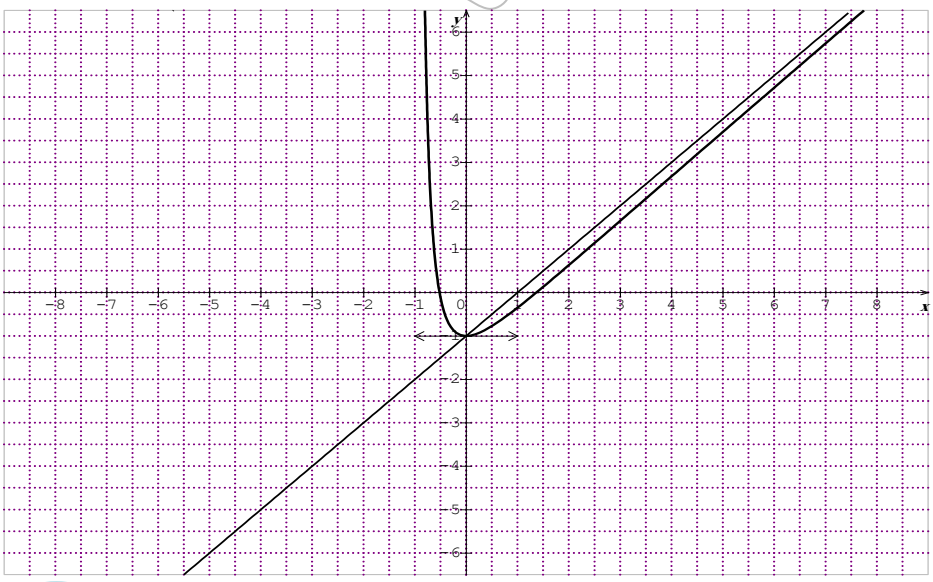
جدول تغيّرات f .

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

3. تبيّن أنّ المنحنى (C_f) قطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

الدالة f مستمرة على المجال $[0;+\infty[$ إذا كانت f مستمرة على المجال $[3,3;3,4]$ ولدينا $f(3,3)\approx 1,96$ و $f(3,4)\approx 2,06$ أي $f(3,3)<2<f(3,4)$ ومن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]3,3;3,4[$ بحيث $f(\alpha)=2$ أي (C_f) قطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها α محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

4. رسم (C_f) .



usl@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

التمرين الرابع ☹

I- g هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي: $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

1. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2. أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل على المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1,5<\alpha<2$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$

(C_f) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا.

ب) بين أن $f'(x)$ تكتب على شكل $\dfrac{g(x)}{(x^2+1)^2}$ ثم استنتج تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

3. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4. ارسم (Δ) و (C_f).

5. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+m$.

III- h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي: $h(x)=\dfrac{|\ln x|}{x^2+1}$

بين كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسم (C_h).

الحل ☺

I- g هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي: $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

1. دراسة تغيرات الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها.

لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x^2\ln x=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+x^2=1$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x^2}+1-2\ln x\right)=-\infty$$

$$g'(x)=2x-2\left(2x\ln x+\frac{1}{x}.x^2\right)=2x-4x\ln x-2x=-4x\ln x$$

من أجل كل x عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$، $-4x<0$ وهي إشارة $g'(x)$ عكس إشارة $\ln x$.

من أجل $x\in]0;1[$، $\ln x<0$ وهي $g'(x)>0$

ومن أجل $x\in]1;+\infty[$ $\ln x>0$ وهي $g'(x)<0$

لدينا الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

aziz_mus_ohotmail.fr

Mostefa A/Elazi

جدول تغيرات الدالة g .

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖	$\nearrow$	2	$\searrow$	
	‖ 1				$-\infty$

2. أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل على المجال $]0;+\infty[$ حل وحيد α حيث $1,5<\alpha<2$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1]$ وتأخذ قيمها في المجال $]1;2]$ و $0\notin]1;2]$ إذن على المجال $]0;1]$ ، $g(x)\neq 0$.

الدالة g مستمرة وتناقصية تماما على المجال $[1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2]$ و $0\in]-\infty;2]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α في المجال $[1;+\infty[$ ؛ بما أن $g(1,5)\approx 1,42$ و $g(2)\approx -0,55$ أي $g(1,5)\times g(2)<0$ فإن $1,5<\alpha<2$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

II- f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$

(C_f) تمثيلها المبياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1)أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x^2+1=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{x}{x^2+1}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1}=0$.

فسر النتائج هندسيا.

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور الترتيب)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ (محور الفواصل) بجوار $+\infty$.

ب) عبر عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x^2+1)-2x\ln x}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)-2x^2\ln x}{x}=\frac{(x^2+1)-2x^2\ln x}{x(x^2+1)^2}=\frac{g(x)}{x(x^2+1)^2}$$

استنتج تغيرات الدالة f

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $x(x^2+1)^2>0$ وهي نفس إشارة $f'(x)$ إشارة $g(x)$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

aziz.mostefa@gmail.fr
Mostefa A/Elazi

جدول تغيرات الدالة f.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 0

2. بين أن $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$

لدينا $g(\alpha)=0$ أي $1+\alpha^2-2\alpha^2\ln\alpha=0$ أي $\ln\alpha=\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

إذن $f(\alpha)=\dfrac{\ln\alpha}{\alpha^2+1}=\dfrac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{\alpha^2+1}=\dfrac{\alpha^2+1}{2\alpha^2(\alpha^2+1)}=\dfrac{1}{2\alpha^2}$

استنتج حصرا لعدد $f(\alpha)$.

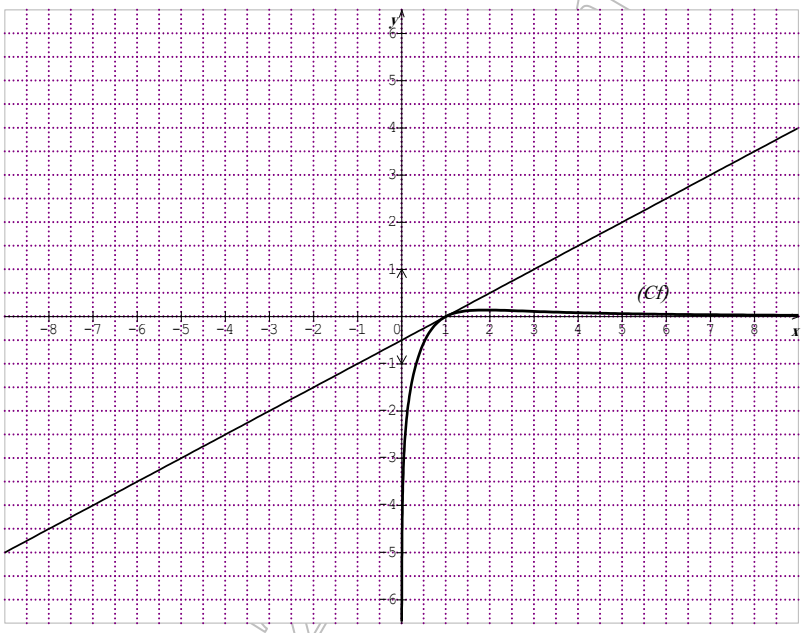
لدينا $1,5<\alpha<2$ معناه $2,25<\alpha^2<4$ أي $4,5<2\alpha^2<8$ أي $\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{2\alpha^2}<\dfrac{1}{4,5}$

$0,12<f(\alpha)<0,23$

3. اكتب معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ وهي $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$ أي $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

4. ارسم (Δ) و (C_f).



5. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+m$.

إذا كان $m<-\dfrac{1}{2}$ فإن المستقيم لا يقطع (C_f).

إذا كان $m=-\dfrac{1}{2}$ فإن المستقيم يقطع (C_f) في نقطة وحيدة فاصلتها 1.

إذا كان $m>-\dfrac{1}{2}$ فإن المستقيم يقطع (C_f) في نقطتين مختلفتين.

III- h هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{|\ln x|}{x^2+1}$

Mostefa A/Elazi
azizmostefa@hotmail.fr

شرح كيف يمكن رسم (C_h) منحنى الدالة h اعتمادا على (C_f)،

لدينا $\begin{cases} h(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1};\ln x\geq 0 \\ h(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2+1};\ln x\leq 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} h(x)=f(x);x\in[1;+\infty[\\ h(x)=-f(x);x\in]0;1] \end{cases}$.

إذن فإن المجال $[1;+\infty[$ يكون (C_h) منطبق على (C_f)

وفي المجال $]0;1]$، (C_h) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

التمرين الخامس ☹

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$، نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول $2cm$

1. أ - احسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ وفسر النتيجتين بيانيا.

ب - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

ج - ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2. أ - بين أن المنحنى (C) قبل نقطة انعطاف E طلب تعيين إحداثياتها.

ب - اكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ O.

3. ارسم (Δ)، (D) و (C).

4. نقاش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m، عدد حلول المعادلة $m^x=x$.

الحل ☺

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$، نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول $2cm$

1. أ - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x=0^+$.

تفسير النتيجتين بيانيا.

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإن (C) قبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ (محور الفواصل)

و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ ومنه (C) قبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب)

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

ب- تبيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

ج- دراسة اتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $1-\ln x$.

$f'(x)=0$ معناه $1-\ln x=0$ وكافئ $\ln x=1$ أي $x=e$.

$f'(x)>0$ معناه $1-\ln x>0$ وكافئ $\ln x<1$ أي $0<x<e$

$f'(x)<0$ معناه $1-\ln x<0$ وكافئ $\ln x>1$ أي $x>e$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;e]$ وتناقصية تماما على $[e;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2. أ- تبيّن أنّ المنحنى (C) قابل لنقطة انعطاف E لطبيعتين إحداثيّاها.

$$f''(x)=\frac{\frac{-1}{x}.x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-1-2+2\ln x}{x^3}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $x^3>0$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي من نفس إشارة $-3+2\ln x$.

$f''(x)=0$ معناه $-3+2\ln x=0$ وكافئ $\ln x=\frac{3}{2}$ أي $x=\sqrt{e^3}$

$f''(x)>0$ معناه $-3+2\ln x>0$ وكافئ $\ln x>\frac{3}{2}$ أي $x>\sqrt{e^3}$

x	0		$\sqrt{e^3}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم عند العدد $\sqrt{e^3}$ وتغير من إشارتها بجوار $\sqrt{e^3}$ ومنه النقطة $E\left(\sqrt{e^3};f\left(\sqrt{e^3}\right)\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C).

ج- كتابة معادلة المماس (D) للمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ O.

معادلة المماس من الشكل $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

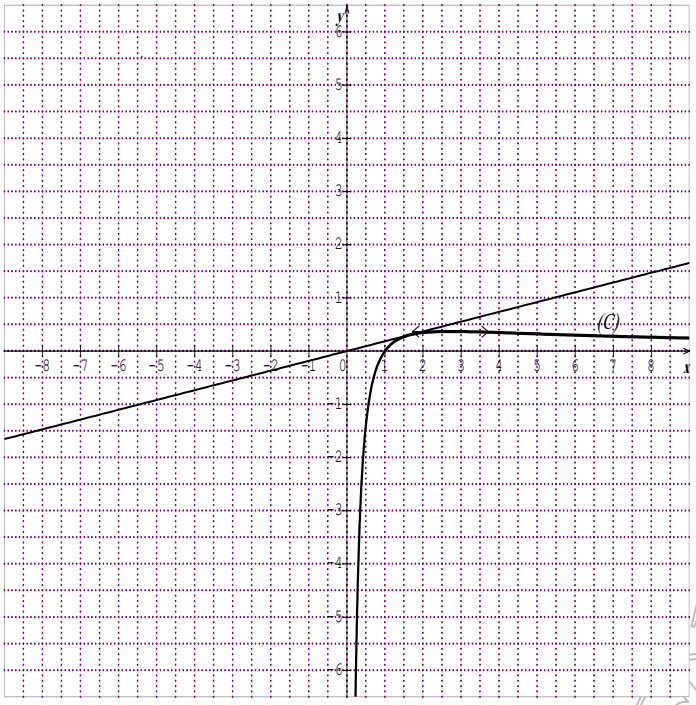
$O\in(D)$ معناه $0=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$ وكافئ $-x_0\left(\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}\right)+\frac{\ln x_0}{x_0}=0$ وكافئ $\frac{-1+2\ln x_0}{x_0}=0$

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

وكافئ $\ln x_0 = \frac{1}{2}$ أي $x_0 = \sqrt{e}$

إذن معادلة المماس هي $y = f'(\sqrt{e})x$ أي $y = \frac{1}{2e}x$

3. رسم (D) و (C).



4. المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m، عدد حلول المعادلة $m^x = x$.

$m^x = x$ كافئ $\ln m^x = \ln x$ وكافئ $x \ln m = \ln x$

وكافئ $\ln m = \frac{\ln x}{x}$ أي $f(x) = \ln m$

إذا كان $0 < m \leq 1$ فإن $\ln m \leq 0$ وبالتالي المعادلة تقبل حلا وحيدا.

إذا كان $1 < m < e^{\frac{1}{e}}$ فإن $0 < \ln m < \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة تقبل حلين متمايزين

إذا كان $m = e^{\frac{1}{e}}$ فإن $\ln m = \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $m > e^{\frac{1}{e}}$ فإن $\ln m > \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة ليس لها حلول.

التمرين السادس ☹

I) الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g.

2. احسب $g(1)$ ثم استخرج إشارة x بإشارة $g(x)$.

II) الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

1. أ- احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

ب- احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثم فسر الرجح نظريا.

2. أ- تأكد أن $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثم استخرج اتجاه تغير الدالة f.

ب- شكل جدول تغير الدالة f.

3. أ- تأكد أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ يمر بين منحنى (C_f).

ب- ادرس وضع (C_f) بالنسبة لـ (D).

4. تأكد أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1 - \frac{1}{e}$ يقطع المنحنى A نقطة تغير إحداثيا.

5. ارسم (Δ)، (D) و (C_f).

aziz_mus1@hotmail.fr

انجم ☺

I) الدّاح العدد ح g يعفّح عه ً $]0;+\infty[$ ت: $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1. دراسة تغيّر الدّاح g .

الدّاح g منشم إلشرم اق عه ً $]0;+\infty[$ ون د ُا: $g'(x)=-2x-\frac{1}{x}$

ي أجم كم x ي ال ً جال $]0;+\infty[$ ، $g'(x)<0$ وترا ر ّ الدّاح g ي ُالصح ذ ً ليا عه ً $]0;+\infty[$.

2. حساب $g(1)$ ستنتج ث ع ان قيم x إشازج $g(x)$.

$g(1)=1-1^2-\ln 1=0$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) الدّاح العدد ح f يعفّح عه ً $]0;+\infty[$ ت: $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$

1. أ - حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1-\frac{\ln x}{x}=+\infty$ ألنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$.

ب - حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

ن د ُا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln x}{x}=-\infty$ وي ُ ّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$.

تفسير سنا ت ٍ دح ّ ى س ٍ ا.

(C_f) ثم ي ع ر م ي ي م از ب ي ع ا ن ر ّ $x=0$ ي ح ن ٍ ر ا س ا ذ ة (.

2. أ ت ث ٍ ٍ ه أ ّ م ه أخ م ك م x م ه $]0;+\infty[$ ف إنّ $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x}(x)-\ln x}{x^2}\right]=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}=\frac{-g(x)}{x^2}$$

ش ازج $f'(x)$ ° ع ك ط ش ازج $g(x)$

ي أجم $x\in]0;1[$ ، $g(x)>0$ وي ُ ّ $f'(x)<0$.

و ي أجم $x\in]1;+\infty[$ ، $g(x)<0$ وي ُ ّ $f'(x)>0$

إذ ّ الدّاح f ي ُالصح ذ ً ليا عه ً $]0;1]$ ومتزا ّ ج ذ ً ليا عه ً $[1;+\infty[$.

ب - خد ل تغيّر اخ الدّاح f .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

3. أ- تثبيت أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل منحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{\ln x}{x}=0$ ويؤول عن (D) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل منحنى (C_f).

ب- دراسة وضع (C_f) بالنسبة لـ (D).

نجد أن $f(x)-(x-1)=\dfrac{-\ln x}{x}$ ويؤول إشارة $f(x)-(x-1)$ عكس إشارة $\ln x$.

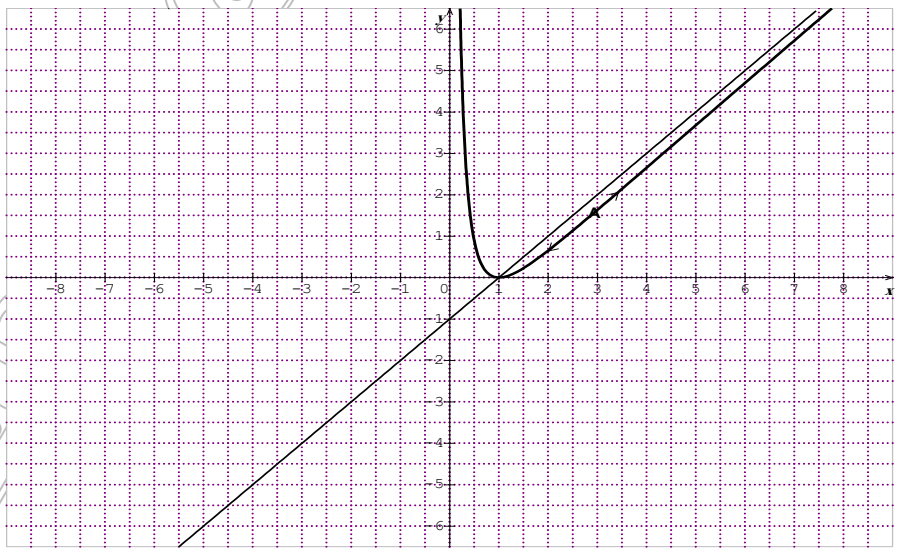
x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية النسبية	‖	(C_f) فوق (D)	(C_f) قطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$	(C_f) تحت (D)	

4. تثبيت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1-\dfrac{1}{e}$ مماس لمنحنى (C_f) في نقطة A مع تعيين إحداثيات.

$f'(x_0)=1$ نعني $\dfrac{-g(x)}{x^2}=1$ وكافئ $x^2-1+\ln x=x^2$ وكافئ $\ln x=1$ أي $x=e$

ونجد أن $f(e)=e-1-\dfrac{1}{e}$ و $y=e-1-\dfrac{1}{e}$ إذن معادلة (Δ) مماس لـ (C_f) في النقطة $A\left(e;e-1-\dfrac{1}{e}\right)$

5. رسم (Δ)، (D) و (C_f).



التمرين السابع ☹

تعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\dfrac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ فسّر النتائج هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

ب) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

ج) بيّن أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$ في المجال $]0;1[$.

3) أنشئ (T) و (C_f).

4) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

ولتكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

ب) أنشئ (C_h) انطلاقا من (C_f).

ج) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

الحل☺

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\dfrac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 1+\dfrac{2\ln x}{x}=-\infty$ وهي $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2\ln x}{x}=1$ وهي $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

فسّر النتائج هندسيا.

لأنّ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$ (محور التراتيب).

ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$.

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f **على المجال** $]0;+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

لأنّ من أجل كل عدد حقيقي x، $x^2>0$ وهي إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-\ln x$.

$f'(x)=0$ تعني $1-\ln x=0$ أي $\ln x=1$ أي $x=e$.

$f'(x)>0$ تعني $1-\ln x>0$ أي $\ln x<1$ أي $0<x<e$.

$f'(x)<0$ تعني $1-\ln x<0$ أي $\ln x>1$ أي $x>e$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;e]$ ومتناقصة تماما على $[e;+\infty[$.

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{2}{e}$	$\searrow$	1

2) أ) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

لدينا $f(x)-1=\frac{2\ln x}{x}$

$f(x)-1=0$ معناه $\frac{2\ln x}{x}=0$ كافئ $\ln x=0$ أي $x=1$.

$f(x)-1>0$ معناه $\frac{2\ln x}{x}>0$ كافئ $\ln x>0$ أي $x>1$

$f(x)-1<0$ معناه $\frac{2\ln x}{x}<0$ كافئ $\ln x<0$ أي $0<x<1$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-1$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) قطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

ب) كتابة معادلة المماس (T) لمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفصلة 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=2(x-1)+1$ أي $(T):y=2x-1$

ج) تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

الدالة f مستمرة على المجال $]0;1[$ فهي مستمرة على المجال $\left[e^{-0,4};e^{-0,3}\right]$ ولدينا $f\left(e^{-0,4}\right)\approx-0,19$،

$f\left(e^{-0,3}\right)\approx0,19$ أي $f\left(e^{-0,4}\right)\times f\left(e^{-0,4}\right)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال

$\left]e^{-0,4};e^{-0,3}\right[$ بحيث $f(\alpha)=0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]0;1[$ فإن α وحيد.

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}$.

ولتكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا نستنتج ؟

لتكن x عددا حقيقيا غير معدوم:

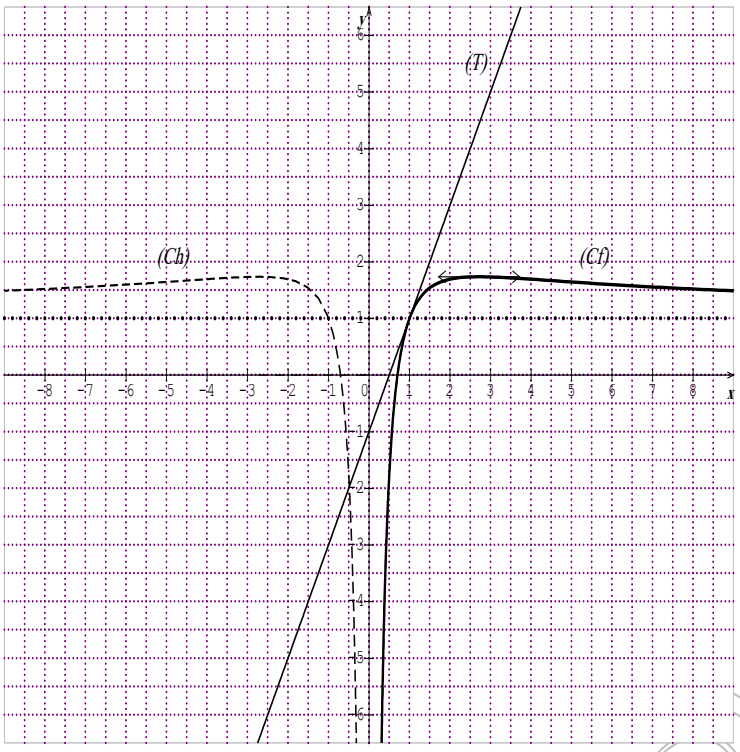
$$h(x)-h(-x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|-x|}{|-x|}=\frac{2\ln|x|}{|x|}-\frac{2\ln|x|}{|x|}=0$$

من أجل * *

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

إذن $h(x)-h(-x)=0$ أي $h(x)=h(-x)$ وهذا يعني أن الدالة h زوجية.

ب) الرسم



ج) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

$\ln x^2=(m-1)|x|$ تكافئ $m=\dfrac{\ln x^2}{|x|}+1$ تكافئ $m=\dfrac{2\ln|x|}{|x|}+1$ أي $m=h(x)$.

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_h) والمستقيم الذي معادلته $y=m$.

إذا كان $m\le 1$ فإن المعادلة لا تقبل حلا.

إذا كان $1<m<1+\dfrac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m=1+\dfrac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين متضادين.

إذا كان $m>1+\dfrac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين.

التمرين الثاني ☹

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

(C_f) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)$.

2) برهن أن الدالة f زوجية.

3) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

4) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و (Δ') الذي معادلته $y=-\dfrac{1}{2}x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

6) ارسم (Δ)، (Δ') و (C_f).

7) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$، $g(x)=f(\ln x)$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة g.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g.

aziz_mustapha@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

الحل☺

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **نتبين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:** $f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)$.

لدينا $f(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{-x}\right)=f(x)=\frac{1}{2}x+\ln e^{-x}\left(e^{x}+1\right)$

$=\frac{1}{2}x+\ln e^{-x}+\ln\left(e^{x}+1\right)$

$=\frac{1}{2}x-x+\ln\left(e^{x}+1\right)$

$=-\frac{1}{2}x+\ln\left(e^{x}+1\right)$

2. **نثبت أن الدالة f زوجية.**

من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$ ولدينا $f(-x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)=f(x)$ ومنه الدالة f زوجية.

3. **نحسب** $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ **و** $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

لدينا $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{x}\right)=0$ و $\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}x=+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(-x)=\lim_{t\to-\infty}f(t)=+\infty$

4. **ندرس اتجاه تغير الدالة f.**

$f'(x)=\frac{-1}{2}+\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{-1-e^{x}+2e^{x}}{2\left(e^{x}+1\right)}=\frac{e^{x}-1}{2\left(e^{x}+1\right)}$

من أجل كل عدد حقيقي x، $2\left(e^{x}+1\right)>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $e^{x}-1$.

$f'(x)=0$ تعني $e^{x}-1=0$ أي $e^{x}=1$ أي $x=0$

$f'(x)>0$ تعني $e^{x}-1>0$ أي $e^{x}>1$ أي $x>0$

$f'(x)<0$ تعني $e^{x}-1<0$ أي $e^{x}<1$ أي $x<0$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 2$	↗	$+\infty$

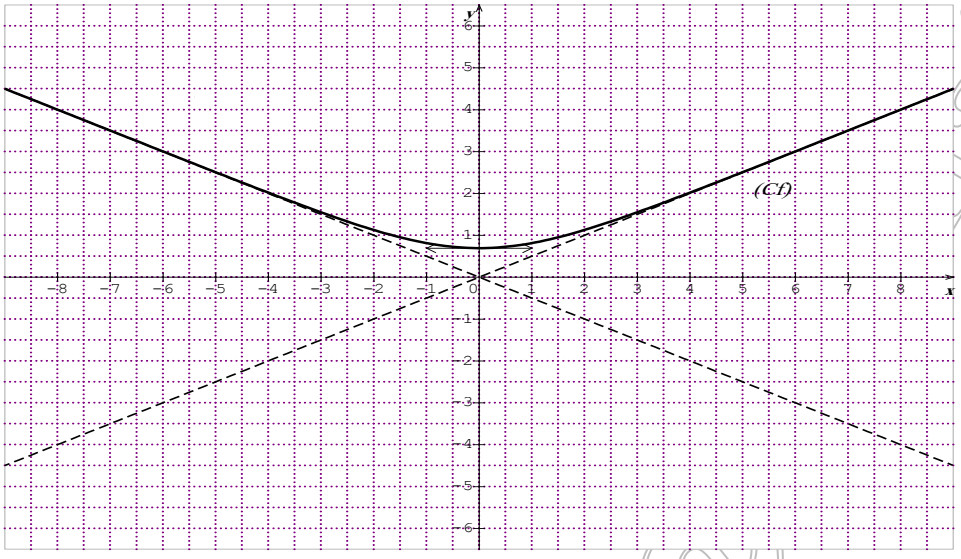
aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

5. إثبات أنّ المنحنى (C_f) قبل مستقيمٌ مقاربٌ لمائلٍ (Δ) و (Δ') طيّ بتعيين معادلتهما.

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)-\frac{1}{2}x=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=0$ إذن المنحنى (C_f) مستقيمٌ مقارب لمائل (Δ) معادلته $y=\frac{1}{2}x$ بجوار $+\infty$.

ولدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{x}\right)=0$ إذن المنحنى (C_f) مستقيمٌ مقارب لمائل (Δ') معادلته $y=-\frac{1}{2}x$ بجوار $-\infty$.

6. رسم (Δ)، (Δ') و (C_f).



7. تعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أ - التحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقيّ x من المجال $[1;+\infty[$، $g(x)=f(\ln x)$.

لدينا $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)=\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln x=-\frac{1}{2}\ln x+\ln\left(e^{\ln x}+1\right)=f(\ln x)$

- استنتاج اتجاه تغيّر الدالة g.

نلاحظ أنّ الدالة g هي مركّب الدالة $\ln$ متبوعة بالدالة f $(g=f\circ\ln)$

لدينا الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ وتأخذ قيمًا في المجال $[0;+\infty[$ والدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ إذن الدالتين نفس الاتجاه وبالتالي تركيبهما يكون دالة متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ أي الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

ب - جدول تغيّرات الدالة g.

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\ln 2 \nearrow +\infty$

التمرين التاسع ☹

I- الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) ادرس تغيّرات الدالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

aziz_musi@mail.fr
Mostefa A/Elazi

2) استنتج أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II- f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثّلها البيانيّ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ فسّر النتيجة بيانيًا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

ج) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلًّا وحيدًا α في المجال $]-1;+\infty[$ ثمّ تحقق أن $0<\alpha<0,5$.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ قارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

4) تقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة: $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ) احسب x_0 .

ب) أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثمّ المنحنى (C_f) .

ج) عيّن بيانيًا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

الحل☺

I- g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) دراسة تغيّرات الدالة g .

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} x^2+2x+4-2\ln(x+1)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} 2\ln(x+1)=-\infty$ و

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} x^2+2x+4=3$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+1\left(\frac{x^2+2x+4}{x+1}-2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$$

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=2x+2-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2x^2+4x}{x+1}=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}$

من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $x+1>0$ و $x+2>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x .

إذن الدّالة g متناقصة تمامًا على المجال $]-1;0]$ ومتزايدة تمامًا على المجال $[0;+\infty[$.

aziz_musl@hotmail.fr

Mostefa A/Elazi



جدول تغيرات الدالة g .

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$ ‖	↘	4	↗	$+\infty$

2) استنتج أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

نستنتج من جدول تغيرات الدالة g أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)\geq 4$ ومنه $g(x)>0$.

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=+\infty \text{ و منه } \lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1} x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$$

فسّر النتيجة بيانيّا.

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=-1$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=x-\frac{1}{x+1}+\frac{2\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$$ ألنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$

2) أ) بيّن أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{\frac{-2}{x+1}(x+1)-1+2\ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= 1-\frac{-3+2\ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x+4-2\ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

لدينا من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$ و $(x+1)^2>0$ إذن $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

جدول تغيرات الدالة f.

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

ج) تبيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1;+\infty[$ ثمّ تحقق أن $0<\alpha<0,5$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]-1;+\infty[$ وتأخذ قيماً في $\mathbb{R}$ إذن من أجل كل عدد حقيقي k المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]-1;+\infty[$ وبالأخص المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1;+\infty[$ وبما أنّ $f(0)\times f(0,5)<0$ فإنّ $0<\alpha<0,5$.

3) أ) تبيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

لدينا $f(x)-x=-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=\dfrac{2\ln(x+1)-1}{x+1}$ ومنه إشارة $f(x)-x$ هي من نفس إشارة $2\ln(x+1)-1$

$f(x)-x=0$ معناه $2\ln(x+1)-1=0$ وكافئ $\ln(x+1)=\dfrac{1}{2}$ أي $x=\sqrt{e}-1$

$f(x)-x>0$ معناه $2\ln(x+1)-1>0$ وكافئ $\ln(x+1)>\dfrac{1}{2}$ أي $x>\sqrt{e}-1$

x	-1	$\sqrt{e}-1$	$+\infty$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثياها $(\sqrt{e}-1;\sqrt{e}-1)$.

4) تبيّن أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة: $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

أ) حساب x_0.

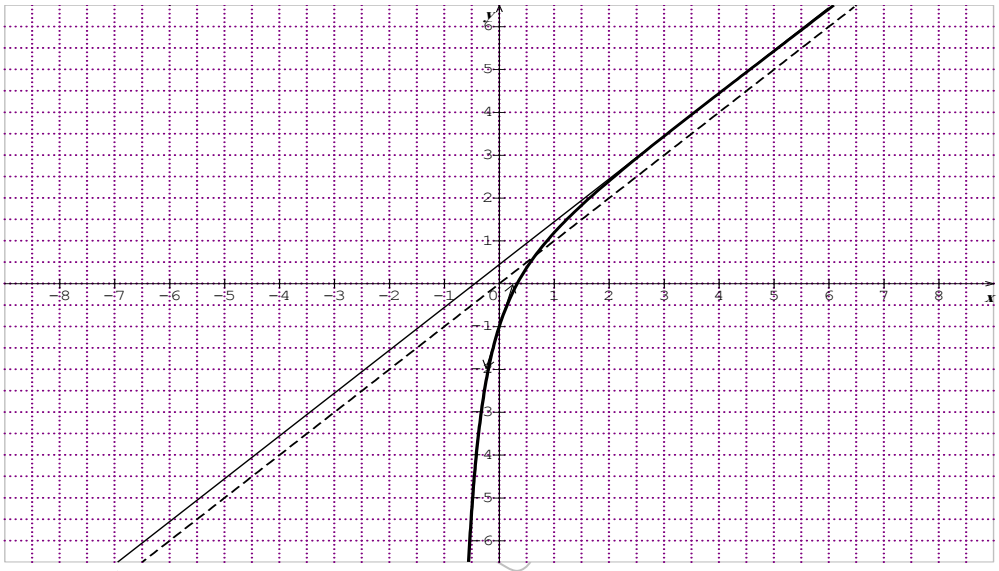
المستقيم (T) ملّة يساوي 1 ومنه $f'(x_0)=1$.

$f'(x_0)=1$ معناه $\dfrac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ وكافئ $x_0^2+2x_0+4-2\ln(x_0+1)=x_0^2+2x_0+1$ وكافئ $\ln(x_0+1)=\dfrac{3}{2}$

أي $x_0=e^{\frac{3}{2}}-1$

aziz_musi@hotmail.fr

ب) رسم المستقيم المقارب والمماس (T) ثم المنحنى (C_f).



ج) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m، بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.

المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلين متمايزين من أجل قيم m من المجال $\left]0;\frac{2}{\sqrt{e^3}}\right[$.

التمرين العاشر ☹

I - لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x-1-\ln x$

1. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.
3. تحقق أن $g(1)=1$ وبين أن المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلا آخر α حيث $0,1<\alpha<0,3$.

II - نرى إدراج f المعرف عليه كما يلي: $f(x)=x^2-x\ln x$ و $f(0)=0$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ - احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسيا.

ب - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. أ - بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج - بين أن المنحنى (C_f) قبل نقطة انعطاف ω طلب تعيينها.

د - عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسر النتيجة بيانيا.

3. أ - أثبت أن $f(x)=x\left[g(x)-x+1\right]$ ثم احسب $f(\alpha)$.

ب - أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

4. أثبت أن المنحنى (C_f) قبل مماسين (T) و (T') مائلا مساويا 1، طلب كتابة معادلة كل منهما.

aziz_musl@hotmail.com
Mostefa A/Elazi

5. ارسم (T) ، (T') والمنحنى (C_f).

الحل☺

I لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x-1-\ln x$

1. دراسة تغيرات الدالة g

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2x-1-\ln x=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ومنه: $g'(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x-1$ لأن $x>0$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

جدول تغيرات الدالة g.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\ln 2$	↗	$+\infty$

2. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى وهي $\ln 2$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ $g(x)\geq \ln 2$

وبالتالي $g(x)>0$.

3. لنتحقق أنّ $g(1)=1$

$g(1)=2(1)-1-\ln 1=1$

نبيّن أنّ للمعادلة $g(x)=1$ حل آخر α حيث $0,1<\alpha<0,3$.

الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ وبالخصوص على المجال $[0,1;0,3]$ لدينا $g(0,1)\approx 1,5$،

$g(0,3)\approx 0,8$ أي $g(0,3)<1<g(0,1)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة وجود عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,1;0,3[$ بحيث $g(\alpha)=1$.

II نعرف الدالة f على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2-x\ln x$ و $f(0)=0$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

1. أ - حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x^2 - x\ln x}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x - \ln x = +\infty$$

التفسير: الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين 0 ومنحناها البياني (C_f) له نصف مماس موازٍ لمحور الترتيب

ب - حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

2. أ - تبيين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = 2x - \left[\ln x + \frac{1}{x}.x\right] = 2x - 1 - \ln x = g(x)$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f.

من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x) > 0$ ومنه $f'(x) > 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

ج- بين أن المنحنى قبل نقطة انعطاف ω طبيعتها.

لدينا $f''(x) = g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي من نفس إشارة $g'(x)$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم من أجل $\frac{1}{2}$ وتغير من إشارتها ومنه النقطة $\omega\left(\frac{1}{2};f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

د - تعيين دون حساب $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ **فسر النتيجة بيانيا.**

الدالة تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وبالأخص عند α ولدينا:

$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = g(\alpha) = 1$ ؛ وفسر ذلك وجود مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فصلتها α ملّه يساوي 1.

3. أ - إثبات أن $f(x) = x\left[g(x) - x + 1\right]$ ،

$$f(x) = x^2 - x\ln x = x(x - \ln x) = x(2x - 1 - \ln x - x + 1) = x\left[g(x) - x + 1\right]$$

aziz_mus1@hotmail.fr

حساب $f(\alpha)$.

$f(\alpha)=\alpha\left[g(\alpha)-\alpha+1\right]=\alpha(1-\alpha+1)=\alpha(2-\alpha)$.

ب- حصر ال- $f(\alpha)$.

$0,1<\alpha<0,3$ معناه $-0,3<-\alpha<-0,1$ كافئ $1,7<2-\alpha<1,9$

ومنه $1,7\times0,1<\alpha(2-\alpha)<1,9\times0,3$ أي $0,17<f(\alpha)<0,57$.

4. إثبات أنّ المنحنى (C_f) **يقبل مماسين** (T) **و** (T') **مُلهمًا سواوي 1.**

$f'(x_0)=1$ كافئ $g(x_0)=1$ ومنه $x_0=1$ أو $x_0=\alpha$

إذن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') مُلهمًا سواوي 1 عند النقطتين اللتين فصلتهما 1 و α.

كتابة معادلة كل منهما.

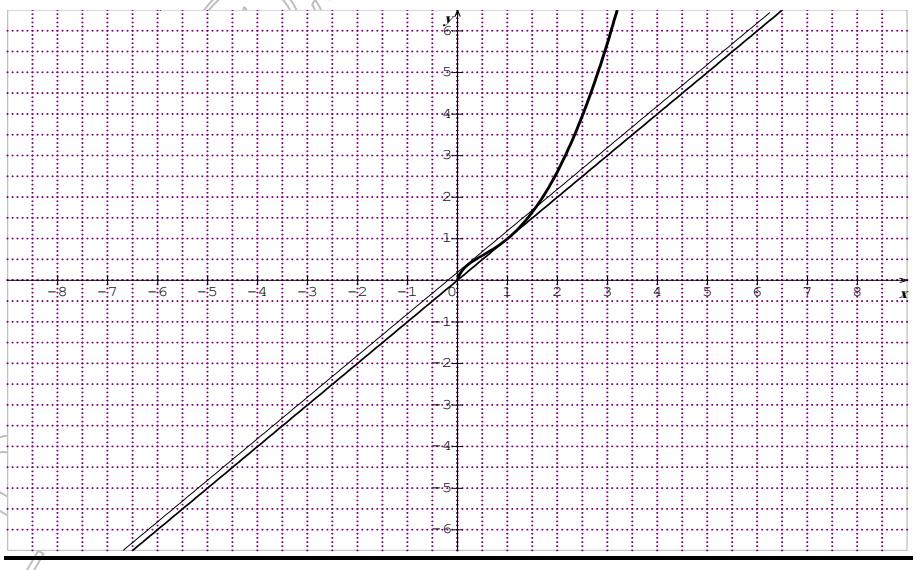
معادلة المماس (T) **عند النقطة ذات الفصلة 1.**

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=(x-1)+1$ أي $(T):y=x$

معادلة المماس (T') **عند النقطة ذات الفصلة** α.

$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ ومنه $y=(x-\alpha)+\alpha(2-\alpha)$ أي $(T'):y=x-\alpha^2+\alpha$.

5. رسم (T) ، (T') **والمنحنى** (C_f).



التمرين الحادي عشر ☹

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=1-\dfrac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تمثلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس غشّ اخر ادراج f.

2. بأنّ أنّ (C_f) مطعن عرمي $(\Delta):y=1$ في مطرف طه ذعه إحداثيًا.

3. احسب $f(-x)+f(x)$، ماذا يُعرج ؟

4. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-0,71;-0,70[$

5. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة $A(0;1)$ ومنه استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (T).

6. أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

7. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx+1$

8. h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=1+\dfrac{\ln x^2}{|x|}$.

أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.

ب) دون دراسة تغيرات h، أرسم (C_h)، المنحنى الممثل لها في نفس المعلم السابق.

الحل☺

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=1-\dfrac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. دراسة تغيرات الدالة f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}1-\frac{2\ln-x}{x}=\lim_{t\to+\infty}1+\frac{2\ln t}{t}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-\frac{2\ln x}{x}=1$$

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\ln x^2=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{\ln x^2}{x}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}1-\dfrac{\ln x^2}{x}=-\infty$

و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x^2=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln x^2}{x}=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}1-\dfrac{\ln x^2}{x}=+\infty$.

$$f'(x)=-\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x-\ln x^2}{x^2}=\frac{\ln x^2-2}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $\ln x^2-2$.

$f'(x)=0$ يعني $\ln x^2-2=0$ أي $\ln x^2=2$ أي $x^2=e^2$ أي $x=e$ أو $x=-e$

$f'(x)>0$ يعني $\ln x^2-2>0$ أي $\ln x^2>2$ أي $x^2>e^2$ أي $x>e$ أو $x<-e$

إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على كل من $]-\infty;-e]$ و $[e;+\infty[$ ومتناقصة تماما على كل من $[-e;0[$ و $]0;e]$.

aziz-mustapha@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

خد لتغيّر اخ الدّاح f.

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{e+2}{e}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{e-2}{e}$	↗	1

2. إثبات أنّ المنحنى (C_f) قطعان مستقيم $(\Delta): y=1$ فً وقطتٍ هٌ طة تع ٍ ه إحداثٍ اتٍما.

$f(x)=1$ يعني $1-\frac{\ln x^2}{x}=1$ كافئ $\ln x^2=0$ كافئ $x^2=1$ أي $x=1$ أو $x=-1$

إذٌ $(C_f)\cap(\Delta)=\{A(1;1),B(-1;1)\}$

3. حساب $f(-x)+f(x)$.

$$f(-x)+f(x)=1-\frac{\ln(-x)^2}{-x}+1-\frac{\ln x^2}{x}=2+\frac{\ln x^2}{x}-\frac{\ln x^2}{x}=2$$

يٍ أجم $x\in\mathbb{R}^*$ ندٌ $-x\in\mathbb{R}^*$ وندٌ $f(-x)+f(x)=2$ وعهّ ٌ المُطح $\omega(0;1)$ ْ يَكص نُطسنه ًحُ ٌ (C_f)

4. بتثٍ ٍه أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقث م حال َحدا α على المجال $]-0,71;-0,70[$

الدّالة f مستمرة وتناقص تماما على المجال $[-0,71;-0,70]$ ولدٌنا $f(-0,71)\approx 0,04$ ، $f(-0,70)\approx -0,02$ أي $f(-0,71)\times f(-0,70)<0$ ومنحسب مبرونة القالمتوسطة ٌوجد عدد حقٌ ً وحٌد α فً المجال $]-0,71;-0,70[$ بحٌث $f(\alpha)=0$.

5. إثبات أنّ المنحنى (C_f) قبل مماسا (T) شٌمل النقطة $A(0;1)$ وٌمسّ المنحنى (C_f) فً نقطتٌن.

لدٌنا معادلة المماس (T) من الشكل: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$A(0;1)\in(T)$ معناه $1=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$ كافئ $-x_0\left(\frac{\ln x_0^2-2}{x_0^2}\right)+1-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=1$

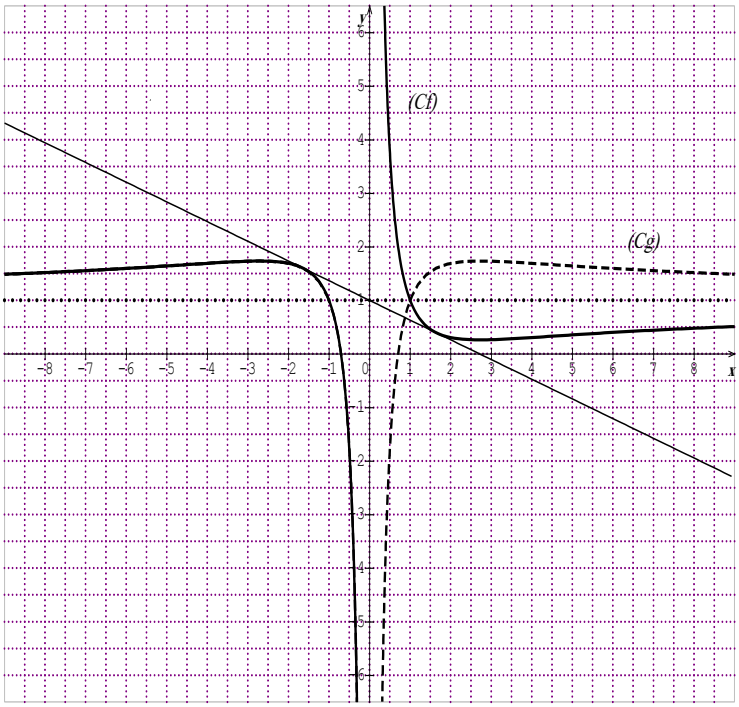
كافئ $\left(\frac{-\ln x_0^2+2}{x_0}\right)-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=0$ كافئ $\frac{-2\ln x_0^2+2}{x_0}=0$ كافئ $\ln x_0^2=1$ ومنه $x_0^2=e$

أي $x_0=\sqrt{e}$ أو $x_0=-\sqrt{e}$. إذن (C_f) قبل مماسٌن شٌمل النقطة $A(0;1)$ عند النقطتٌن التٌن فاصلتٌهما $\sqrt{e}$ و $-\sqrt{e}$ ولدٌنا $f'(\sqrt{e})=-\frac{1}{e}$ و $f'(-\sqrt{e})=-\frac{1}{e}$ إذن المماسان متوازٌان وبالتالً هما متطابقان أي أنّ المنحنى (C_f) قبل مماسا (T) شٌمل النقطة $A(0;1)$ وٌمسّ المنحنى (C_f) فً النقطتٌن التٌن إحداثٌتٌهما $(\sqrt{e};f(\sqrt{e}))$ و $(-\sqrt{e};f(-\sqrt{e}))$.

كتابة معادلة المماس (T).

$y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$ ومنه $y=\frac{-1}{e}x+1$.

aziz_mus1@hotmail.fr



6. رسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

لمناقشة بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx+1$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=mx+1$.

إذا كان $m<-\frac{1}{e}$ فإن المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m=-\frac{1}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

إذا كان $-\frac{1}{e}<m<0$ فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m\geq 0$ فإن المعادلة تقبل حلين.

8. h الدالة العددية غير المنعدمة x حيث: $h(x)=1+\frac{\ln x^2}{|x|}$.

أ) تبين أن h دالة زوجية.

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$.

ولدينا $h(-x)=1+\frac{\ln(-x)^2}{|-x|}=1+\frac{\ln x^2}{|x|}=h(x)$

ومنه $\begin{cases} h(x)=1+\frac{\ln x^2}{x};x>0 \\ h(x)=1+\frac{\ln x^2}{-x};x<0 \end{cases}$ $\begin{cases} h(x)=f(-x);x>0 \\ h(x)=f(x);x<0 \end{cases}$

إذن (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]-\infty;0[$ وبما أن h زوجية فإن (C_h) تنظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.

التمرين الثاني عشر ☹

I) الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند 0 وعند $+\infty$ وفسر النتيجتين هندسيا.
2. ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
3. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات التراتيب 0.
4. بين أن المنحنى (C) قبل النقطة انعطاف ω طلب تعيين إحداثياتها.

aziz_mus1@hotmail.fr

5. بيّن أنّ المنحنى (C) يقطع المستقيم (d) ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}$ في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $0,4<\alpha<0,5$ و $5,3<\beta<5,4$.

6. ارسم كلا من (T) و (C).

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x^2}{2x}$. ولتكن (γ) منحناها البياني في المعلم السابق.

1. بيّن أنّ الدالة g فردية.

2. بيّن أنّ $g(x)=f(x)$ على مجال طيب تحدده.

3. دون دراسة الدالة g شكل جدول تغيراتها.

4. اعتمادا على المنحنى (C) شرح كيفية رسم المنحنى (γ) ثمّ ارسمه.

الحل☺

I) الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب نهاية الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 1+\ln x=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1+\ln x}{x}=-\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}=0$

تفسير النتيجتين هندسيا

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ إذن قبل مستقيم قارب معادلته $x=0$ (حامل محور التراتيب)

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن قبل مستقيم قارب معادلته $y=0$ (حامل محور الفواصل)

2. دراسة اتجاه تغير الدالة f.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x-1-\ln x}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $\ln x$.

من أجل $x\in]0;1[$، $\ln x<0$ ومنه $f'(x)>0$

ومن أجل $x\in]1;+\infty[$، $\ln x>0$ ومنه $f'(x)<0$ و $f'(1)=0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما $]0;1]$ على وتناقصية تماما على $[1;+\infty[$.

جدول التغيرات.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

aziz_musi@hotmail.fr

3. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الترتيب 0.

$f(x_0)=0$ معناه $\frac{1+\ln x_0}{x_0}=0$ كافئ $1+\ln x_0=0$ أي $x_0=e^{-1}$

ومنه $y=f'(e^{-1})(x-e^{-1})+f(e^{-1})$ أي $y=e^2(x-e^{-1})$ وعليه $(T): y=e^2x-e$

4. تبيّن أنّ للمنحنى (C) قابل نقطة انعطاف ω لطبيعتين إحداثياها.

الدالة f تقبل الإشتقاق مرتين على $]0;+\infty[$ ولدينا : $f''(x)=\frac{\left(\frac{-1}{x}\right)x^2+2x\ln x}{x^4}=\frac{-x+2x\ln x}{x^4}=\frac{-1+2\ln x}{x^3}$

إشارة $f''(x)$ هي من نفس إشارة $-1+2\ln x$.

$f''(x)=0$ معناه $-1+2\ln x=0$ كافئ $\ln x=\frac{1}{2}$ أي $x=\sqrt{e}$

$f''(x)>0$ معناه $-1+2\ln x>0$ كافئ $\ln x>\frac{1}{2}$ أي $x>\sqrt{e}$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم عند العدد $\sqrt{e}$ وتغير من إشارتها بجوار $\sqrt{e}$ ومنه النقطة $\omega\left(\sqrt{e};f(\sqrt{e})\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C).

5. تبيّن أنّ للمنحنى (C) قطع المستقيم (d) ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}$ في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث:

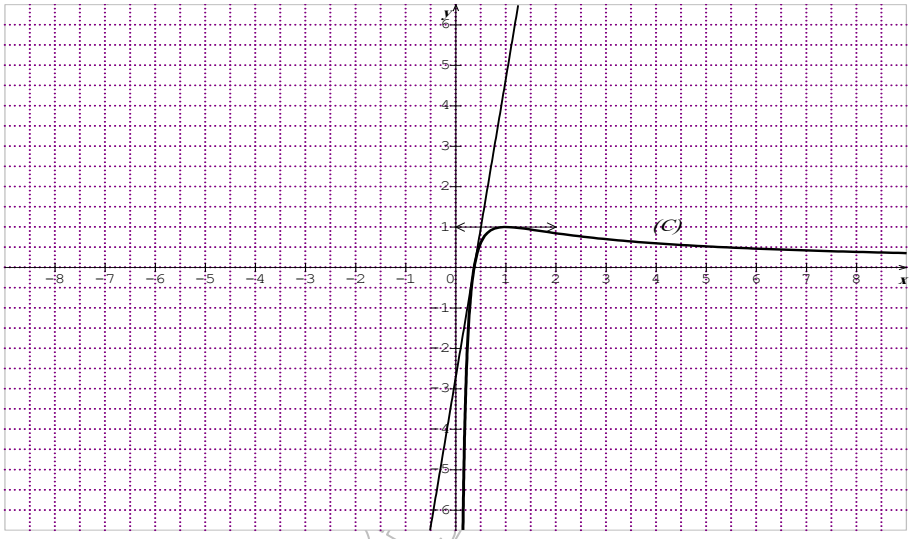
$0,4<\alpha<0,5$ و $5,3<\beta<5,4$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;1]$ وبالخصوص على المجال $[0,4;0,5]$ ولدينا $g(0,4)\approx 0,20$ ، $g(0,5)\approx 0,61$ إذن $f(0,4)<\frac{1}{2}<f(0,5)$ ومنحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,4;0,5[$ بحيث $f(\alpha)=\frac{1}{2}$

ولدينا الدالة f مستمرة وتناقصية تماما على المجال $[1;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[5,3;5,4]$ ولدينا $g(5,3)\approx 0,503$ ، $g(5,4)\approx 0,497$ إذن $f(5,4)<\frac{1}{2}<f(5,3)$ ومنحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β من المجال $]5,3;5,4[$ بحيث $f(\beta)=\frac{1}{2}$ وبالتالي للمنحنى (C) قطع المستقيم (d) ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}$ في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $0,4<\alpha<0,5$ و $5,3<\beta<5,4$.

aziz_musl@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

6) رسم كل من (T) و (C).



نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x^2}{2x}$. ولتكن (γ) تمثيلها المبياني في المعلم السابق.

1) تبيّن أنّ الدالة g فردية.

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما:

$$g(-x)=\frac{1}{-x}+\frac{\ln(-x)^2}{-2x}=-\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x^2}{2x}\right)=-g(x)$$

وهذا يعني أنّ الدالة g فردية.

2) تبيّن أنّ $g(x)=f(x)$ على مجال يطلب تحديده.

لدينا $g(x)=\frac{1}{x}+\frac{2\ln|x|}{2x}$ وهذا يعني

$$\begin{cases} g(x)=\frac{1+\ln x}{x};x>0 \\ g(x)=\frac{1+\ln -x}{x};x<0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} g(x)=\frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{2x};x>0 \\ g(x)=\frac{1}{x}+\frac{2\ln -x}{2x};x<0 \end{cases}$$

إذن من أجل $x\in]0;+\infty[$: $g(x)=f(x)$

3. جدول تغيرات الدالة g.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	‖	0	
$g(x)$		0 ↘ -1 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ 1 ↘ 0	

4) شرح كيفية رسم المنحنى (γ)

(γ) يطابق (C_f) على المجال $]0;+\infty[$ وبما أنّ g فردية فإنّ (γ) نظيره بالنسبة إلى O مبدأ المعلم.

التمرين الثالث عشر:

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right);x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

aziz_mus1@hotmail.com
Mostefa A/Elazi

(C) تمثله البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. انحدج $5cm$

I- g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$

1. تبيّن أنّ، أي أجمل x في $]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$

2. ادرس إشارة $g'(x)$ حسب قيم x.

3. شكل جدول تغيّرات الدالة g.

4. برهن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,5<\alpha<0,6$.

5. حدد إشارة $g(x)$.

II- 1. أ. بيّن أنّه، من أجل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$

ب. استنتج إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

2. أ. احسب $\lim_{x\to+\infty} xf(x)$ ؛ يمكن وضع $t=\frac{1}{x^2}$

ب. استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3. أبيّن أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x\ln(x^2+1)-2x\ln x$

ب. احسب $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$

ج. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0.

4. نأشئ جدول تغيّرات الدالة f ثمّ ارسم (C). نأخذ $f(\alpha)\simeq 0,8$.

الحل☺

f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي:
$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right); x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C) تمثله البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. انحدج $5cm$

I- g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$

1. تبيّن أنه، من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$

$$g'(x)=\frac{\frac{-2x}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-2}{x(x^2+1)}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

$$= \frac{-2\left(x^2+1\right)}{x\left(x^2+1\right)^2} + \frac{4x^2}{x\left(x^2+1\right)^2}$$
$$= \frac{2\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

2دراسة إشارة $g'(x)$حسب قيم x.

من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$، $x\left(x^2+1\right)^2 > 0$ وهي إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x^2-1.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3. جدول تغيرات الدالة g.

x	0		α		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$\ln 2-1$	↗	0

4يتبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $0,5<\alpha<0,6$.

5تحديد إشارة $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

II- 1. أ.تبيين أنّه، من أجل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\frac{-2x}{x^4}}{\frac{x^2+1}{x^2}}.x$$

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{-2x}{x^4}.\frac{x^2}{x^2+1}.x = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1} = g(x)$$

ب. استنتاج إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

2. أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$ ؛ يمكن وضع $t=\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

نضع $t=\frac{1}{x^2}$ إذا كان x يئول إلى $+\infty$ فإنّ t يئول إلى 0.

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$.

ب. استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

3. أتبين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ $f(x)=x\ln(x^2+1)-2x\ln x$

$$f(x)=x\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)=x\left(\ln(x^2+1)-\ln x^2\right)=x\ln(x^2+1)-2x\ln x$$

ب. حساب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x^2+1)=0$

إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x^2+1)-2x\ln x=0$

ج- دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند 0.

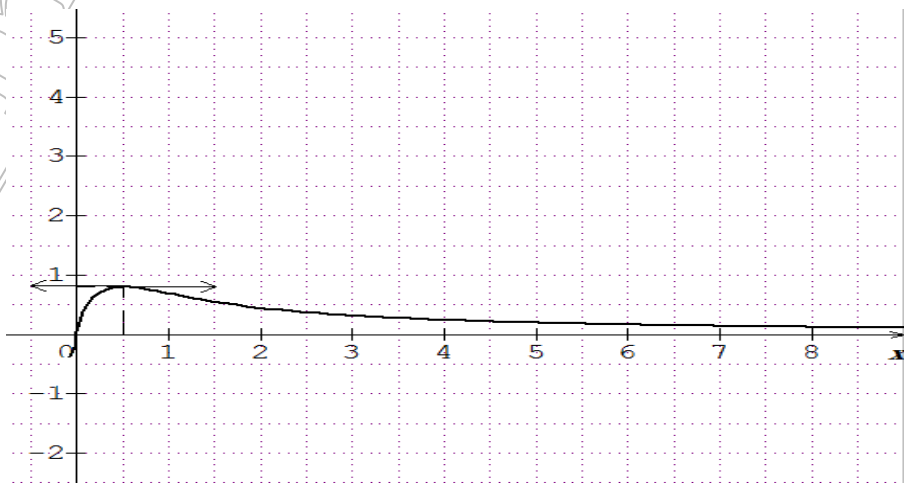
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0.

4. جدول تغيرات الدالة f.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

رسم (C).



aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

التمرين الرابع عشر ☹

I- g هي الدالة المعرفة على $]-1;3]$ كما يلي: $g(x)=2\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق $-0,8<\alpha<-0,7$.

3) عين حسب قيم x إشارة $g(x)$.

4) h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3]$ بـ: $h(x)=[g(x)]^2$.

أ) احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب) عين إشارة $h'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة h.

II- f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}, x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) تمثلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- تبين أن إدراج f يقبل الاشتقاق عند الصفر ثم اكتب معادلة (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

2- أ) بين أنه، من أجل كل x من $]-1;0[\cup]0;3]$، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

ب) بين أن: $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$ ثم عين حصر الـ $f(\alpha)$.

ج) احسب $f(3)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3- أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;3]$ فإن: $x-\ln(x+1)\geq 0$.

ب) ادرس وضع (C_f) بالنسبة لـ (T).

4- عين إيجاد نحو (T') إشارة (T) وانرسم طبيعي (C_f) في المطلوب ذات الفاصلة 3.

5- ارسم (T)، (T') و (C_f).

6- اشتقاقا، حل عقلي بإظهار حجم m، عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

الحل ☺

I- g هي الدالة المعرفة على $]-1;3]$ كما يلي: $g(x)=2\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$.

1) دراسة تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{1}{x+1}\left[2(x+1)\ln(x+1)-x\right]=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} 2(x+1)\ln(x+1)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 2t\ln t=0$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$.

$$g(3)=2\ln 4-\frac{3}{4}$$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]-1;3]$ ولدينا:

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

$$g'(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)-1}{(x+1)^2}=\frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ هي من إشارة $2x+1$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		3
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

نستنتج أن الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right[$.

جدول تغيرات الدالة g.

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$g'(x)$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-2\ln 2+1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $4\ln 2-\frac{3}{4}$

2) بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,8<\alpha<-0,7$.

الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ وتأخذ قيمها في المجال $[-2\ln 2+1;+\infty[$ و

$0\in[-2\ln 2+1;+\infty[$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ ولكن الدالة g

متزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left[-2\ln 2+1;4\ln 2-\frac{3}{4}\right[$ و

$0\in\left[-2\ln 2+1;4\ln 2-\frac{3}{4}\right[$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right[$. بما أن

$g(0)=2\ln(0+1)-\frac{0}{0+1}=0$ فإن $\beta=0$ ولدينا $g(-0,8)\approx 0,8$ و $g(-0,7)\approx -0,8$ أي

$g(-0,8)\times g(-0,7)<0$ وهذا يعني $-0,8<\alpha<-0,7$

3) ادرس، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

x	-1		α		0		3
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

4) h هي الدالة المعرفة على المجال $[-1;3]$ بـ: $h(x)=[g(x)]^2$.

أ) احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

$$h'(x)=2g'(x)\times g(x)$$

aziz_mus@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

ب) دراسة إشارة $h'(x)$.

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$g(x)$		$+$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة h متزايدة تماما على كل من $\left[\alpha;-\frac{1}{2}\right]$ و $[0;3]$ ومتناقصة تماما على كل من $]-1;\alpha]$ و $\left[-\frac{1}{2};0\right]$.

جدول تغيرات الدالة h.

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$(-2\ln 2+1)^2$	↘	0	↗	$h(3)$

II- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}, x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\ln(x+1)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=1$$ لأن $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0.

ب) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

$(T): y=x$ وهي $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

2- أ) بيّن أنّه، من أجل $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{\left[\ln(x+1)\right]^2}$.

من أجل $x\in]-1;0[\cup]0;3]$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{2x\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}.x^2}{(\ln(x+1))^2}=\frac{x\left[2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\right]}{(\ln(x+1))^2}=\frac{xg(x)}{(\ln(x+1))^2}$$

aziz_mus1@hotmail.fr

Mostefa A/Elazi

استنتاجات تغير الدالة f

x	-1		α		0		3
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
x	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	

نستنتج هكذا أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-1;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;3]$.

ب) تبيّن أنّ: $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$.

$g(\alpha)=0$ معناه $2\ln(\alpha+1)-\dfrac{\alpha}{\alpha+1}=0$ كافئ $\ln(\alpha+1)=\dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}$ كافئ $\dfrac{1}{\ln(\alpha+1)}=\dfrac{2(\alpha+1)}{\alpha}$

ومنه $\dfrac{\alpha^2}{\ln(\alpha+1)}=\dfrac{2\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha}=2\alpha(\alpha+1)$ أي $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$.

تعيّن حصرا لـ $f(\alpha)$.

$-0,8<\alpha<-0,7$ معناه $-1,6<2\alpha<-1,4$ وكافئ $1,4<-2\alpha<1,6.....(1)$

ولدينا $0,2<\alpha+1<0,3.....(2)$

إذن $0,28<-2\alpha(\alpha+1)<0,48$ ومنه $-0,48<2\alpha(\alpha+1)<-0,28$ أي $-0,48<f(\alpha)<-0,28$.

ج) حساب $f(3)$ **و** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$.

$$f(3)=\frac{3^2}{\ln(3+1)}=\frac{9}{\ln 4}$$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}=0$ ألنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} x^2=1$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\ln(x+1)=-\infty$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	-1		α		3
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$\dfrac{9}{\ln 4}$

3- أ) تبيّن أنّه من أجل كل x **من المجال** $]-1;3]$ **فإنّ:** $x-\ln(x+1)\geq 0$.

نضع $u(x)=x-\ln(x+1)$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;3]$ لدينا: $u'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$

إشارة $u'(x)$ هي نفس إشارة x.

من أجل $]-1;0[$، $u'(x)<0$ ومن أجل $]0;3[$، $u'(x)>0$

aziz_musl@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

إذن الدالة u موجبة تماما على المجال $[0;3]$ و سالبة تماما على المجال $[-1;0]$ و منعدمة من أجل 0 و -1 و 3 و بالتالي المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقط هي O و A و B.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (T).

$$f(x)-x=\frac{x^2}{\ln(x+1)}-x=\frac{x^2-x\ln(x+1)}{\ln(x+1)}=\frac{x\left(x-\ln(x+1)\right)}{\ln(x+1)}=\frac{xu(x)}{\ln(x+1)}$$

$\ln(x+1)>0$ يكافئ $x+1>1$ أي $x>0$

$\ln(x+1)<0$ يكافئ $x+1<1$ أي $-1<x<0$

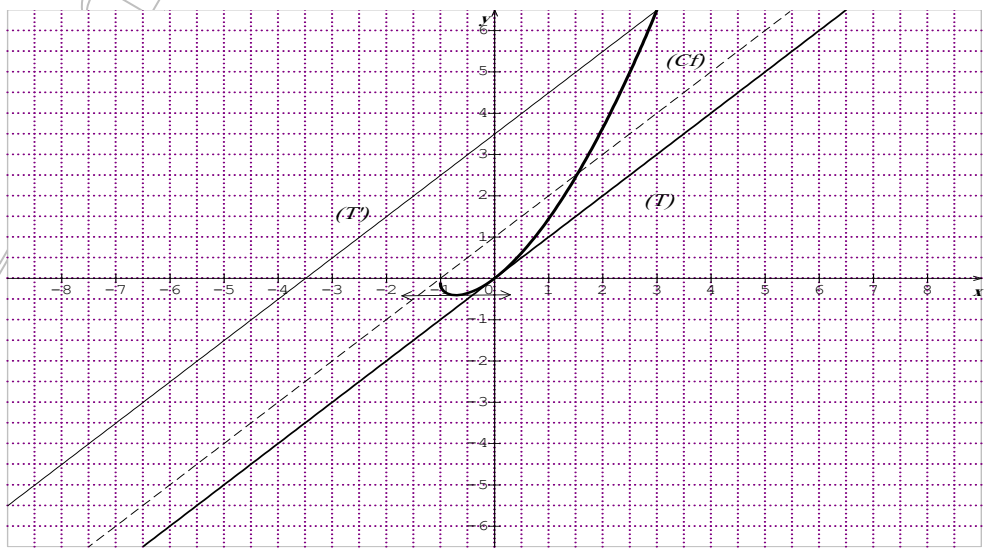
x	-1		0		3
x		$-$	0	$+$	
$u(x)$		$+$	0	$+$	
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$+$	
الوضع		(C_f) فوق (T)		(C_f) فوق (T)	
		(C_f) يقطع (T) في النقطة O			

4- بين أن المماس (T') للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3 يوازي المستقيم (T).

معادلة المماس (T') من الشكل $y=x+b$ و بما أنه يشمل النقطة $A\left(3;\frac{9}{\ln 4}\right)$ فإن $\frac{9}{\ln 4}=3+b$ و منه $b=\frac{9}{\ln 4}-3$.

و معادلة المماس (T') هي $y=x+\frac{9}{2\ln 2}-3$.

5- رسم (T) و (T') و (C_f).



azizmaths10@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

6- لتكن m وسيط حقيقي، حدد عدد حلول المعادلة ذات المجهول x: $f(x)=x+m$.

حلول المعادلة إن وُجدت هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذا كان $m<0$ أو $m>-3+\frac{9}{2\ln 2}$ فإن المعادلة لا تقبل حلا.

إذا كان $m=0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $x=0$.

إذا كان $0<m<1$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين.

إذا كان $-3+\frac{9}{2\ln 2}\le m\le 1$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا.

التمرين الخامس عشر ☹

f دالة عددية معرفة بـ: $f(x)=\ln\left(x+e^{-x}\right)$ و (C) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $x+e^{-x}\ge 1$.

ب- استنتج أن f معرفة على $\mathbb{R}$.

2. أ- ذكر بالخاصية التي تعين على حساب النهايات التالية:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-x+\ln\left(1+xe^{x}\right)$ ثم أحسب x من $\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$ ثم أحسب $x\succ 0$

ب- عين نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

ج- استنتج من السؤال السابق أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

3. ما هي نهاية $\left[f(x)-\ln x\right]$ عند $+\infty$؛ ماذا تستنتج ؟

4. ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

5. ارسم (d)، (C) و (Γ) حيث (Γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$.

الحل:

f دالة عددية معرفة بـ: $f(x)=\ln\left(x+e^{-x}\right)$ و (C) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- **نتبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $x+e^{-x}\ge 1$.**

نضع $g(x)=x+e^{-x}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x)=1-e^{-x}$.

$g'(x)=0$ يعني $1-e^{-x}=0$ أي $e^{-x}=1$ أي $x=0$

$g'(x)>0$ يعني $1-e^{-x}>0$ أي $e^{-x}<1$ أي $-x<0$ أي $x>0$

$g'(x)<0$ يعني $1-e^{-x}<0$ أي $e^{-x}>1$ أي $-x>0$ أي $x<0$.

إذن الدالة g تناقصية تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومنه تقبل قيمة حدية صغرى عند 0 وهي $g(0)=1$ أي $g(x)\ge 1$، مهما يكن x من $\mathbb{R}$ أي $x+e^{-x}\ge 1$.

ب- نستنتج أن f معرفة على $\mathbb{R}$.

لدينا $x+e^{-x}\ge 1$، مهما يكن x من $\mathbb{R}$ أي $x+e^{-x}>0$ ومنه $\ln\left(x+e^{-x}\right)$ موجود، إذن f معرفة على $\mathbb{R}$.

aziz_mus1@otmail.fr
Mostefa A/Elazi

2. أ- التحقق من صحة المساواة التالية :

- يكفي أن نجد x في $\mathbb{R}$ عندما $f(x)=-x+\ln(1+xe^{x})$.

$$f(x)=\ln(x+e^{-x})=\ln e^{-x}(xe^{x}+1)=\ln e^{-x}+\ln(xe^{x}+1)=-x+\ln(xe^{x}+1)$$

- يكفي أن نجد $x>0$ عندما $f(x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$

$$f(x)-\ln x=\ln(x+e^{-x})-\ln x=\ln\left(\frac{x+e^{-x}}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

ب- تعيين نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x+e^{-x})=+\infty$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}-x+\ln(xe^{x}+1)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}xe^{x}+1=1$

ج- استنتاج من السؤال السابق أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$.

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\ln(xe^{x}+1)=0$ ومنه المستقيم (d) مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)=0$ 3. لأن $\lim_{x\to+\infty}1+\frac{e^{-x}}{x}=1$

4. دراسة تغيرات الدالة f .

$f'(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ؛ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $x+e^{-x}>0$ ومنه إشارة هي نفس إشارة $1-e^{-x}$.

$f'(x)>0$ كافئ $x>0$

$f'(x)<0$ كافئ $x<0$

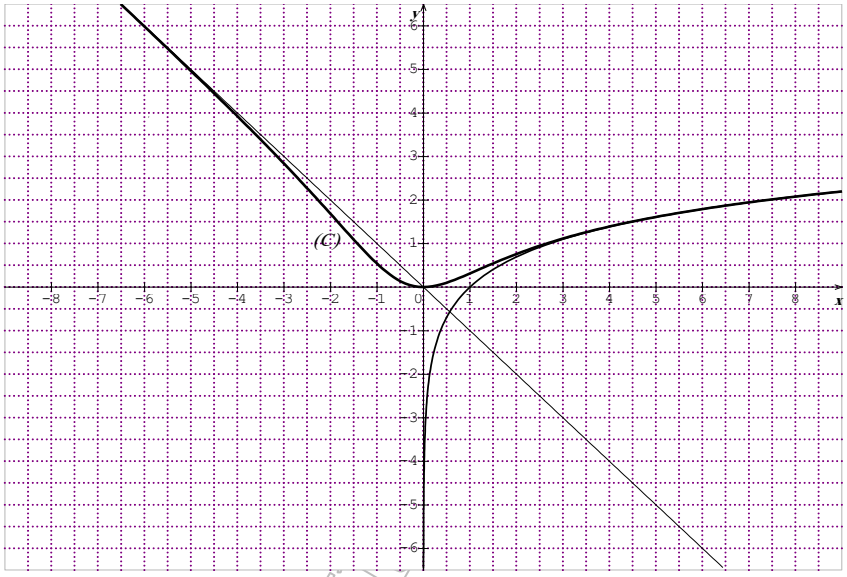
إذن الدالة f يوجد الصحيح ذاتيا على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايد ذاتيا على المجال $[0;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. رسم (d) ، (C) و (Γ) حيث (Γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto\ln x$.

aziz_mus1@hotmail.fr



التمرين السادس عشر ☹

I- الدالة g معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$.

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31<\alpha<0,32$ وأنّ: $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ بدلالة x.

II- الدالة f معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2- بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$.

3- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

4- بيّن أنّ: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

5- ارسم (C_f) على المجال $]-1;2]$.

III- (Γ) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x.

1- بيّن أنّ المسافة AM تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$.

2- الدالة k معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ- بيّن أنّ الدالتين k و f لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]-1;+\infty[$.

ب- عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ) بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

ج- بيّن أنّ: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

aziz_maths@hotmail.com
Mostefa A/Elazi

الحل☺

I- الدّالة g معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$.

1- دراسة اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.

الدّالة g تقبل على الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$g'(x)=2(x+1)+\frac{1}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $x+1>0$ و $\frac{1}{x+1}>0$ ومنه $g'(x)>0$ إذن الدالة g متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

2- تبيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31<\alpha<0,32$ وأنّ: $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

الدّالة g مستمرة على $]-1;+\infty[$ ألن تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ وهي متزايدة تماما على هذا المجال و خاصة على المجال $[0,31;0,32]$ ولدينا $g(0,31)\approx-0,01$ ، $g(0,32)\approx0,02$ أي $g(0,31)\times g(0,32)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,31;0,32[$ بحيث $g(\alpha)=0$

$g(\alpha)=0$ معناه $(\alpha+1)^2-2+\ln(\alpha+1)=0$ أي $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

3- استنتاج، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

من أجل $x\in]-1;\alpha[$ لدينا $g(x)<g(\alpha)$ أي $g(x)<0$

ومن أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ لدينا $g(x)>g(\alpha)$ أي $g(x)>0$ و $g(\alpha)=0$.

II- الدّالة f معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\ln(x+1))^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2=+\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}(2-\ln(x+1))^2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2=+\infty$.

2- إثبات أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2g(x)}{x+1}$.

الدّالة f تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=2(x+1)+2\left(\frac{-1}{x+1}\right)(2-\ln(x+1))=2(x+1)-\frac{2(2-\ln(x+1))}{x+1}=\frac{2(x+1)^2-2(2-\ln(x+1))}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{2\left[(x+1)^2-2+\ln(x+1)\right]}{x+1}=\frac{2g(x)}{x+1}$$

aziz_musi@hotmail.fr

3- دراسة تغيرات الدالة f .

من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ من نفس إشارة $\frac{2}{x+1}>0$ و هي

أي f متزايدة تماما على $]-1;\alpha]$ و متناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$

نستنتج أن الدالة f تقبل جدول تغيرات على $]-1;\alpha]$ و على $[\alpha;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4- بين أن: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$

لدينا $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$ إذن $f(\alpha)=(\alpha+1)^2+\left(2-\ln(\alpha+1)\right)^2=(\alpha+1)^2+\left(2-\left(2-(\alpha+1)^2\right)\right)^2$

$$f(\alpha)=(\alpha+1)^2+(\alpha+1)^4=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$$

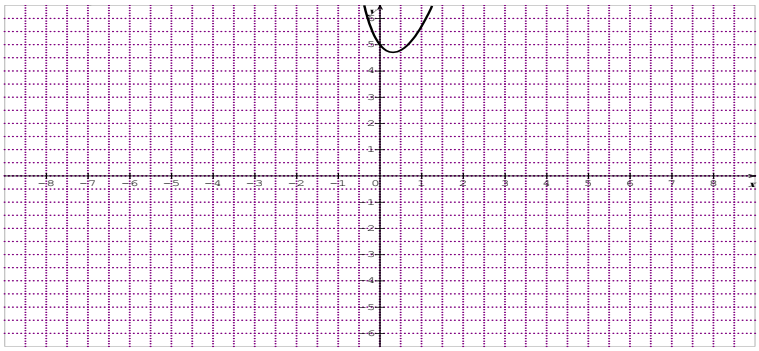
استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

$0,31<\alpha<0,32$ معناه $1,31<\alpha+1<1,32$ أي $1,7161<(\alpha+1)^2<1,7424$

و منه $2,7161<1+(\alpha+1)^2<2,7424$ أي $1,7161\times2,7161<(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)<1,7424\times2,7424$

$4,6611<f(\alpha)<4,7789$.

5- تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $]-1;2]$.



III- (Γ) المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1- إثبات أن المسافة AM تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$.

لدينا $M\left(x;\ln(x+1)\right)$ و منه

$$AM=\sqrt{(x+1)^2+\left(\ln(x+1)-2\right)^2}=\sqrt{(x+1)^2+\left(2-\ln(x+1)\right)^2}=\sqrt{f(x)}$$

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

2- الدالة k معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ- بين أن الدالة k و f لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]-1;+\infty[$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و هي موجبة على هذا المجال إذن الدالة k قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$

و لدينا $k'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $2\sqrt{f(x)}>0$ و هي نفس إشارة $k'(x)$ و هي نفس إشارة $f'(x)$ لذلك الدالتان k و f لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]-1;+\infty[$.

ملاحظة: يمكن إتباع طرق أخرى لتعيين اتجاه تغير الدالة k.

ب- تحقق أنه من أجل كل نقطة B من (Γ)، يكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

الدالة k متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ و متناقصة تماما على $[-1;\alpha]$ حيث α عدد حقيقي من المجال $]-1;+\infty[$ و هو أيضا أصغر قيمة للدالة k على المجال $]-1;+\infty[$ و منه AM يكون أصغر ما يمكن من أجل $x=\alpha$ أي النقطة $B(\alpha;\ln(\alpha+1))$

ج- بين أن: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

$$AB=k(\alpha)=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)}=(\alpha+1)\sqrt{1+(\alpha+1)^2}$$

التمرين الرابع عشر ☹

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)-\dfrac{1}{1+e^x}$.

1- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^x\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

1- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (يوضع $t=\dfrac{1}{e^x}$).

2- بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=-xe^x+e^x\ln\left(1+e^x\right)$.

- استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

3- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

- استنتج حصر موجه للعدد $f(x)$ بواسطة الدالة f.

4- بين أن المعادلة: $f(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α.

5- ارسم (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

6- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^x\ln\left(1+e^{-x}\right)-m=0$.

aziz_mus1@orange.fr
Mostefa A/Elazi

الحل:

I- نعتبر الدّاح g الأعفّح عه $\mathbb{R}$ التابع ازج: $g(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)-\dfrac{1}{1+e^{x}}$.

1- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^{x}}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)-\dfrac{1}{1+e^{x}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^{x}}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)-\dfrac{1}{1+e^{x}}=0$

2- دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x:

$$g'(x)=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{-1}{1+e^{x}}+\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{-1-e^{x}+e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{-1}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}$$

من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)<0$ وبالتالي الدّالة g تتناقص تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيّرات الدّالة g.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

3- استنتاج إشارة $g(x)$ **على** $\mathbb{R}$.

نلاحظ من جدول تغيّرات الدالة g أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)>0$.

II- نعتبر الدّاح f الأعفّح عه $\mathbb{R}$ التابع: $f(x)=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

1- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

نضع $t=\dfrac{1}{e^{x}}$ عندئذ $e^{x}=\dfrac{1}{t}$ إذا كان x يؤول إلى $+\infty$ فإنّ t يؤول إلى 0.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x}\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\ln(1+t)=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

2- تبيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-xe^{x}+e^{x}\ln\left(1+e^{x}\right)$.

لدينا $f(x)=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)=e^{x}\ln\left(e^{-x}\left(e^{x}+1\right)\right)=e^{x}\left[-x+\ln\left(e^{x}+1\right)\right]=-xe^{x}+e^{x}\ln\left(e^{x}+1\right)$

- استنتاج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}-xe^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}\ln\left(e^{x}+1\right)=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-xe^{x}+e^{x}\ln\left(e^{x}+1\right)=0$

3- دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f.

$$f'(x)=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)e^{x}=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)-\frac{1}{1+e^{-x}}=g(x)$$

aziz_musl@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)>0$ ومنه $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

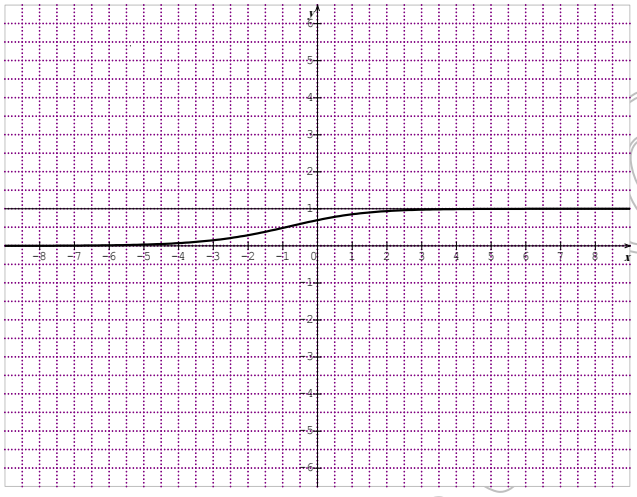
استنتاج مجموعة صور $\mathbb{R}$ بواسطة الدالة f.

الدالة f يعرف جذرا ونتحقق أيضا $\mathbb{R}$ ونجد أن $f(]-\infty;+\infty[)=]1;2[$

4- تبين أن المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في المجال $]1;2[$ و $\frac{1}{2}\in]1;2[$ إذن المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α.

5- رسم (C_f)



6- لمناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^x\ln(1+e^{-x})-m=0$.

$e^x\ln(1+e^{-x})-m=0$ كافئ $e^x\ln(1+e^{-x})=m$ أي $f(x)=m$

إذا كان $m\le 0$ أو $m\ge 1$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا.

إذا كان $0<m<1$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا.

تمرين ثامن عشر ☹

نعتبر f الدالة العددية المعرفة بـ:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}; & x\in]0;e[\cup]e;+\infty[\\ f(0)=-1 \end{cases}$$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها في f في المعلم المتعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ) تبين أن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$ (يكفي وضع $t=\ln x$ ثم أدرس نظرا لتغير الدالة f عند 0 أي أن.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ ثم فسر الرجح مبرهنا.

2) تبين أن $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-1$ ثم فسر الرجح مبرهنا.

aziz_mo@hotmail.fr

3) أ) تأكد أن أجمل عدد حقيقي x حيث، $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)^2}$.

ب) اظهر جدول تغيرات f وشكل جدول تغيراتها .

4) أكتب معادلة المماس (T) لمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند المطلوب ذات الفاصلة 1.

5) تأكد أن أجمل $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$ ، $f''(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$ ثم اظهر أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مطلوب اعطاف نقطة ذات الفاصلة .

6) أنجز $f(4)$ أنظر (T) و $(\mathcal{C}_f)$.

7) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-e;e\}$: $g(x)=f(|x|)$.

أ) تأكد أن الدالة g زوجية .

ب) شرح كيف تحصل على $(\mathcal{C}_g)$ انطلاقا من $(\mathcal{C}_f)$ ثم ارسم $(\mathcal{C}_g)$.

انجاز

نعتبر f الدالة العددية المعرفة بـ :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}; & x\in]0;e[\cup]e;+\infty[\\ f(0)=-1 \end{cases}$$

نعتبر $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أثبت أن $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-1$ ثم أدرس استمرار الدالة f عند 0 من اليمين .

نضع $t=\ln x$ إذا كان $x\xrightarrow{x>0}0$ فإن $t\to-\infty$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln x}{1-\ln x}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{1-t}=-1$$

تأكد أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=f(0)=-1$ فإن الدالة f يعرف جميع 0.

ب) حساب $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{\ln x}{1-\ln x}+1}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{1}{1-\ln x}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x-x\ln x}=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x-x\ln x)=0^+$

التفسير: الدالة f المنتظمة إلى الشمال عند 0 ويحدث أن $(0;-1)$ تقبل حلول حيث نراها ذات مظاهر عند المطلوب إحداثيا $(0;-1)$

2) أثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ تفسير نهائي حسابي .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1-\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{t}{1-t}=-1$$

التفسير: $(\mathcal{C}_f)$ تقبل مقاربة يمين $y=-1$ تجاه $+\infty$.

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

3) أثبت أنه أو ً م ه أخ م ك م عدد حق ٍق ً x ح ٍث ، $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)^2}$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x)+\frac{1}{x}\ln x}{(1-\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x+\ln x)}{(1-\ln x)^2}=\frac{1}{x(1-\ln x)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f

ي أج م ك م $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$ ك ٌ $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f ي ص ا ج ذ ً ا ع ه ً $[0;e[$ و $]e;+\infty[$

خ ل ت غ س ا خ ا ن ا ح f.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow -1$

4) كتب م ا ن ح ا ن م م اس (T) ن م ى ح ى ً $(\mathcal{C}_f)$ ع ى ن ى ا ق ط ح ذ ا خ ن ف ص ه ح 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ وي ُ ّ $y=1(x-1)$ أي $y=x-1$.

5) ت ٍ ه أو ً م ه أخ م $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$ ، $f''(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$ ث م ا ن ت ح أ ن ا م ح ى ً $(\mathcal{C}_f)$ ق ث م و ق ط ح

ا و ع ط ا ف ّ ط ه ة ت ع ٍ ي ا .

ت ر ك ٍ س: $\left(\dfrac{1}{f}\right)'=\dfrac{-f'}{f^2}$

ي أج م $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$ ن د ّ ا:

$$f''(x)=\frac{-\left[(1-\ln x)^2+2x\left(-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)\right]}{x^2(1-\ln x)^4}=\frac{-\left[(1-\ln x)^2-2(1-\ln x)\right]}{x^2(1-\ln x)^4}$$

$$f''(x)=\frac{-(1-\ln x)(1-\ln x-2)}{x^2(1-\ln x)^4}=\frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$$

ث ا ز ج $f''(x)$ ° ق ط ث ا ز ج $1+\ln x$ أ ل ٌ $x^2(1-\ln x)^3>0$ ي أج م ك م $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$

$f''(x)=0$ ذ ع ُ ـ $1+\ln x=0$ ل ك ا ف ئ $\ln x=-1$ أ $x=\dfrac{1}{e}$

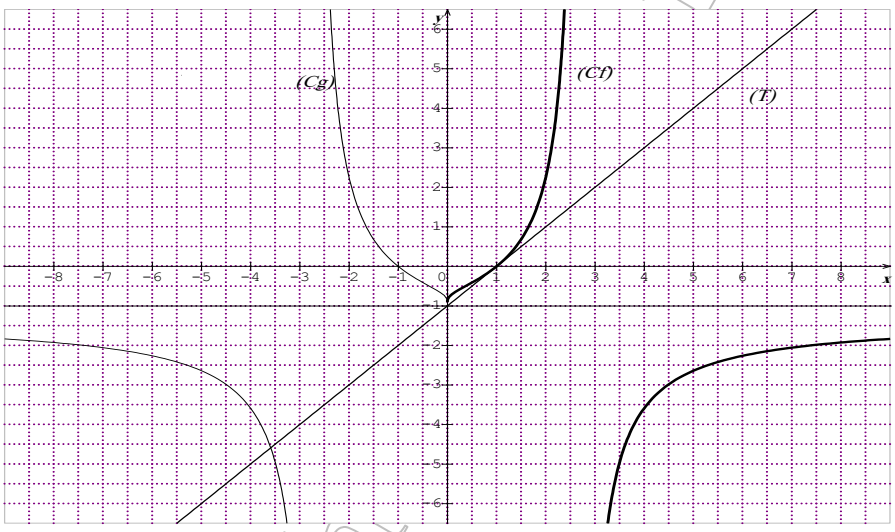
$f''(x)>0$ ذ ع ُ ـ $1+\ln x>0$ ل ك ا ف ئ $\ln x>-1$ أ $x>\dfrac{1}{e}$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

$f''(x)$ ذو عدد وحيد $\frac{1}{e}$ وتغير إشارتها عند هذا العدد، استنتج أن للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ نقطة انعطاف وحيدة $\left(\frac{1}{e};-\frac{1}{2}\right)$.

6) بين أن $f(4)$ هو العدد الموجب الوحيد الذي يحقق $f(x)=x$، ثم أنشئ (T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 4.



7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(|x|)=m$.

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-e;e\}$ بـ: $g(x)=f(|x|)$.

أ) بين أن g دالة زوجية.

D_g متناظرة بالنسبة إلى 0

$$g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$$

ب) اكتب عبارة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة، ثم ارسم $(\mathcal{C}_g)$ انطلاقا من $(\mathcal{C}_f)$.

$$\begin{cases} g(x)=f(x); x\in[0;e[\cup]e;+\infty[\\ g(x)=f(-x); x\in]-\infty;-e[\cup]-e;0] \end{cases}$$

بما أن $x\in[0;e[\cup]e;+\infty[$ فإن $(\mathcal{C}_g)$ يطابق $(\mathcal{C}_f)$ و g زوجية فإن $(\mathcal{C}_g)$ يقبل محور التراتيب محور تناظر.

تمرين 3:

1- g الدالة المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x+\ln x$.

أ- احسب نهاية الدالة g عند $+\infty$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g.

ج- بين أنه، من أجل كل x من المجال $[1;+\infty[$ فإن $g(x)\neq 0$

2- لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{6\ln x}{2x+\ln x}$

أ- بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$ من أجل $x\in[1;+\infty[$.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ماذا تستنتج؟

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

ج- ادرس اتجاه تغير الدالة f.

د- شكل جدول تغيرات الدالة f، ما هو قيم العدد الحقيقي k بحيث تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين.

هـ- جد معادلة المماس (Δ_1) للمنحنى (C_f) عند نقطته التي فاصلتها 1.

حيث (C_f) رمز إلى التمثيل البياني للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3- تعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=f(e^x)$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ- شكل جدول تغيرات الدالة h.

ب- جد معادلة المماس (Δ_2) للمنحنى (C_h) عند نقطته التي فاصلتها 1.

ج- ارسم كلا من (Δ_1)، (Δ_2)، (C_f) و (C_h).

انجح:

1- g دالة معرفة على المجال $[1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x+\ln x$.

أ- حساب نهاية الدالة g عند مأول x إلى $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x+\ln x=+\infty$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g.

الدالة g تقبل الاشتقاق على $[1;+\infty[$ ولدينا $g'(x)=2+\frac{1}{x}$

من أجل كل x من المجال $[1;+\infty[$، $g'(x)>0$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $[1;+\infty[$.

ج- تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$ فإن $g(x)\neq 0$

من أجل $x>1$ لدينا $g(x)>g(1)$ أي $g(x)>2$ ومنه $g(x)\neq 0$

2- لتكن f دالة معرفة على المجال $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{6\ln x}{2x+\ln x}$

أ- تبين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$ من أجل $x\in[1;+\infty[$.

$$f(x)=\frac{6\ln x}{2x+\ln x}=\frac{x\left(\frac{6\ln x}{x}\right)}{x\left(2+\frac{\ln x}{x}\right)}=\frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$$

ب- حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{\ln x}{x}=2$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}=0$

ج- دراسة اتجاه تغير الدالة f.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $[1;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{\frac{6}{x}(2x+\ln x)-\left(2+\frac{1}{x}\right)6\ln x}{(2x+\ln x)^2}=\frac{12+\frac{6\ln x}{x}-12\ln x-\frac{6\ln x}{x}}{(2x+\ln x)^2}=\frac{12(1-\ln x)}{(2x+\ln x)^2}$$

aziz_musl@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi

$f'(x)=0$ معناه $1-\ln x=0$ أي $\ln x=1$ أي $x=e$

$f'(x)>0$ معناه $1-\ln x>0$ أي $\ln x<1$ أي $1<x<e$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[1;e]$ ومتناقصة تماما على $[e;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{6}{2e+1}$	↘	0

تعيين قيم العدد الحقيقي k بحيث المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا.

المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا من أجل قيم k من المجال $\left]0;\frac{6}{2e+1}\right[$.

هـ- أكتب معادلة المماس (Δ_1) لـ (C_f) عند نقطة تقاطعها مع حامل محور الفواصل.

$(\Delta_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $y=3(x-1)$ أي $(\Delta_1): y=3x-3$

3- نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=f\left(e^x\right)$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ- شكل جدول تغيرات الدالة h.

نلاحظ أن الدالة h هي مركب الدالة الأسية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالدالة f ($h=f\circ\exp$)

لدينا الدالة الأسية $\exp$ متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[e;+\infty[$ والدالة f متناقصة تماما على المجال $[e;+\infty[$ ذن تتركب هما تتناقص الدالة h على المجال $[1;+\infty[$ أي الدالة h متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

لدينا $h(1)=f\left(e^1\right)=f(e)=\frac{6}{2e+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(e^x\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$

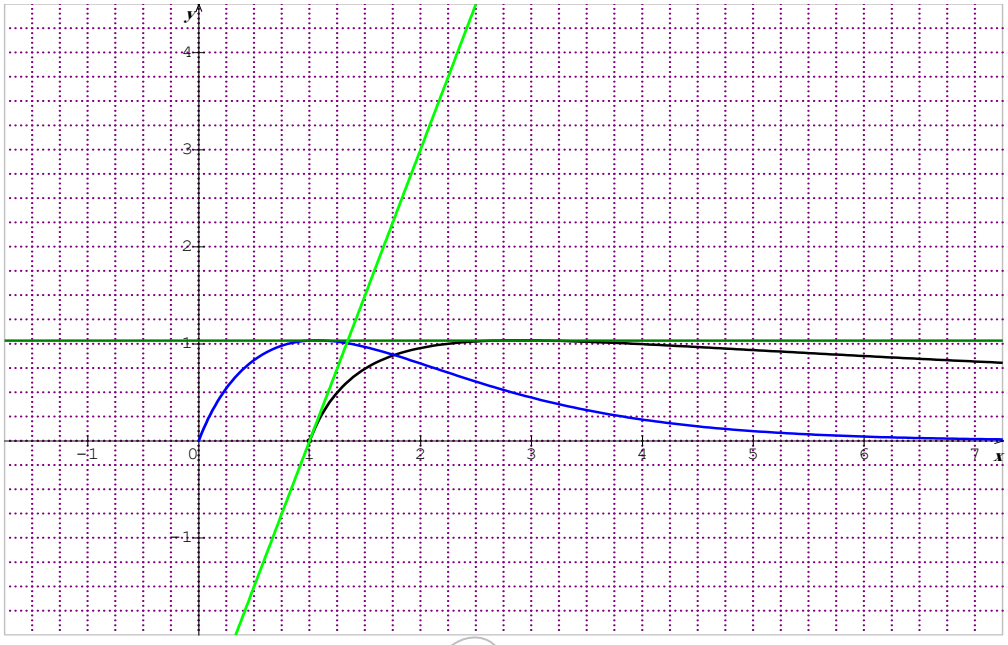
x	1		$+\infty$
$h(x)$	$\frac{6}{2e+1}$	↘	0

ب- جد معادلة المماس (Δ_2) لـ (C_h) عند نقطة تقاطعها مع حامل محور التراتيب.

$(\Delta_2): y=h'(1)(x-1)+h(1)$ أي $y=\frac{6}{2e+1}$ أي $(\Delta_2): y=\frac{6}{2e+1}$

ج- ارسم كلا من (Δ_1)، (Δ_2)، (C_f) و (C_h).

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefa A/Elazi



aziz_mus1@ho

Mostefa
A/Elazi