مجلة

Top Maths

bouchenak Youssouf

نشر يوم 2022/10/27

الدوال في الأسية

Exponential Function

Bac 2022

3s M TM

حلول جميع تمارين البكالوريا من 2008 الى 2021

جميع الشعب العلمية



إعداد الأستاذ بوشناق يوسف

نشر يوم 2022/10/27

07.76.6

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

أقدم لاخواني الأساتذة و ابنائي الطلبة هذا العمل والمتمثل في
مجلة Top Maths في الدوال الأسّية
المجلة شاملة للمراجعة لجميع الشعب العلمية
علوم تجريبية ❖ رياضيات ❖ تقني رياضي

إهداء

إلى من أفضلها على نفسي ولم لا فلقد ضحت من أجلي، ولم تدخر جهداً في سبيل إسعادي
على الدوام أمي الحبيبة والى والدي العزيز و جدتي رحمها الله
عائلتي الصغيرة زوجتي ابني عبد الله
وكل من أعرفه

شكر

شكر خاص للأستاذين بلقاسم عبد الرزاق خالد بخاخشة



إعداد الأستاذ بوشناق يوسف

رَبِّ قَدْ آتَيْتَنِي مِنَ الْمُلْكِ وَعَلَّمْتَنِي مِن تَأْوِيلِ الْأَحَادِيثِ ۚ فَاطِرَ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ أَنتَ
وَلِيِّي فِي الدُّنْيَا وَالْآخِرَةِ ۖ تَوَفَّنِي مُسْلِمًا وَأَلْحِقْنِي بِالصَّالِحِينَ

Top Maths
bouchenak Youssouf نشر يوم 2022/10/27

❑تجدون في هذا الملف

❶ملخص درس

❷ درس مفصل

❸ حلول تمارين نموذجية

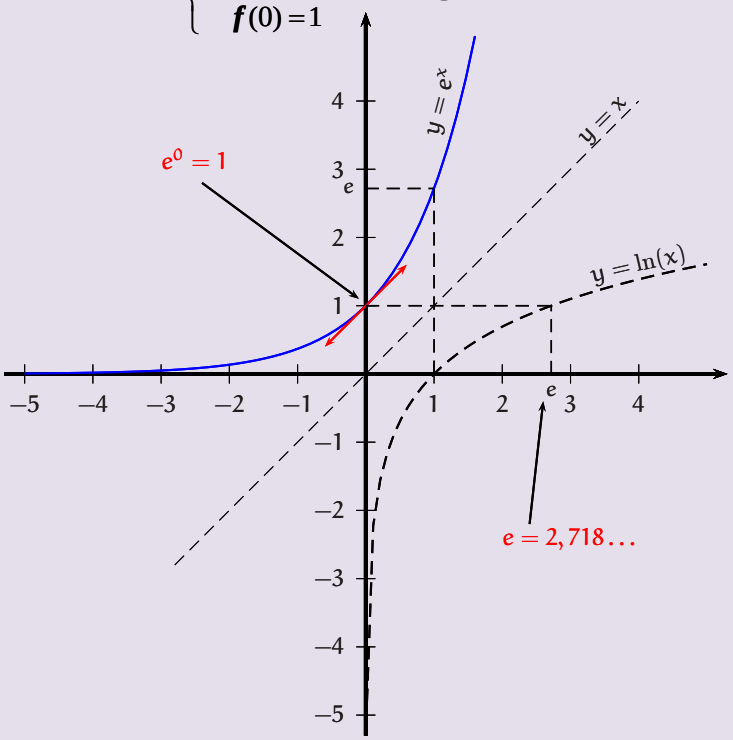
❹ حل تمارين بكالوريا سابقة جميع الشعب ع.ت ريا ت.ريا

تجدون صفحة TopMaths على المنصات التالية

بوشناف يوسف Tlemcen Num 07.76.60.80.58

الدالة الأسية النيبيرية

توجد دالة وحيدة f معرفة مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تحقق $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$



خواص الدالة الأسية

من أجل كل عدد حقيقي x

$(\exp)'(x) = \exp(x).$

الدالة الأسية مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$e^x > 0.$

النهايات عند حدود مجموعة التعريف

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$

التزايد المقارن

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0.$

العدد المشتق عند 0 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

الخواص الجبرية

من أجل كل عددين حقيقيين x و y $\quad e^x \times e^y = e^{x+y}. \quad e^x \neq 0 \quad \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}.$

من أجل كل عدد طبيعي n $\quad \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}. \quad e^{nx} = (e^x)^n$

العلاقة بين الأسية واللوغاريتمية

من أجل كل عدد حقيقي x $\quad \ln(e^x) = x$, من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0,+\infty[$ $\quad e^{\ln(x)} = x.$

من أجل $a > 0$ المعادلة $e^x = a$ تقبل حلا وحيدا. من أجل $a \leq 0$ المعادلة $e^x = a$ لا تقبل حلول

من أجل كل عدد حقيقي x من أجل $a > 0$ $\quad e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$ $\quad e^x < a \Leftrightarrow x < \ln(a)$

من أجل كل عددين حقيقيين x و y $\quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \quad e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

الدوال الأسّية

نشاط:

مقدمة:

تتم نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية و البيولوجية والاقتصادية و غيرها باستخدام دالة f متناسبة مع دالتها المشتقة f'. سوف نهتم هنا بدالة من هذا النوع و هي دالة تساوي دالتها المشتقة.

نقبل أنه توجد دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرطين التاليين: $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

الجزء الاول

1) اثبت ان $f(x_0+h) \approx f(x_0)(1+h)$ و $f(x_0-h) \approx f(x_0)(1-h)$

2) باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h = 0,5$ أنجز جدولا يتضمن القيم التقريبية لـ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[-2;2]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f .

الجزء الثاني

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = f(x) \times f(-x)$

- بين أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$. استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) \times f(-x) = 1$ (3)
- برهن بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) \neq 0$ (4)

الجزء الثالث

ليكن y عدد حقيقي كيفي ثابت. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \dfrac{f(x+y)}{f(x)}$

- بين أن g دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.
- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ (5)

حل النشاط :

الجزء الاول

نذكر أن $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$ وبما أن $f' = f$ فإن $f(x_0+h) \approx f(x_0)(1+h)$

لدينا كذلك $f(x_0-h) \approx f(x_0) - hf'(x_0)$ وبما أن $f' = f$ فإن $f(x_0-h) \approx f(x_0)(1-h)$

الجدول:

$$\begin{cases} f(0,5) \approx f(0+0,5) \approx 1,5 \times f(0) \approx 1,5 \\ f(1) \approx f(0,5+0,5) \approx 1,5 \times f(0,5) \approx 2,25 \\ .. \\ .. \\ .. \end{cases}$$

حساب الصور لدينا

$$\begin{cases} f(-0,5) \approx f(0-0,5) \approx (1-0,5) \times f(0) \approx 0,5 \\ f(-1) \approx f(-0,5-0,5) \approx (1-0,5) \times f(-0,5) \approx 0,25 \\ .. \\ .. \end{cases}$$

الجدول

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$	$0,0625$	$0,125$	$0,25$	$0,5$	1	$1,5$	$2,25$	$3,37$	$5,06$

الجزء الثاني

h معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = f(x) \times f(-x)$

لدينا $\left[f(ax+b)\right]' = af'(ax+b)$ ومنه $\left[f(-x)\right]' = -f'(-x)$

ولدينا $f'(x) = f(x)$ ومنه $f'(-x) = f(-x)$ إذن $\left[f(-x)\right]' = -f'(-x) = -f(-x)$

$h'(x) = f'(x) f(-x) + f(x)\left[f(-x)\right]' = f(x) f(-x) - f(x) f(-x) = 0$ ومنه h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

لدينا من أجل كل عددين حقيقيين x و x'، $h(x) = h(x')$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x) = h(0)$

أي $f(x) f(-x) = 1$

- لنفترض أن $f(x) = 0$ وهذا معناه أن $f(x) f(-x) = 0$ وهذا يناقض (3) إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x) \neq 0$

الجزء الثالث

ليكن y عدد حقيقي كيفي ثابت. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \dfrac{f(x+y)}{f(x)}$

- لدينا $\dfrac{d\left[f(x+y)\right]}{dx} = f'(x+y)$ ومنه

$g'(x) = \dfrac{f'(x+y) f(x) - f(x+y) f'(x)}{f^2(x)} = \dfrac{f(x+y) f(x) - f(x+y) f(x)}{f^2(x)} = 0$ إذن g دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

لدينا $g(0) = \dfrac{f(y)}{f(0)} = f(y)$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x) = g(0)$ (g دالة ثابتة) إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$g(x) = f(y)$.

- لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $g(x) = f(y)$ معناه $\dfrac{f(x+y)}{f(x)} = f(y)$ أي

$f(x+y) = f(x) \times f(y)$

الدالة الأسية (النيبيرية)

2) تعريف:

توجد دالة وحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$ تسمى **الدالة الأسية (النيبيرية)**

ونرمز إليها بالرمز "exp". من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=\exp(x)$

كتابة باستعمال الترميز السابق كل النتائج

من أجل كل x و y من $\mathbb{R}$ ،

$(1)\ \exp'(x)=\exp(x)$ $(2)\ \exp 0=1$ $(3)\ \exp(x)\times\exp(-x)=1$ $(4)\ \exp(x)\neq 0$

$(5)\ \exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $(6)\ \exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل n من $\mathbb{Z}$ ، $(7)\ \exp(nx)=\left[\exp(x)\right]^n$

نقبل أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $(8)\ \exp(xy)=\left[\exp(x)\right]^y$.

ملاحظة : $\exp(x)=\exp\left(2\dfrac{x}{2}\right)=\left[\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\exp(x)\geq 0$

وبما أن $\exp(x)\neq 0$ فإن $\exp(x)>0$

الترميز e :

الرمز e هو العدد الحقيقي الذي يحقق $\exp(1)=e$ ، وقيمته التقريبية بالآلة الحاسبة هي $e\approx 2{,}718281828459$.

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\exp(1\times x)=\left[\exp(1)\right]^x=e^x$.

وبالتالي : الدالة الأسية exp معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $\exp(x)=e^x$.

ملخص

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ ،

$$e^x>0 \qquad \exp'(x)=e^x$$

$$e^0=1 \qquad e^{x+y}=e^xe^y \qquad e^{-x}=\frac{1}{e^x}$$

$$e^xe^{-x}=1 \qquad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y} \qquad \left(e^x\right)^n=e^{nx}$$

3) دراسة الدالة exp :

الدالة exp تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $\exp'(x)=e^x$ ومنه $\exp'(x)>0$
إذن exp دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

نتائج:

- من أجل كل عددين حقيقيين a و b ، $a>b$ معناه $e^a>e^b$.
- من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $x>0$ معناه $e^x>1$ و $x<0$ معناه $e^x<1$.
- لدينا $\exp'(0)=e^0=1$ هذا من جهة ؛ ومن جهة أخرى $\exp'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$ إذن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

ملاحظة:

إذا كان $x=y$ فإن $e^{x-y}=1$ ومنه $e^x=e^y$ ؛ إذا كان $e^x=e^y$ فإن $e^{x-y}=1$ وبما أن الدالة exp مستمرة (تقبل الاشتقاق) ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، فإن $x-y=0$ ومنه $x=y$ ؛ خلاصة : $e^x=e^y$ معناه $x=y$

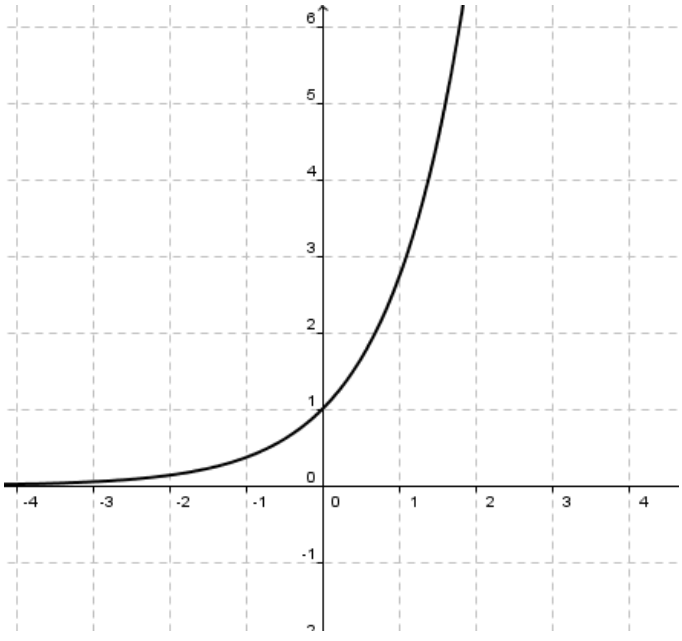
النهايات:

نعتبر الدالة $f:x\mapsto e^x-x$ المعرفة على $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=e^x-1$ ، إذا كان $x>0$ فإن $e^x>1$ ومنه $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، وبالتالي إذا كان $x>0$ فإن $f(x)>f(0)$ أي $e^x-x>1$ ؛ إذن من أجل كل $x>0$ ،
$e^x>x+1$ بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.
لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{-x}}=0$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		$+$	
$\exp(x)$	0	↗	1	↗	$+\infty$

التمثيل البياني:



مشتق الدوال $x \mapsto e^{u(x)}$:

ـ إذا كان الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f : x \mapsto e^{u(x)}$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا من أجل كل $x \in I$:
$f'(x) = \exp'(u(x)) \times u'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

الاثبات

نعتبر الدالة v المعرفة ب $v : x \mapsto e^x$ لدينا $f(x) = v \circ u(x) = e^{u(x)}$ نعلم أن $(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))$
ومنه لدينا من أجل كل $x \in I$: $f'(x) = \exp'(u(x)) \times u'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

مبرهنة:

k عدد حقيقي غير معدوم.

الدوال بحيث $f' = kf$ هي الدوال $f : x \mapsto Ce^{kx}$ مع C ثابت حقيقي.

مثال :

الدوال التي تحقق $f' = -3f$ هي : $f : x \mapsto Ce^{-3x}$ مع C ثابت حقيقي.

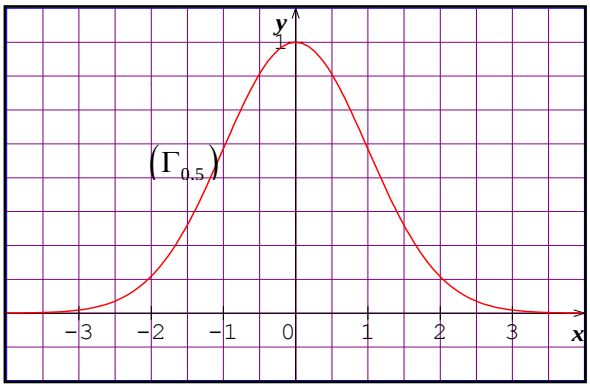
نتيجة:

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تحقق $f' = kf$ و $f(0) = 1$ وهي $f : x \mapsto e^{kx}$.

الدوال $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ حيث $\lambda > 0$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما λ ، نعتبر الدوال g_λ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $g_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$
نرمز بـ (Γ_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال g_λ في معلم متعامد و متجانس $(O ; I , J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة g_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجتين.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال g_λ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1)، (Γ_2) و (Γ_3).
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (Γ_λ) و $(\Gamma_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0 < \lambda < \lambda'$.



ملاحظة:

تسمى المنحنيات (Γ_λ) بمنحنيات غوص (Gauss)
ويتم استعمالها في الاحتمالات و الإحصاء

و لعل أكثرها استعمالا هو المنحني $(\Gamma_{0,5})$ ذو المعادلة $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$
والذي يأخذ شكلا ناقوسيا.

حل:

1. حساب نهايتي الدالة g_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجتين.

بما أن $\lambda > 0$ فإن $\lim_{x \to -\infty} -\lambda x^2 = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} -\lambda x^2 = -\infty$ إذن $\lim_{x \to -\infty} g_\lambda(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} g_\lambda(x) = 0$.
التفسير البياني: (Γ_λ) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) بجوار $(-\infty)$ و بجوار $(+\infty)$.

2. دراسة اتج

إذا كان $x<0$ فإن $g_\lambda'(x)>0$ ومنه الدالة g_λ متزايدة تماما على $]-\infty;0]$.

إذا كان $x>0$ فإن $g_\lambda'(x)<0$ ومنه الدالة g_λ متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

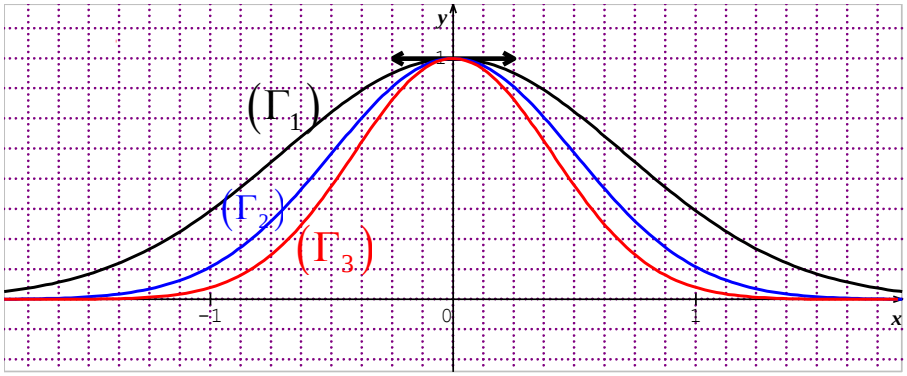
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g_\lambda'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_\lambda(x)$	0	↗	1	↘	0

3. تبيان أن كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

ليكن x_0 و y_0 عددين حقيقيين ثابتين حيث من أجل كل $\lambda>0$: $e^{-\lambda x_0^2}=y_0$ لدينا $\frac{de^{-\lambda x_0^2}}{d\lambda}=0$ هذا من جهة؛

ومن جهة أخرى $\frac{de^{-\lambda x_0^2}}{d\lambda}=-x_0^2e^{-\lambda x_0^2}$ إذن $x_0=0$ ومنه $y_0=e^{-\lambda\times 0^2}=1$.

4. رسم في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1)، (Γ_2) و (Γ_3). (تحرك المنحنيات باستعمال Geoplan رقم الملف 24)



5. دراسة الأوضاع النسبية للمنحنيين (Γ_λ) و $(\Gamma_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0<\lambda<\lambda'$.

$0<\lambda<\lambda'$ معناه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-\lambda x^2>-\lambda' x^2$ ومعناه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $e^{-\lambda x^2}>e^{-\lambda' x^2}$.

ومنه إذا كان $0<\lambda<\lambda'$ فإنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، المنحنى (Γ_λ) يقع فوق المنحنى $(\Gamma_{\lambda'})$ ويتقاطعان في النقطة $A(0;1)$.

التزايد المقارن

نشاط:

نعتبر الدالتين $f : x \mapsto e^x - \frac{1}{2}x^2$ و $g : x \mapsto e^x - x$ المعرفة على $[0;+\infty[$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g . أحسب $g(0)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $[0;+\infty[$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f . استنتج أنه من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ ، $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}x$

3) عين $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$ واستنتج $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$.

حل النشاط:

1) لدينا $g'(x) = e^x - 1$ ، من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ ، $e^x > 1$ أي $g'(x) > 0$ ومنه g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

$g(0) = 1$ ؛ من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ ، $g(x) > g(0)$ أي $g(x) > 1$ ومنه g موجبة تماما على $[0;+\infty[$.

2) لدينا $f'(x) = e^x - x = g(x)$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ ، $f(x) > f(0)$ أي $f(x) > 1$ ومنه من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ ، $\frac{f(x)}{x} > 0$

أي $\frac{e^x}{x} - \frac{1}{2}x > 0$ ومعناه $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}x$.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. نستنتج أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ ومنه $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{-x}{e^{-x}} = 0$.

خواص:

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ و (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

تمارين مقترحة من طرف الأستاذ
عبد الرزاق بلقاسم

المسألة 01

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$.

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$، ثمّ بيّن أن المستقيم الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x تكون: $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$.

ب) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$، و أن المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

3) حدّد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المقاربين.

4) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f، و شكّل جدول تغيّراتها.

5) أنشئ المنحنى (C) و المستقيمات المقاربة.

6) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $(1-m)(e^x+1)-2e^x=0$.

حل مختصر للمسألة رقم 01

سلطان) لدينا: $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$.

1) حساب النهاية: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$، لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-\dfrac{2e^x}{e^x+1})=0\end{cases}$.

سلطان) بما أن: $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ و، $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\dfrac{2e^x}{e^x+1})=0$.

إذن المستقيم ذو المعادلة: $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

2) أ) التحقق أن: $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$.

لدينا: $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$، إذن يمكن كتابة: $f(x)=x-1+2-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$، أي:

$f(x)=x-1+\dfrac{2e^x+2-2e^x}{e^x+1}$، ومنه: $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$، وهو المطلوب.

ب) حساب النهاية عند $+\infty$ (نستعمل العبارة الثانية).

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$، لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim(\dfrac{2}{x})=0\end{cases}$.

سلطان) بما أن : $f(x)=x-1+\frac{2}{e^x+1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{e^x+1})=0$.

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

3) تحديد الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمقاربين :

سلطان) ندرس إشارة : $f(x)-(x+1)=-\frac{2e^x}{e^x+1}$ ، نلاحظ أن : $-\frac{2e^x}{e^x+1}<0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن : المنحنى (C) يقع تحت المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$.

سلطان) ندرس إشارة : $f(x)-(x-1)=\frac{2}{e^x+1}$ ، نلاحظ أن : $\frac{2}{e^x+1}>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن : المنحنى (C) يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$.

4) دراسة إتجاه تغير الدالة f : (نختار الشكل $f(x)=x-1+\frac{2}{e^x+1}$).

*) الدالة المشتقة : $f'(x)=1+\frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{(e^x+1)^2}$ ،

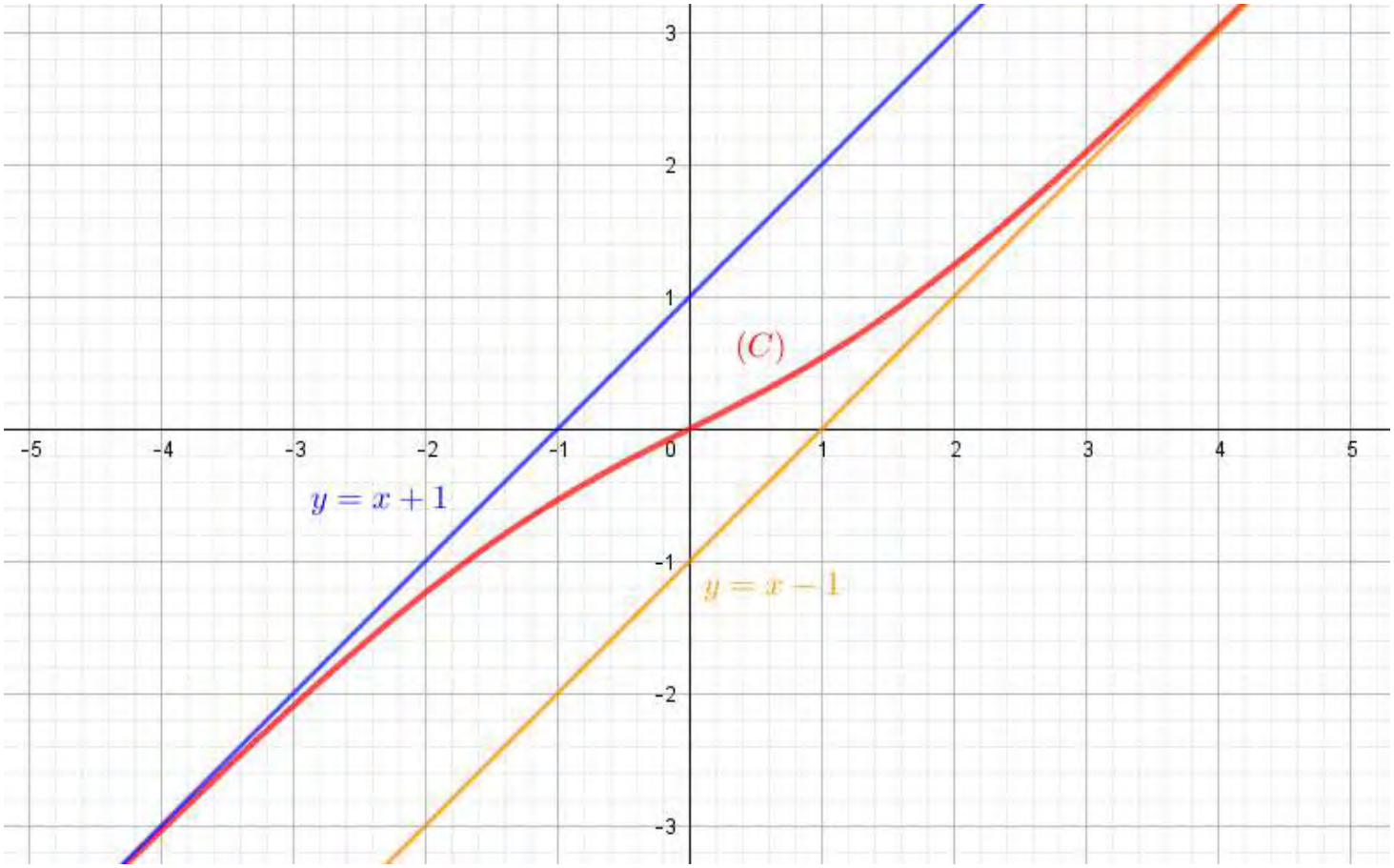
ومنه : $f'(x)=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$ ، نلاحظ أن : $f'(x)>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن : الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

*) جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

5) الإنشـــــــ



6) المناقشة البيانية :

لدينا : $(1-m)(e^x+1)-2e^x=0$ ، أي : $(1-m)(e^x+1)=2e^x$ ، أي : $\frac{2e^x}{e^x+1}=1-m$ ، أي :

$-\frac{2e^x}{e^x+1}=m-1$ ، (بإضافة $x+1$) : $x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}=x+m$ ، ومنه : $f(x)=x+m$.

إذن : عدد حلول المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$ والذي يوازي المقاربين للمنحنى (C) هما : $y=x+1$ و $y=x-1$.

أي أن المناقشة البيانية تكون كما يلي :

*) لما : $m\in]-\infty;-1[$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

*) لما : $m\in[1;+\infty[$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

*) لما : $m\in]-1;1[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد .

المسألة 02

نعتبر الدالتان f_0 و f_1 المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_0(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ و $f_1(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.

وليكن (C_0) و (C_1) منحناهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) 1) أحسب نهاية f_0 عند $-\infty$ و $+\infty$، ثمّ استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني (C_0).

2) بيّن أنّ النقطة $K(0;\dfrac{1}{2})$ هي مركز التناظر للمنحني (C_0).

3) أدرس تغيّرات الدالة f_0.

4) عيّن معادلة المماس (T) للمنحني (C_0) عند النقطة K.

5) أ) بيّن أنه لدراسة وضعية (T) بالنسبة إلى (C_0) يكفي دراسة إشارة العبارة: $g(x)=2e^x-xe^x-2-x$

ب) أحسب كلا من $g'(x)$ و $g''(x)$، ثمّ عيّن مع التبرير إشارة $g''(x)$، $g'(x)$، $g(x)$، وذلك حسب قيم x.

ج) إستنتج وضعية المنحني (C_0) بالنسبة إلى المماس (T).

د) أنشئ المماس (T) و المنحني (C_0).

II) 1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x تكون النقطتان: $M(x;f_0(x))$ و $M'(x;f_1(x))$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}$.

3) شكّل جدول تغيّرات الدالة f_1، ثمّ أنشئ المنحني (C_1) في نفس المعلم السابق.

حل مختصر للمسألة رقم 02

I) 1) حساب نهايات الدالة f_0:

*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=0$ .... $\begin{cases}0\\1\end{cases}$ المنحني (C_0) يقبل حامل محور الفواصل كمقارب بجوار $-\infty$.

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{e^x}+1}=1$ المنحني (C_0) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته: $y=1$، بجوار $+\infty$.

2) لدينا النقطة $K(0;\dfrac{1}{2})$.

*) أولا: D_{f_0} متناظرة بالنسبة إلى 0.

*) ثانيا : نبيّن أن : $f_0(2a-x)+f_0(x)=2b$ ، مع : $\begin{cases} a=0 \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ، أي : $f_0(-x)+f_0(x)=1$.

*) لنحسب : $f_0(-x)+f_0(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ ، أي : $f_0(-x)+f_0(x)=\dfrac{e^{-x}\times e^{x}}{(1+e^{-x})e^{x}}+\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ ،

أي : $f_0(-x)+f_0(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}+\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ ، أي : $f_0(-x)+f_0(x)=\dfrac{1+e^{x}}{1+e^{x}}=1$.

إذن : النقطة K هي مركز التناظر للمنحنى (C_0) .

3) دراسة تغيّرات الدالة f_0 :

*) حساب $f_0'(x)$: $f_0'(x)=\dfrac{e^{x}(e^{x}+1)-e^{2x}}{(e^{x}+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+e^{x}-e^{2x}}{(1+e^{x})^2}=\dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}$.

نلاحظ أن : $f_0'(x)>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، إذن : الدالة f_0 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

*) جدول التغيّرات :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_0'(x)$	$+$
$f_0(x)$	0 ↗ 1

4) كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة K :

$(T): y=f_0(0)(x-0)+f_0(0)$ ، ومنه : $(T): y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$ ، لأن : $\begin{cases} f_0'(0)=\dfrac{1}{4} \\ f_0(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

5) أ) دراسة وضعية (C_0) بالنسبة إلى (T) : ندرس إشارة الفرق $f(x)-(\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2})$

أي : $f(x)-(\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2})=\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}-\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{4e^{x}-x-xe^{x}-2-2e^{x}}{4(e^{x}+1)}$ ،

ومنه : $f(x)-(\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2})=\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}-\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{2e^{x}-xe^{x}-x-2}{4(e^{x}+1)}$

$f(x)-(\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2})=\dfrac{g(x)}{4(1+e^{x})}$

*) لدينا : $4(1+e^x)>0$ ، إذن : لدراسة إشارة الفرق يكفي دراسة إشارة $g(x)$.

ب) حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

*) $g'(x)=2e^x-(e^x+xe^x)-1=2e^x-e^x-xe^x-1$ ، ومنه : $g'(x)=e^x-xe^x-1$.

*) $g''(x)=e^x-(e^x+xe^x)=e^x-e^x-xe^x$ ، ومنه : $g''(x)=-xe^x$.

ـ إذن إشارة $g''(x)$ من إشارة $-x$.

*) إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$-$	

$g''(0)=0$

*) إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+$			$-$	

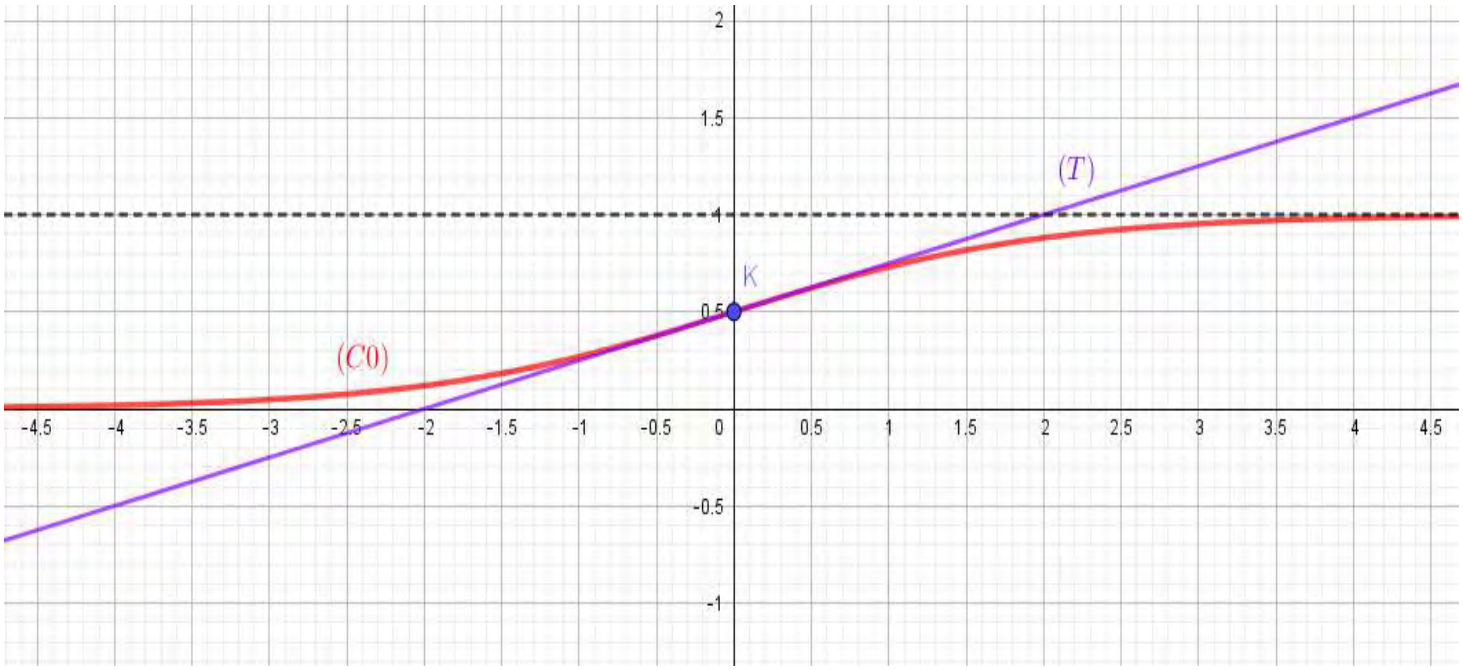
$g'(0)=0$

ج) إشارة : $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$-$	
الوضعية		(C_0) يخترق (T) عند النقطة K		(C_0) يقع تحت (T)	(C_0) يقع فوق (T)

*) إستنتاج : النقطة K تعتبر نقطة إنعطاف للمنحنى (C_0) .

د) الإنشـــــــــاء :



II) 1) تكون النقطتان : $M(x;f_0(x))$ و $M'(x;f_1(x))$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}$ ،

إذا كان : $\frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}=\frac{1}{2}$.

*) نحسب : $\frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}=\frac{\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{1}{e^x+1}}{2}=\frac{\frac{e^x+1}{e^x+1}}{2}=\frac{1}{2}$.

و منه : M و M' متناظرتان بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة : $y=\frac{1}{2}$.

أي أنّ : (C_0) و (C_1) متناظران بالنسبة لهذا المستقيم .

2) تشكيل جدول تغيّرات الدالة f_1 :

بما أنّ (C_0) و (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم $y=\frac{1}{2}$ فإنّ : $\frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}=\frac{1}{2}$ ،

إذن : $\frac{f_0+f_1}{2}=\frac{1}{2}$ ، أي : $f_0+f_1=1$ ، و منه : $f_1=1-f_0$.

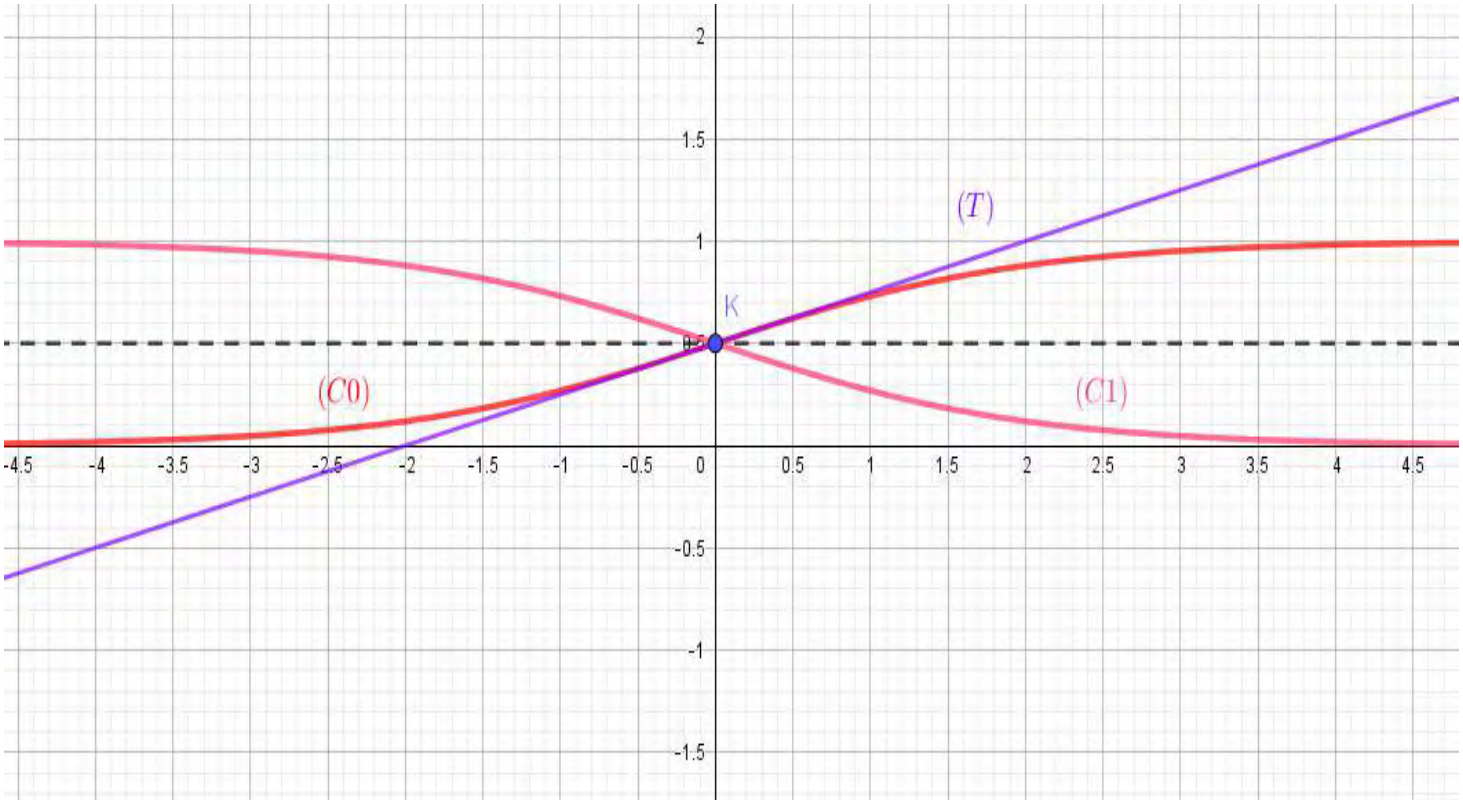
و عليه فإنّ : إتجاه تغيّر الدالة f_1 هو عكس إتجاه تغيّر الدالة f_0 .

*) جدول التغيّرات :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f_1'	

$f_1(x)$	1 ↘ 0

*) الإنشـــــــاء :



المسألة 03

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=e^x-x-1$.

1) أحسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ، و شكّل جدول تغيّراتها .

3) أحسب $g(0)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$.

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ، ثمّ فسّر النتائج هندسيا .

2) أحسب $f'(x)$ ، ثمّ أدرس إتجاه تغيّر الدالة الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ) عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) .

4) انشئ المماس (T) ، و المستقيمات المقاربة ، و المنحنى (C) .

5) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا و حسب قيم m حلول المعادلة: $f(x)=mx$.

حل مختصر للمسألة رقم 03

I) لدينا: $g(x)=e^x-x-1$.

1) حساب النهايات:

*) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x-1)=+\infty$ ، لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty\end{cases}$.

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{e^x}{x}-1-\dfrac{1}{x})=+\infty$ ، لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{e^x}{x})=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{x})=0\end{cases}$.

2) دراسة تغيرات الدالة g ، و تشكيل جدول تغيّراتها:

*) الدالة المشتقة: $g'(x)=e^x-1$.

ـ تكون $g'(x)\geq 0$ ، أي: $e^x-1\geq 0$ ، أي: $e^x\geq 1$ ، إذا كان: $x\geq 0$.

ـ تكون $g'(x)\leq 0$ ، أي: $e^x-1\leq 0$ ، أي: $e^x\leq 1$ ، أذا كان: $x\leq 0$.

إذن الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ ، و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

*) جدول التغ

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) نحسب : $g(0)=0$ ، و عليه نستنتج و نلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

II) لدينا : $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$:

1) حساب النهايات :

*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x}-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-1}=-1$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$.

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x}-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-1}=0$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

*) التفسير الهندسي :

- بجوار $-\infty$ المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $y=-1$.
- بجوار $+\infty$ المنحني (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

2) سلطان) حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(e^x-x)-(e^x-1)\times x}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x-x-xe^x+x}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x-xe^x}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$$.

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-x)$ ، أي :

تكون : $f'(x)\geq 0$ إذا كان : $x\leq 1$ و تكون : $f'(x)\leq 0$ ، إذا كان : $x\geq 1$.

*) و عليه : الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

*) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$f(1)$	↘	0

$f(1)=\dfrac{1}{e-1}\approx 0,58$.

3) أ) معادلة المماس (T) :

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، ومنه : $(T): y=x$ ، لأن : $\begin{cases} f'(0)=1 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

ب) الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة إلى (T) : أي ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$:

$$f(x)-x=\frac{x}{e^x-x}-x=\frac{x-xe^x+x^2}{e^x-x}=\frac{x(1-e^x+x)}{e^x-x}=\frac{-x(e^x-x-1)}{e^x-x}=\frac{-x\times g(x)}{e^x-x}$$

.

*) لدينا من الجزء الأول : $g(x)\geq 0$ ، أي : $e^x-x-1\geq 0$ ، أي : $e^x-x\geq 1$ ، ومنه : $e^x-x\geq 0$.

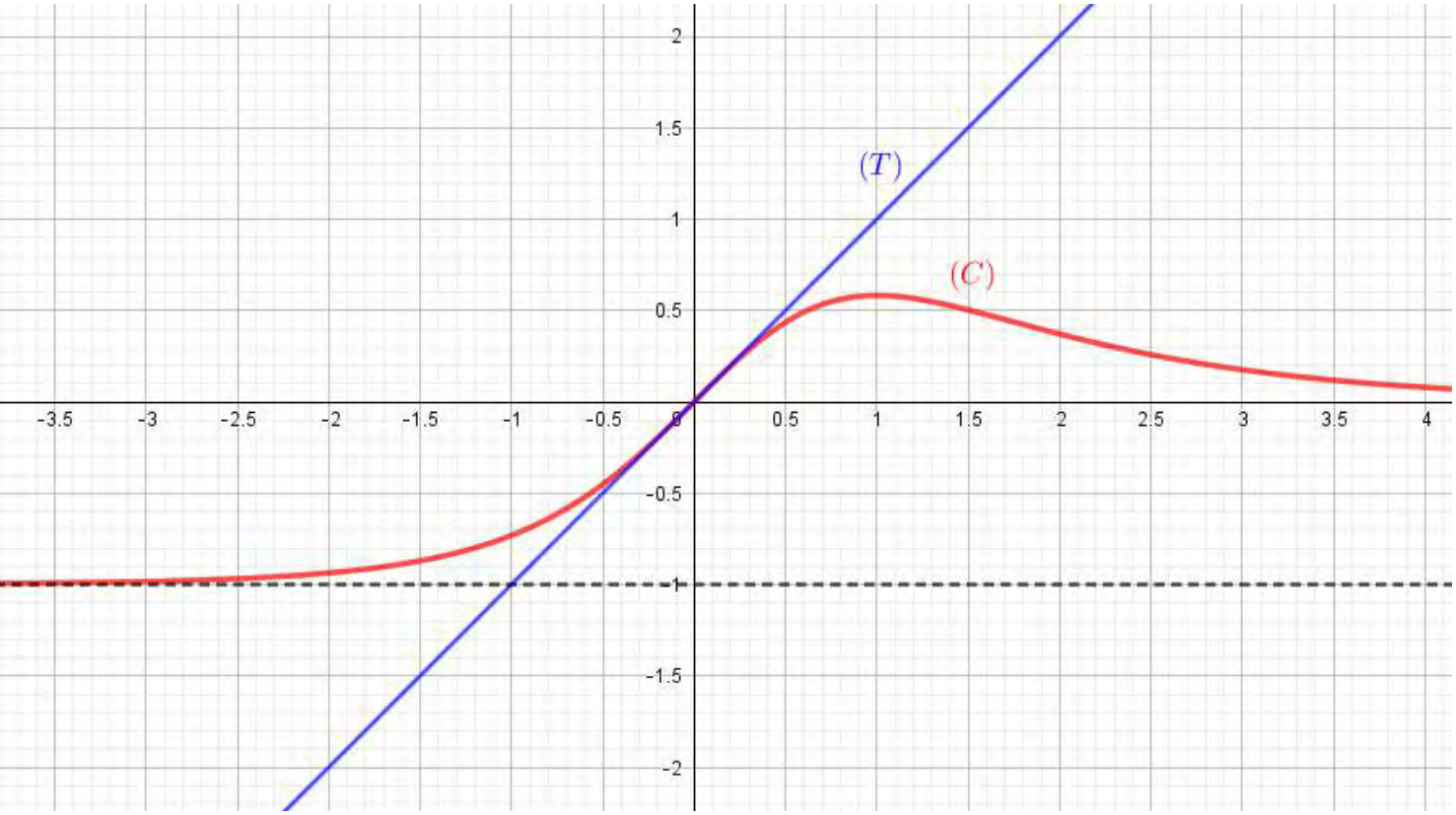
إذن : إشارة $(f(x)-x)$ من إشارة $(-x\times g(x))$ ، وبما أن : $g(x)\geq 0$ ، فالإشارة من إشارة $(-x)$.

*) نلخص الوضعية في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
الوضعية	(C)		(C) يخترق (T) في النقطة O		(C) يقع تحت (T) / يقع فوق (T)

ملاحظة : المبدأ O يعتبر نقطة إنعطاف للمنحنى (C) .

4) الإنشـــــــ



5) المناقشة البيانية :

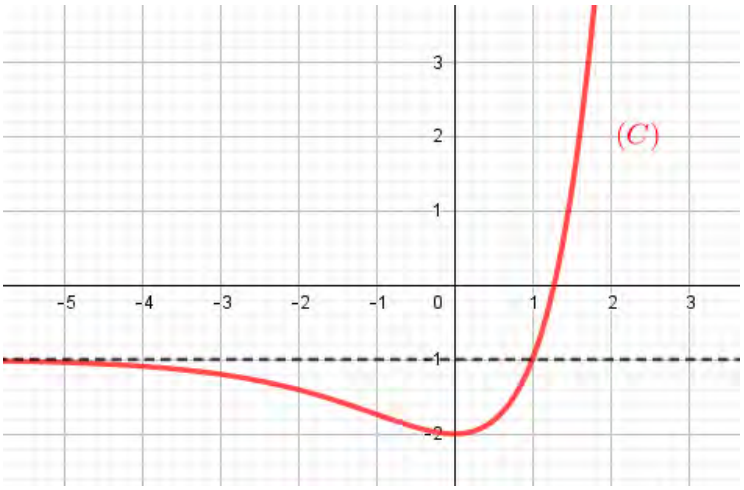
لدينا : $f(x) = mx$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ هذا الأخير يمرّ بالمبدأ O ، (مناقشة دورانية) .

*) إذا كان : $0 < m < 1$ ، فإن : المعادلة تقبل ثلاث حلول .

*) إذا كان : $m \geq 1$ أو $m \leq 0$ فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

المسألة 04

I) في الشكل المقابل : (C) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $g(x)=(ax+b)e^x+c$.



1) بقراءة بيانية :

أ) عيّن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، ثم استنتج قيمة c .

ب) عيّن نهاية الدالة g عند $+\infty$.

ج) عيّن كلا من : $g(0)$ و $g'(0)$ ، ثم استنتج قيمتي كل من a و b .

2) نفرض فيما يلي : $g(x)=(x-1)e^x-1$.

أ) شكّل جدول تغيّرات الدالة g .

ب) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور

بين : $1,2$ و $1,3$.

ج) إستنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$ ، وليكن (C_f) منحناها البياني في م.م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم حدّد المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.

2) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

3) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، و شكّل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أن : $f(\alpha)=\alpha-1$ ، ثم استنتج حصرا لـــ $f(\alpha)$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) .

6) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=f(m)$.

حل مختصر للمسألة رقم 04

I) 1) بقراءة بيانية :

أ) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1$ ، و نعلم أن :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(ax+b)e^x+c\right]=\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{axe^x}_{0}+\underbrace{be^x}_{0}+c)=c$$.

إذن نستنتج أن : $c=-1$.

ب) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

ج) لدينا : $g(0)=-2$ و $g'(0)=0$.

ـ لدينا : $g(0)=-2$ ، أي : $(a\times0+b)e^0-1=-2$ ، $b-1=-2$ ، ومنه : $b=-1$.

ـ نحسب $g'(x)$: $g'(x)=a\times e^x+(ax+b)e^x=e^x(a+ax+b)$ ، لدينا : $g'(0)=0$ ، أي :

0 $-1)=0$

إذن : $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

2) أ) تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

ب) الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $[1,2;1,3]$ ، و بما أن : $\begin{cases} g(1,2) = -\dots \\ g(1,3) = +\dots \end{cases}$ ، أي : $g(1,2) \times g(1,3) < 0$.

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : $1,2$ و $1,3$.

ج) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) لدينا : $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$.

1) حساب النهايات :

*) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x + 1} = -\infty$.

*) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = 0$.

*) بجوار $+\infty$ المنحنى (C_f) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

2) لدينا : $(\Delta) : y = x$ ، نحسب : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{x}{e^x + 1} - x\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - xe^x - x}{e^x + 1}$ ،

و منه : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - x\right] = \dfrac{-xe^x}{e^x + 1} = 0$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (-xe^x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 1) = 1 \end{cases}$

إذن : المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

*) الوضعية : أي ندرس إشارة $\frac{-xe^x}{e^x+1}$ ، إذن : الإشارة من إشارة $(-x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة O	(C_f) يقع تحت (Δ)	

3) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

*) نحسب : $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)-xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(-x+1)e^x+1}{(e^x+1)^2}=\frac{-\left[(x-1)e^x-1\right]}{(e^x+1)^2}=\frac{-g(x)}{(e^x+1)^2}$$.

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$.

*) جدول التغيّرات :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

4) إثبات أن : $f(\alpha)=\alpha-1$.

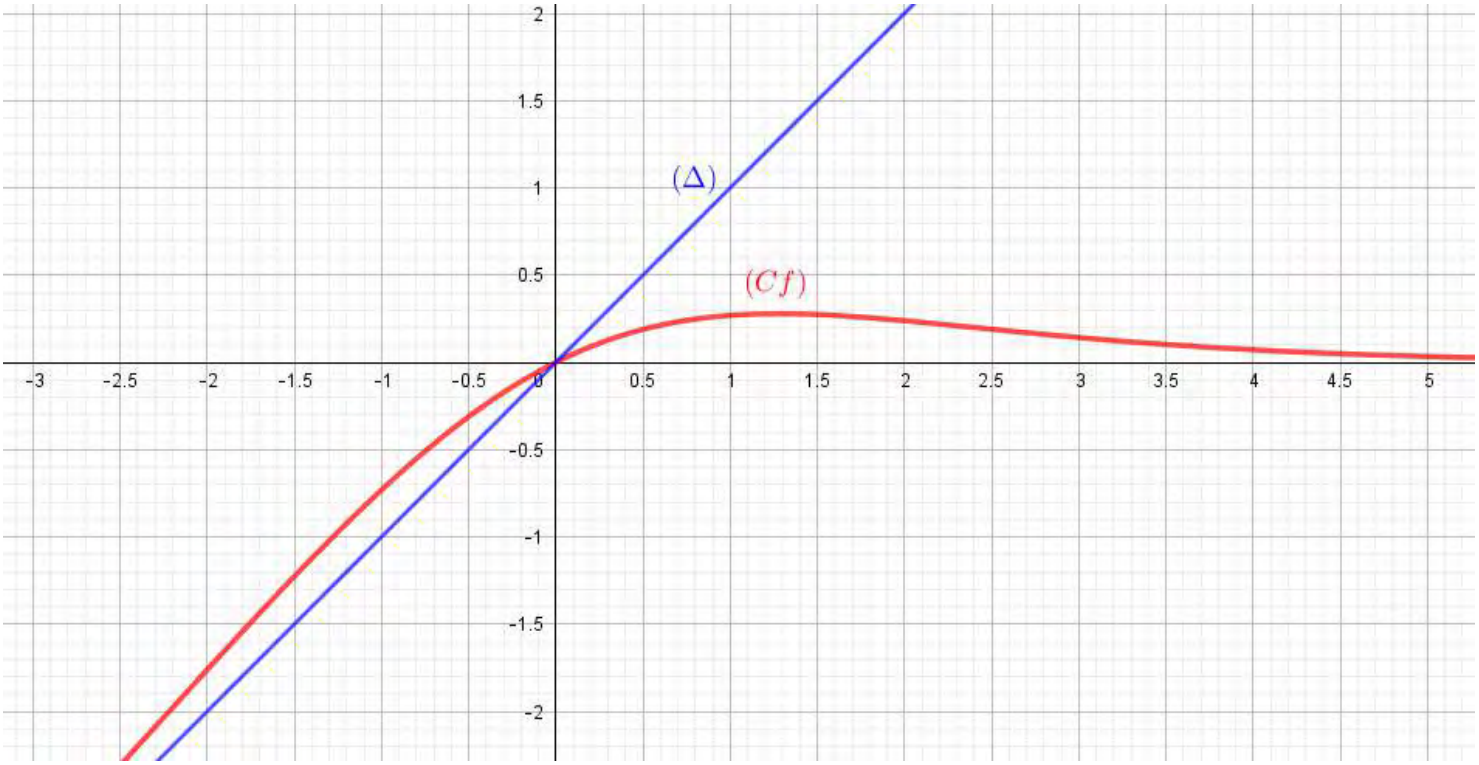
نعلم أن : $g(\alpha)=0$ ، أي : $(\alpha-1)e^\alpha-1=0$ ، أي : $(\alpha-1)e^\alpha=1$ ، ومنه : $e^\alpha=\frac{1}{\alpha-1}$.

*) لنحسب : $f(\alpha)$: $f(\alpha)=\frac{\alpha}{e^\alpha+1}$ ، أي : $f(\alpha)=\alpha\times\frac{\alpha-1}{\alpha}=\frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha-1}}=\frac{\alpha}{\frac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}=\frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1}$ ،

ومنه : $f(\alpha)=\alpha-1$ ، وهو المطلوب.

*) حصر $f(\alpha)$: لدينا : $1,2<\alpha<1,3$ ، أي : $0,2<\alpha-1<0,3$ ، ومنه : $0,2<f(\alpha)<0,3$.

5) الإنشـــــــــــــاء :



6) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة : $f(x)=f(m)$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل و الذي معادلته : $y=f(m)$.

*) إذا كان : $m\in\left]-\infty;0\right[$ ، فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

*) إذا كان : $m\in\left]0;\alpha\right[\cup\left]\alpha;+\infty\right[$ ، فإن : المعادلة تقبل حلان متمايزان .

*) إذا كان : $m=\alpha$ ، فإن : المعادلة تقبل حل واحد .

المسألة 05

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \ ....;x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الجزء الأول :

1) برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحنى (C) .

2) أ) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ ، و ذلك من أجل كل عدد حقيقي $x>0$.

ب) ماذا يمكن إستنتاجه بالنسبة للدالة f ، و بالنسبة للمنحنى (C) ؟ .

3) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$ تكون : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.

4) أدرس تغيّرات الدالة f ، و شكّل جدول تغيّراتها .

الجزء الثاني :

نعتبر g الدالة المعرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

1) بيّن أنه في المجال $[0;+\infty[$ المعادلتان : $g(x)=0$ و $x^3+x^2+2x-1=0$ متكافئتان .

2) برهن أن المعادلة $x^3+x^2+2x-1=0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث : $0,39<\alpha<0,40$.

3) نفرض (T_a) هو المماس للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة a ، حيث : $a>0$.

أ) بيّن أن المماس (T_a) يشمل المبدأ O ، إذا وافقط إذا كان : $f(a)-xf'(a)=0$.

ب) إستنتج أن المماس (T_a) المـــــار بالمبدأ يمسّ المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة α .

ج) أنشئ المماس (T_a) ، و المنحنى (C) .

4) بقراءة بيانية ، أعط عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx$ ، و ذلك حسب قيم الوسيط الحقيقي m .

❖ تعطى النتيـــــــجة : $f'(\alpha)\approx 2,029$.

حل مختصر للمسألة رقم 05

لدينا : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \ ....;x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

الجزء الأول :

1) حساب النهاية عند $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x^2+x+1}{x^2})=\lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{x^2}{x^2}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-\frac{1}{x}})=1 \end{cases}$.

و منه : عند $+\infty$ المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $(\Delta): y=1$.

2) أ) حساب النهاية : $(*).....\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x^2+x+1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}(\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3})e^{-\frac{1}{x}}$$

، أي :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[(\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}})+(\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}})+(\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}})\right]$$

، أي : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[-(-\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}})+(-\dfrac{1}{x})^2e^{-\frac{1}{x}}-(-\dfrac{1}{x})^3e^{-\frac{1}{x}}\right]$ ، بوضع $t=-\dfrac{1}{x}$ ، نجد $\begin{cases} x\to 0 \\ t\to-\infty \end{cases}$:

$\lim\limits_{t\to-\infty}(*)=\lim\limits_{t\to-\infty}(-te^t+t^2e^t-t^3e^t)=0$ ، لأن : $\lim\limits_{t\to-\infty}t^n\times e^t=0$. إذن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

ب) نستنتج أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند 0 ، و المنحنى (C) يقبل عند المبدأ O مماسا هو حامل محور الفواصل .

3) حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(2x+1)x^2-2x(x^2+x+1)}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}(\frac{x^2+x+1}{x^2})$$

، أي :

$$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\left[\frac{2x^3+x^2-2x^3-2x^2-2x}{x^4}+\frac{x^2+x+1}{x^4}\right]$$

، و منه : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$ ، و هو المطلوب .

4) دراسة تغيرات الدالة f :

*) لدينا : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة : $(1-x)$.

إذن : الدالة f متزايدة على المجال $[0;1]$ و مناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

*) جدول التغ

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$3e^{-1}$	↘ 1

الجزء الثاني:

$g(x)=f(x)-xf'(x)$.

1) لدينا : $g(x)=0$ معناه :

$f(x)-xf'(x)=0$ ، أي :

$$\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}-x\frac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}=0$$

،

أي : $\left[\frac{x^2+x+1}{x^2}-\frac{1-x}{x^3}\right]e^{-\frac{1}{x}}=0$ ، أي : $\left[\frac{x^3+x^2+x}{x^3}-\frac{1-x}{x^3}\right]e^{-\frac{1}{x}}=0$ ، أي :

$$\left[\frac{x^3+x^2+2x-1}{x^3}\right]e^{-\frac{1}{x}}=0$$

أي : $\frac{x^3+x^2+2x-1}{x^3}=0$ ، ومنه : $x^3+x^2+2x-1=0$.

إذن : المعادلتان $g(x)=0$ و $x^3+x^2+2x-1=0$ متكافئتان من أجل كل $x\in]0;+\infty[$.

2) لنضع : $h(x)=x^3+x^2+2x-1$ ، أي : $h'(x)=3x^2+2x+2$ ، نلاحظ أن : $\Delta<0$ ، ومنه إشارة $h'(x)$ موجبة تماما ، إذن : الدالة h متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

*) الدالة h مستمرة و رتيبة على المجال $]0,39;0,40[$ و $\begin{cases}h(0,39)=-\dots\\h(0,40)=+\dots\end{cases}$ ، أي : $h(0,39)\times h(0,40)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : $0,39$ و $0,40$.

3) أ) معادلة المماس (T_a) هي : $(T_a):y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

لدينا : (T_a) يمر بالمبدأ O معناه أن : $O\in(T_a)$ ، أي : $0=f'(a)(0-a)+f(a)$ ، ومنه : $f(a)-af'(a)=0$

إذن هي محققة .

ب) لدينا : $f(a)=\frac{a^2+a+1}{a^2}e^{-\frac{1}{a}}$ و $f'(a)=\frac{1-a}{a^4}e^{-\frac{1}{a}}$ ، وعلما أن : $f(a)-af'(a)=0$.

إذن : $\frac{a^2+a+1}{a^2}e^{-\frac{1}{a}}-a\frac{1-a}{a^4}e^{-\frac{1}{a}}=0$ ، أي : $\left[\frac{a^2+a+1}{a^2}-\frac{1-a}{a^3}\right]e^{-\frac{1}{a}}=0$ ، أي :

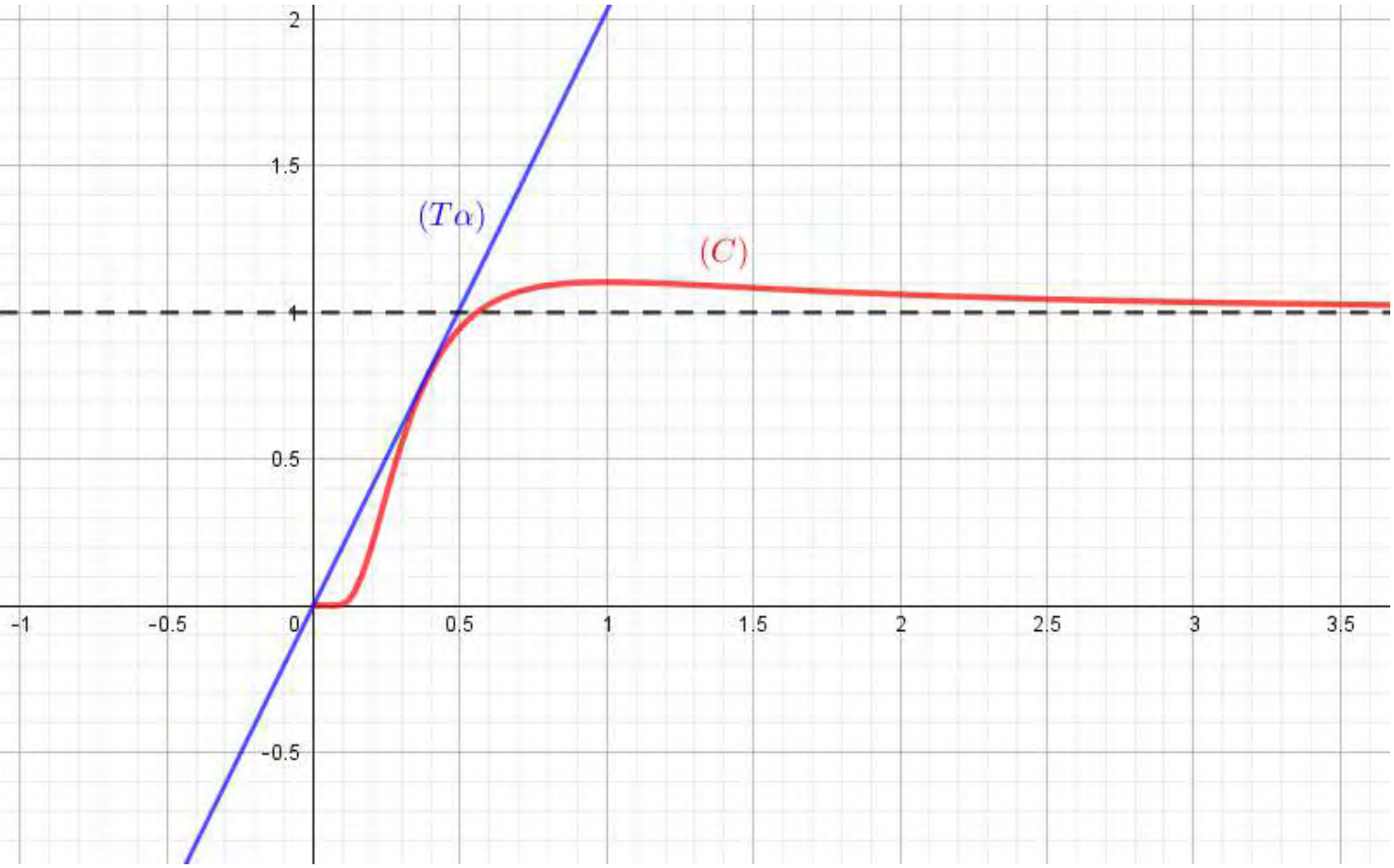
$\left[\frac{a^3+a^2+a}{a^3}-\frac{1-a}{a^3}\right]e^{-\frac{1}{a}}=0$ ، أي: $\frac{a^3+a^2+2a-1}{a^3}=0$ ، ومنه: $a^3+a^2+2a-1=0$.

وهذه الأخيرة تقبل حلا وحيدا α ، إذن: $a=\alpha$.

وعليه: فإن المماس (T_a) المار بالمبدأ O يمس المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة α .

*) معادلة المماس: $(T_\alpha): y=2,029x$.

ج) الإنشـــــــــاء:



4) المناقشة البيانية:

لدينا المعادلة: $f(x)=mx$.

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y=mx$ هذا الأخير المار بالمبدأ O ، إذن: هناك مناقشة بيانية دورانية.

*) إذا كان: $0<m<2,029$ فإن: المعادلة تقبل حلين متمايزين.

*) إذا كان: $m\geq 2,029$ أو $m\leq 0$ فإن: المعادلة تقبل حل واحد.

حلول تمارين الدوال الأسّية الواردة في الباكالوريا

شعبة : علوم

التمرين (1) (باك 2008) (م 1) (7,5 ن)

I) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1\,cm$.

عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

(C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر النتيجة بيانيا. (نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)

2) أدرس تغيّرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

3) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثييها .

4) أكتب معادلة المماس للمنحى (C_g) عند النقطة I .

5) أرسم (C_g) .

6) H الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان

- عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0 .

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g(x^2)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عيّن اتجاه تغيّر الدالة k ثم شكل جدول تغيّراتها .

حل مقترح للتمرين (1) (باك 2008)

I) f الدالة العددية المعرّفة على $[-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

تعيين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

$A\in(C_f)$ معناه : $f(-1)=1$ أي : $(-a+b)e+1=1$ و منه : $a=b$.

معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$ معناه : $f'(-1)=-e$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $[-2;+\infty[$ و : $f'(x)=ae^{-x}+(-e^{-x})(ax+b)=(-ax-b+a)e^{-x}$.

و منه $f'(-1)=(2a-b)e$. و مما سبق $f'(-1)=-e$.

بالمطابقة لدينا $2a-b=-1$ و $a=b$ و منه نجد : $a=b=-1$.

II) الدالة g معرفة على المجال $[-2;+\infty[$ بـ : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-1)e^{-x}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x}-e^{-x}+1)=1$ ، لأن $\lim\limits_{u\to+\infty}(-xe^{-x})=\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

2) دراسة تغيّرات الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$ ، و $g'(x)=-e^{-x}+(-e^{-x})(-x-1)=xe^{-x}$.

- إتجاه تغيّر الدالة g :

إشارة $(x$

و منه : من أجل $x \in [-2;0]$ ، يكون $g'(x) \leq 0$ و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $[-2;0]$.

من أجل $x \in [0;+\infty[$ ، يكون $g'(x) \geq 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	e^2+1	↗	0	↘	1

3) تبيان أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I مع تعيين إحداثييها .

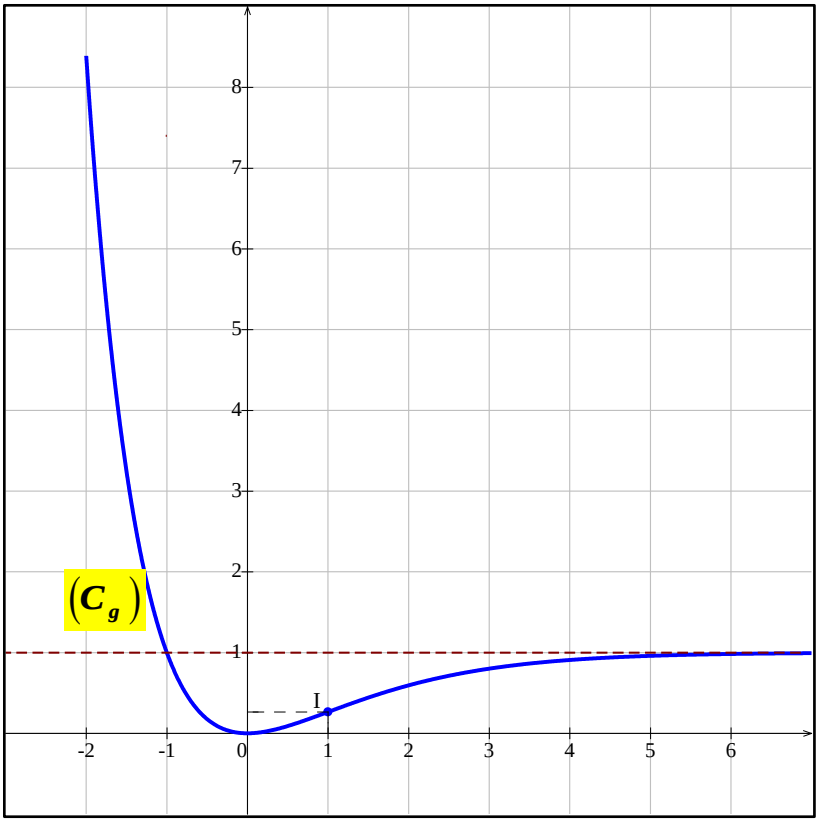
الدالة g' قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ ، و $g''(x) = (1-x)e^{-x}$.

إشارة $g''(x)$ من إشارة $1-x$ و بالتالي $g''(x)$ ينعدم عند 1 مغيرا إشارته ، و منه $I\left(1;1-\frac{2}{e}\right)$ هي نقطة إنعطاف لـ (C_g) .

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

لدينا : $(T): y = g'(1)(x-1)+g(1)$ و منه $(T): y = \frac{1}{e}x + 1 - \frac{3}{e}$.

5) الرسم :



6) H الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان .

ـ تعيين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto g(x) - 1$:

الدالة H قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ ، و $H'(x) = \alpha e^{-x} + (-e^{-x})(\alpha x + \beta) = (-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x}$.

H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto g(x) - 1$ معناه : $(-\alpha x - \beta + \alpha)e^{-x} = (-x-1)e^{-x}$ و منه نجد : $\alpha = 1$ و $\beta = 2$.

لدينا: $G(1+)$

الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند 0 هي : $G(x)=(x+2)e^{-x}+x+2$.

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g(x^2)$

الدالة k قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ،

و $k'(x)=2xg'(x^2)=2x\left(x^2e^{-x^2}\right)=2x^3e^{-x^2}$.

إتجاه تغيّر الدالة k :

إشارة $k'(x)$ من إشارة x.

و منه : من أجل $x\in[-2;0]$ ، يكون $k'(x)\le 0$ و بالتالي الدالة k متناقصة على المجال $[-2;0]$.

من أجل $x\in[0;+\infty[$ ، يكون $k'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة k متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة k :

x	-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
$k(x)$	$1-5e^{-4}$	↗	0	↘	1

التمرين 2 باك 2010 م2 ن7

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب: $y=x$ و $y=x+1$.

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5) أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2<\alpha<1$ و $-1.3<\beta<-1.4$.

ب- هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ)؟

جـ- أرسم (Δ)، (Δ') ثم المنحنى (C_f).

د- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة: $(m-1)e^{-x}=m$

حل مقترح للتمرين 2 باك 2010

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$

1) أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=-\infty$.

ب- $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=-\infty$.

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f).

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f'(x)=1-\dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}=1+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$

و منه: من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	‖	↗	$+\infty$

3) ألدينا $\lim\left[f(x)-x\right]=\lim\left[-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=0$ Δ $y=x$ (C_f) عند $+\infty$.

و لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{e^x-1}-1\right]=0$ و منه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=-\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{1-e^x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $1-e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$\|$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

• دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ') :

لدينا : $f(x)-y=-\frac{1}{e^x-1}-1=\frac{e^x}{1-e^x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $1-e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$\|$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ')		(C_f) تحت (Δ')

4) إثبات أن النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

لدينا : من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(-x)+f(x)=-\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^{-x}-1}=-\frac{1}{e^x-1}+\frac{e^x}{e^x-1}=1=2\times\frac{1}{2}$

و منه النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) أ- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و $]0;+\infty[\supset]\ln 2;1[$ و $\begin{cases}f(1)\approx 0,41\\ f(\ln 2)\approx -0,31\end{cases}$ أي $f(1)\times f(\ln 2)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α ، حيث $\ln 2<\alpha<1$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و $]-\infty;0[\supset]-1,4;-1,3[$ و $\begin{cases}f(-1,3)\approx 0,07\\ f(-1,4)\approx -0,07\end{cases}$

أي $f(-1,3)\times f(-1,4)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حلا وحيدا β ، حيث $-1.4<\beta<-1.3$.

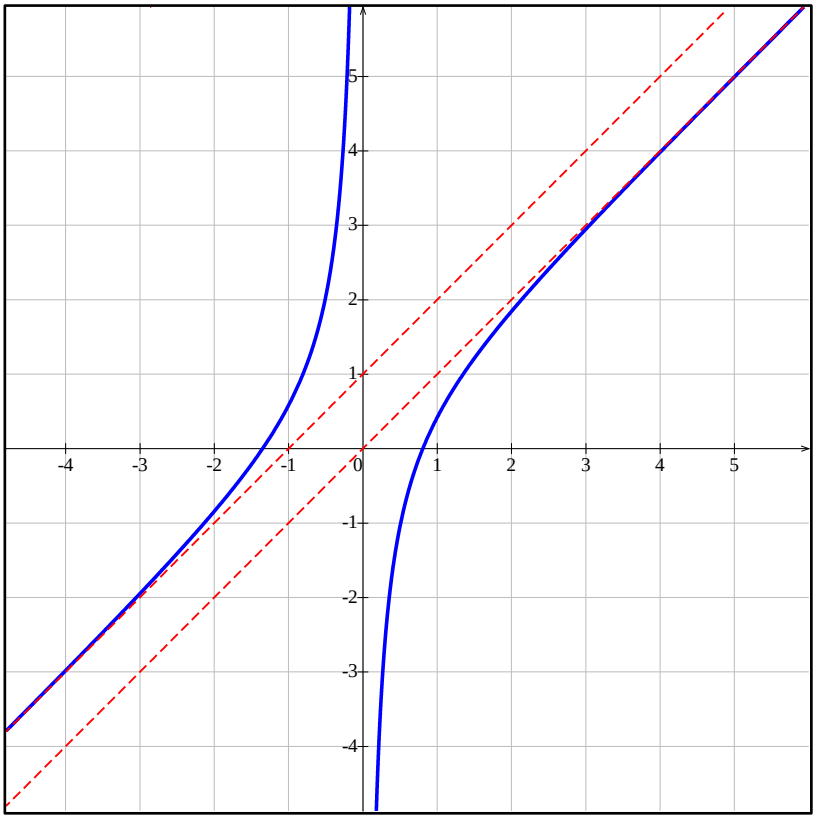
بـ- دراسة وجود مماسات للمنحنى (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

لنحل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة : $f'(x)=1$.

لدينا : $f'(x)=1$ تكافئ $1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=1$ تكافئ $\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$ أي $e^x=0$ و هذا مستحيل و بالتالي المعادلة ليس لها

حلول أي أنه لا توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ).

جـ ـ الرسم :



د ـ المناقشة البيانية :

لدينا : $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $m-1=me^{x}$ تكافئ $m=-\frac{1}{e^{x}-1}$ تكافئ $m+x=x-\frac{1}{e^{x}-1}$

تكافئ $f(x)=x+m$ ، و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذا كان $m\in]-\infty;0[$ فإن للمعادلة حل واحد موجب .

إذا كان $m\in[0;1]$ فإن المعادلة ليس لها حلول .

إذا كان $m\in]1;+\infty[$ فإن للمعادلة حل واحد سالب .

التمرين 3 باك 2011 م2 ن7

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- أحسب $f'(x)$ ثمّ أدرس إشارتها.

جـ- شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

2) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $(-\infty)$.

ب- أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

جـ- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$، تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α.

د- أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;2]$.

3) أ- أحسب بدلالة α، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f)، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$.

ب- أثبت أن: $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)$ ua (ua هي وحدة المساحات)

حل مقترح للتمرين 3 باك 2011

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$.

1) أ- حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-ex-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x}-e-\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-ex-1\right)=+\infty$$

ب- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^x-e$

$f'(x)=0$ تكافئ $e^x-e=0$ تكافئ $e^x=e$ تكافئ $x=1$.

من أجل $x\in]-\infty;1]$، يكون $e^x\le e$ أي $f'(x)\le 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

من أجل $x\in[1;+\infty[$، يكون $e^x\ge e$ أي $f'(x)\ge 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

جـ- جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

2) أ- لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x-ex-1-(-ex-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-ex-1)\right]$.

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- كتك

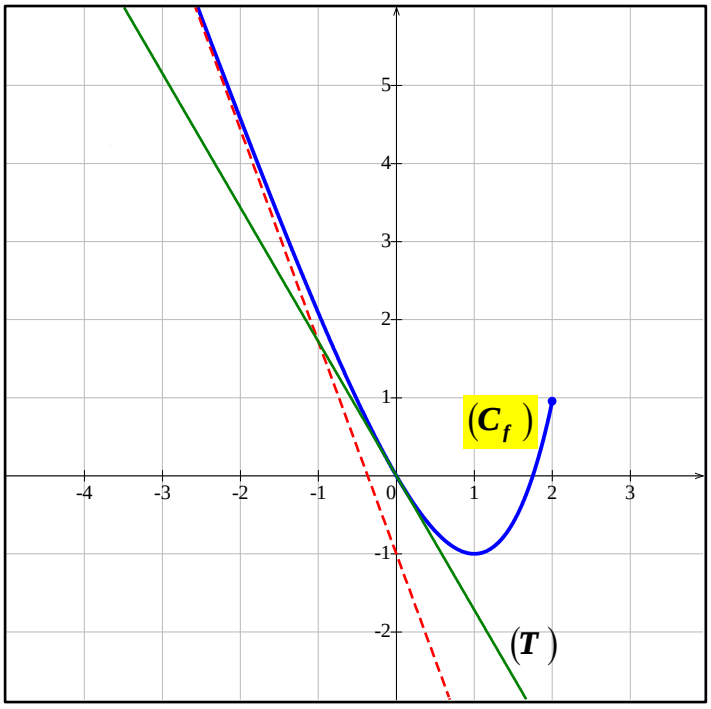
لدينا : $(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$ و منه $(T): y = (1-e)x$.

جـ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $]1,75;1,76[\subset]1;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1.75) \approx -0,002 \\ f(1.76) \approx 0,02 \end{cases}$

أي $f(1,75) \times f(1,76) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.75 < \alpha < 1.76$.

د ـ الرسم :



3)أ ـ حساب ، بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

$$A(\alpha) = -\int_0^{\alpha} f(x)dx = -\int_0^{\alpha} (e^x - ex - 1)dx = -\left[e^x - \frac{1}{2}ex^2 - x\right]_0^{\alpha} = 1-\left(e^{\alpha} - \frac{1}{2}e\alpha^2 - \alpha\right)$$

بـ إثبات أن : $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right) ua$

لدينا : $f(\alpha)=0$ و منه $e^{\alpha} - e\alpha - 1 = 0$ أي $e^{\alpha} = e\alpha + 1$ و بالتالي :

$$A(\alpha) = -e^{\alpha} + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = -(e\alpha+1) + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1 = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right) ua$$

(ua هي وحدة المساحات)

التمرين 4 باك 2012 م2 ن7

I) لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^x$.

1)أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2)أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3)أ-بيّن أن المعادلة $g(x)=0$، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$

بـتحقق أن $0.5<\alpha<0.6$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x)=(x-1)e^x-x-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1)أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2)لتكن f' مشتقة الدالة f. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن: $f'(x)=-g(x)$،

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

3)بيّن أن $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدوّر النتائج إلى 10^{-2})

4)أ-بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب-أدرس وضعية (C_f) بالنسبية إلى (Δ).

5)أ-بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

ب-أنشئ (Δ) و (C_f).

6)لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(ax+b)e^x$

أ-عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

ب-إستنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

حل مقترح للتمرين 4 باك 2012

I g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^x$.

1) حساب النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-xe^x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-xe^x)=-\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=-1\times e^x+(-x)e^x=-(x+1)e^x$

بما أن $e^x>0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $-(x+1)$، و منه :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		$-\ 0\ +$	

و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-1;+\infty[$ ومتزايدة على المجال $]-\infty;-1]$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↘	$1+e^{-1}$	↗	$-\infty$

3) أ-تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$:

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(-1)=1+e^{-1} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$.

بالتحقق أن $0.5<\alpha<0.6$:

لدينا : $]-1;+\infty[\supset]0,5;0,6[$ و $\begin{cases} g(0.5)\approx 0,18 \\ g(0.6)\approx -0,09 \end{cases}$ ومنه $0.5<\alpha<0.6$.

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2[$ كما يلي : $f(x)=(x-1)e^x-x-1$.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^x-x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[xe^x-e^x-x-1\right]=+\infty$.

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2[$ فإن : $f'(x)=-g(x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;2[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;2[$:

$$f'(x)=1\times e^x+(x-1)e^x-1=e^x+xe^x-e^x-1=xe^x-1=-\left(1-xe^x\right)=-g(x)$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2[$:

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

جدول تغيّرات الدالة f

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	e^2-3

3) تبيان أن : $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$.

لدينا : $f(\alpha)=(\alpha-1)e^\alpha-\alpha-1$ ، و لدينا من جهة $g(\alpha)=0$ يكافئ $1-\alpha e^\alpha=0$ يكافئ $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$.

ومنه $f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)}{\alpha}-\alpha-1=\frac{(\alpha-1)-\alpha^2-\alpha}{\alpha}=\frac{-\alpha^2-1}{\alpha}$ أي: $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$.

إيجاد حصر للعدد $f(\alpha)$:

$0,5<\alpha<0,6$ يكافئ $\begin{cases}\frac{1}{0,6}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{0,5}\\ 1,25<\alpha^2+1<1,36\end{cases}$ يكافئ $\frac{1,25}{0,6}<\frac{\alpha^2+1}{\alpha}<\frac{1,36}{0,5}$

يكافئ $-\frac{1,25}{0,6}<-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)<-\frac{1,36}{0,5}$ أي: $-2,72<f(\alpha)<-2,08$.

4) أ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x-e^x\right)=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـدراسة وضعية (C_f) بالنسبية إلى (Δ):

لدينا: $f(x)-y=(x-1)e^x$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $x-1$ على المجال $]-\infty;2]$.

x	$-\infty$	1	2
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;-2)$	(C_f) تحت (Δ)

5) أ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

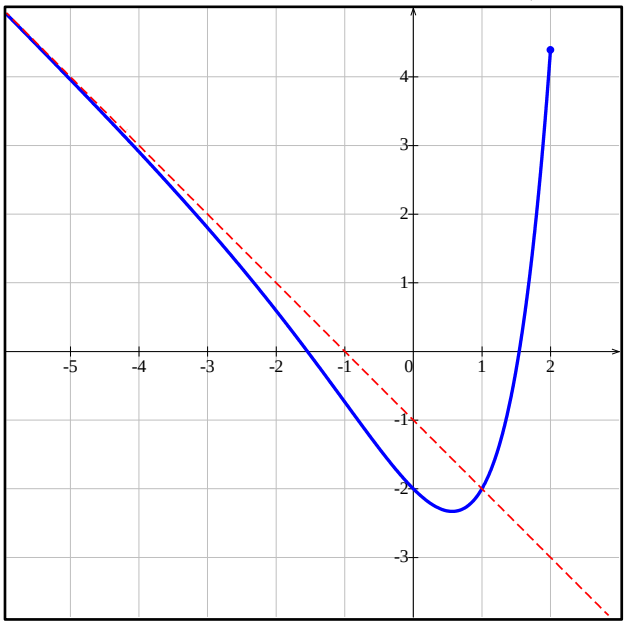
- الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و $]-\infty;\alpha]\subset]-\infty;-1,5]$ و $]-1,6;-1,5[$ $\begin{cases}f(-1.5)\approx-0,05\\ f(-1.6)\approx0,07\end{cases}$

أي $f(-1,6)\times f(-1,5)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_1 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و يحقق $f(x_1)=0$.

- الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;2]$ و $[\alpha;2]\subset]1,5;1,6[$ و $\begin{cases}f(1.5)\approx-0,26\\ f(1.6)\approx0,37\end{cases}$

أي $f(1,6)\times f(1,5)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_2 حيث $1.5<x_2<1.6$ و يحقق $f(x_2)=0$.

بـالرسم :



(C_f)

6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=(ax+b)e^x$.

أ ـتعيين العددين الحقيقين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$.

الدالة h أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ يعني : $h'(x)=xe^x$ ، و منه بالمطابقة نجد : $a=1$ و $b=-1$. أي $h(x)=(x-1)e^x$.

بـإستنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا : $g(x)=1-xe^x$ و منه دالة أصلية للدالة g من الشكل : $G(x)=x-(x-1)e^x$.

التمرين 5 باك 2013 م1 6,5 نق

I f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحني (C).

2) أحسب $f'(x)$. بيّن أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α. باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α.

4) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C)، ثمّ أرسم المنحني (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

II g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) أدرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1[$، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) أ- تحقق أنّ $g\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=0$، ثمّ بيّن أنّ: $g'\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب- إستنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\dfrac{\alpha+1}{2}$.

جـ- تحقق من أنّ: $y=\dfrac{2}{(\alpha-1)^3}x-\dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$، معادلة للمستقيم (T).

حل مقترح للتمرين 5 باك 2013

I f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$.

1) حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=2$، لأنّ: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)=1\end{cases}$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C).

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left[\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=-\infty$، لأنّ: $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)=0\end{cases}$

التفسير ا

2) حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$:

$$f'(x)=\frac{1\times(x-1)-1\times x}{(x-1)^2}+\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{-1}{(x-1)^2}\times\left(1+e^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

بما أن $f'(x)<0$ من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ ، فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↘	2

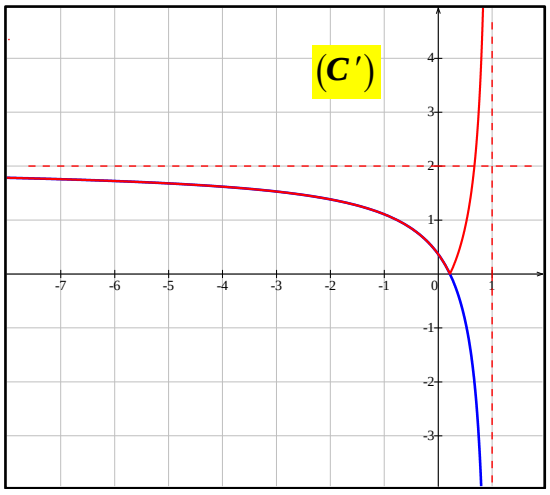
3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2\\ \lim\limits_{\substack{<\\ x\to1}}f(x)=-\infty\end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α .

حسب جدول القيم : $0,21<\alpha<0,22$.

4) الرسم :



5) تعيين مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

حلول المعادلة $|f(x)|=m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C') مع المستقيم ذي المعادلة $y=m$.

من أجل $m \in \left]\frac{1}{e};2\right[$ المعادلة $|f(x)| = m$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

II) g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x) = f(2x-1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g:

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(2x-1) = 2$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(2x-1) = -\infty$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$: $g'(x) = 2f'(2x-1)$

بما أنه من أجل كل $x \in]-\infty;1[$ ، $(2x-1) \in]-\infty;1[$ فإن $f'(2x-1) > 0$، و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	2	↘	$-\infty$

2) أ- التحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$:

لدينا: $g(x) = f(2x-1)$ ومنه $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = f(\alpha) = 0$.

تبيان أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.

لدينا: $g'(x) = 2f'(2x-1)$ ومنه $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = 2f'(\alpha)$.

ب- إستنتاج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

لدينا: $(T): y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x - \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ ومنه $(T): y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$.

ج- التحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

لدينا: $f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} \times \left(1 + e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$ ، لكن $f(\alpha) = 0$ وهذا يعني $e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1}$ ومنه $f'(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)^3}$

إذن: $(T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$ أي $(T): y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$.

التمرين 6 باك 2015 م2 ن6

I g) الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن: $0,36<\alpha<0,37$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II f) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب- إستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$، ثم شكل جدول تغيّرات الدالة f.

3) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$، نأخذ $f(-\alpha)\approx 0,1$.

6) أ- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

ب- إستنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

حل مقترح للتمرين 6 باك 2015

I g) الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)=-2-2e^{2x-2}=-2\left(1+2e^{2x-2}\right)$.

لدينا: من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)<0$ و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)\left(\frac{1-2x}{2x-2}-\frac{e^{2x-2}}{2x-2}\right)=-\infty\end{cases}$$

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

التحقق أن: $0,36<\alpha<0,37$.

لدينا: $\begin{cases}g(0.36)\approx 0,002\\ g(0.37)\approx -0,02\end{cases}$ أي: $g(0.36)\times g(0.37)<0$ و منه $0,36<\alpha<0,37$.

3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		$-\ 0\ +$	

II f) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

1) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

الدالة f

$f'(x)=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1=e^{2x+2}\left(1+2x-e^{-2x-2}\right)=e^{2x+2}\left(1-2(-x)-e^{2(-x)-2}\right)=e^{2x+2}g(-x)$

بـ- إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		$+\ 0\ -$	

نستنتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;-\alpha[$ و متزايدة على $]-\alpha;+\infty[$.

2) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}-x+1\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^2\times 2xe^{2x}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{2x+2}-x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{2x+2}-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		$+\ 0\ -$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$
	$+\infty$	↗	

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^2\times 2xe^{2x}\right)=0$

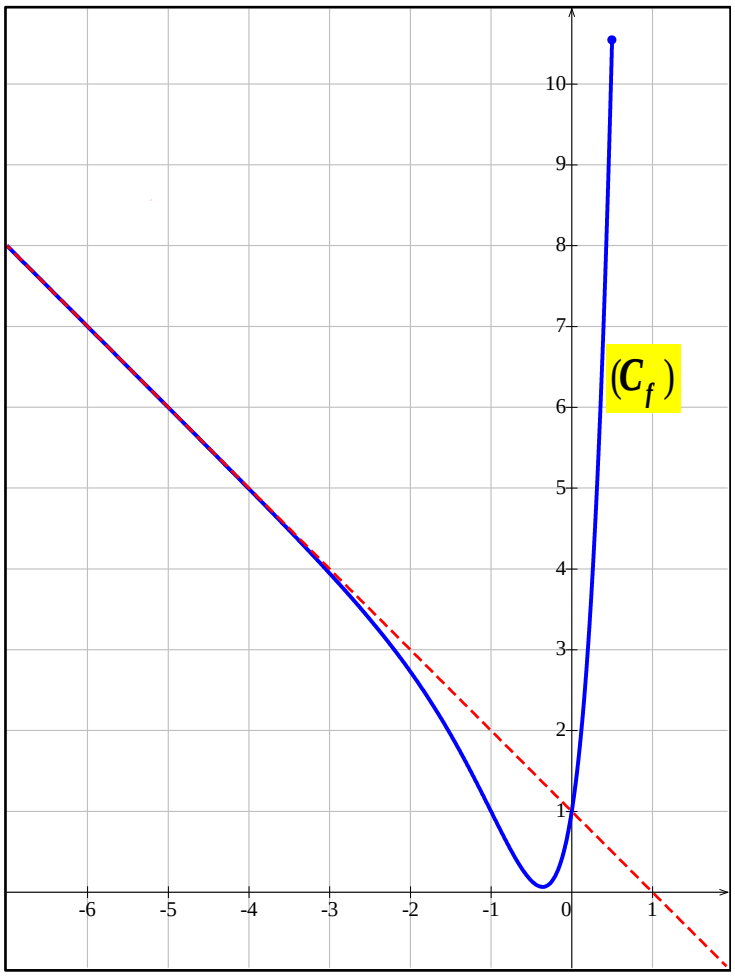
التفسير الهندسي : المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-(-x+1)=xe^{2x+2}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$		$+\ 0\ -$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) تحت (Δ)

5) الرسم :



6) أ- التحقق : من أجل كل عدد حقيقي x :

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=2xe^{2x+2}-2x+2+e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1-(4x+4)e^{2x+2}=1-2x-3e^{2x+2}$$

بـ- إستنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا : من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

ومنه $f(x)=-\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}-x-\frac{3}{2}e^{2x+2}$.

و بالتالي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ من الشكل : $F(x)=\frac{1}{2}\left[-f(x)+f'(x)+x-x^2-\frac{3}{2}e^{2x+2}\right]+c$

أي : $F(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x+2}-\frac{1}{2}x^2+x-1+c$.

التمرين 7 باك 2016 - الدورة الأولى - م2 - ن7

I) لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلّين في $\mathbb{R}$، أحدهما معدوم و الآخر α حيث: $-1.52<\alpha<-1.51$.

باستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x)=-g(x)$.

جـ- شكّل جدول تغيّرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ $f(\alpha)\approx 0.38$)

د- عيّن دون حساب: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

جـ- بيّن أن المنحنى يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثييهما.

د- أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.

هـ- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة: $(m-x)e^{x}+(x^2+3x+2)=0$ على المجال $[-2;+\infty[$.

III) h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

2) أ- أحسب التكامل التالي: $A(\lambda)=\int_0^{\lambda} h(x)dx$، حيث λ عدد حقيقي موجب تماما و فسّر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

حل مقترح للتمرين 7 باك 2016 - الدورة الأولى -

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$.

1) حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1+(x^2+x-1)e^{-x}\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+(x^2+x-1)e^{-x}\right]=1$.

2) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g:

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x:

$g'(x)=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x-1)e^{-x}=(-x^2+x+2)e^{-x}=(2-x)(x+1)e^{-x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2-x)(x+1)$:

x	-1	2	$+\infty$
			$-\infty$

الدالة g متزايدة على المجال $[-1;2]$ و متناقصة على كل من المجالين $]2;+\infty[$ و $]-\infty;-1[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$ 0	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$1-e$ ↗	$1+5e^{-2}$ ↘	1

3) أ- تبيان أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

لدينا : $g(0)=1+(0^2+0-1)e^0=1-1=0$

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-1;-\infty[$ و $]-1,52;-1,51[\subset]-\infty;-1[$ و $\begin{cases} g(-1,52)\approx 0,041 \\ g(-1,51)\approx -0,040 \end{cases}$

أي $g(-1,51)\times g(-1,52)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبلفي المجال $]-1;-\infty[$ حلا وحيدا α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$ 0	$+$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$.

1) أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+(x^2+3x+2)e^{-x}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+(x^2+3x+2)e^{-x}\right]=+\infty$

ب- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$f'(x)=-1+(2x+3)e^{-x}-(x^2+3x+2)e^{-x}=-1-(x^2+x-1)e^{-x}=-g(x)$.

جـ- جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$ 0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$ ↗	2 ↘	$-\infty$

د- $0=f'(\alpha)=-g(\alpha)$. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α معامل توجيهه معدوم . (يوازي لحامل محور الفواصل).

2) أ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ):

لدينا: $f(x)-(-x)=\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}=(x+1)(x+2)e^{-x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(x+1)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(-2;2)$	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

جـ ـ تبيان ان المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف:

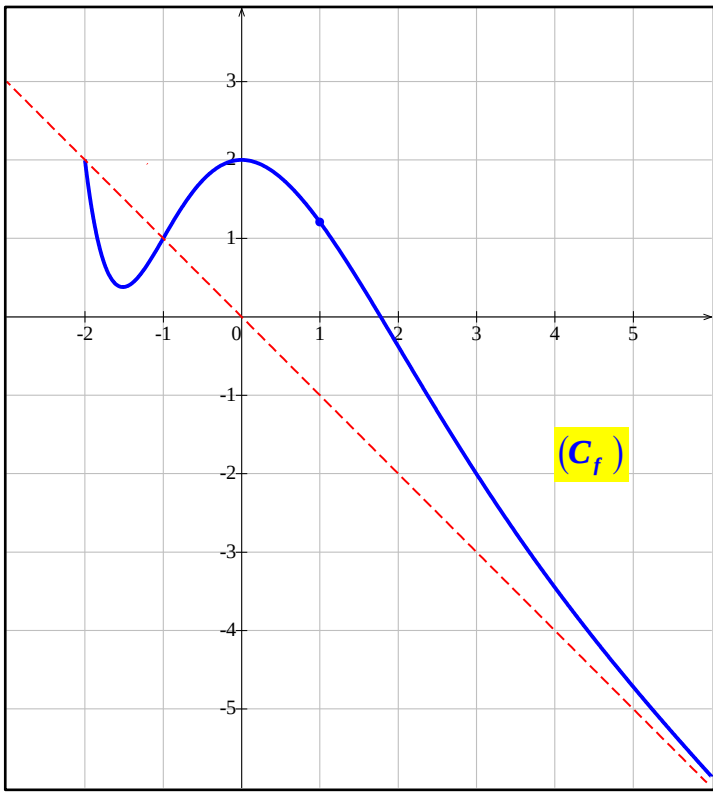
لدينا: الدالة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x، $f''(x)=-g'(x)=(x-2)(x+1)e^{-x}$.

إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف هما: $A(-1;1)$ و $C\left(2;-2+12e^{-2}\right)$.

د ـ الرسم:



هـ ـ المناقشة البيانية:

المعادل x 2

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-m$.

لما $-m\in]-\infty;f(\alpha)[$ يكون $m\in]-f(\alpha);+\infty[$ و المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

لما $m=-f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب و الآخر سالب .

لما $-m\in]f(\alpha);2[$ يكون $m\in]-2;-f(\alpha)[$ و المعادلة تقبل ثلاثة حلول ، إثنان سالبان و الآخر موجب .

لما $m=-2$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب و الآخر معدوم .

III) h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=x+f(x)=(x^2+2x+3)e^{-x}$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$:

H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ يعني : من أجل كل عدد حقيقي x ، $H'(x)=h(x)$.

الدالة H قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$H'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=(-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}$$

و منه بالمطابقة نجد : $a=-1$ ، $b=-5$ و $c=-7$ أي $H(x)=(-x^2-5x-7)e^{-x}$.

2) أ- حساب التكامل : $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx$ ، حيث $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx=\left[H(x)\right]_0^{\lambda}=(-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7$$

التفسير الهندسي :

$A(\lambda)$ يمثل مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

ب- $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[(-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7\right]=7$.

التمرين (8) (باك 2016 - الدورة الثانية - (م2) (6 ن)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2e^{x}-x^{2}-x$.

2) أ- أحسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم أدرس إتجاه تغيّر الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب - بيّن أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$

جـ- أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$.

4) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^{2}e^{x}}{e^{x}-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

بـ- بيّن أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\dfrac{xe^{x}g(x)}{\left(e^{x}-x\right)^{2}}$ (حيث f' هي مشتق الدالة f) .

جـ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) أ- بيّن أن : $f(\alpha)=\alpha^{2}+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

بـ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^{2}\right]$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا .

جـ- أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha)\approx 0,29$)

حل مقترح للتمرين (8) (باك 2016 - الدورة الثانية -)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2e^{x}-x^{2}-x$.

1) أ- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=2e^{x}-2x-1$

دراسة إتجاه تغيّر الدالة g' :

الدالة g' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g''(x)=2e^{x}-2=2\left(e^{x}-1\right)$

إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$

الدالة g' متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

بـ- تبيان أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$

الدالة g' تقبل قيمة حدّية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $g'(0)=1$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$

جـ- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x}-x^{2}-x\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2}\left(\dfrac{2e^{x}}{x^{2}}-1-\dfrac{1}{x^{2}}\right)=+\infty$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-1,38)\approx -0,02 \\ g(-1,37)\approx 0,001 \end{cases}$ أي $g(-1,38)\times g(-1,37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$.

3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$.

1) أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=0$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^x\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x\right)=+\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{1-xe^{-x}}\right)=+\infty$.

بـ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=\frac{\left(2xe^x+x^2e^x\right)\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)x^2e^x}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{xe^x\left[(2+x)\left(e^x-x\right)-x\left(e^x-1\right)\right]}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{xe^xg(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

جـ- دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	-0	$+$

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;0]$ و متزايدة على كل من المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

2) أ- تبيان أن : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $e^{\alpha}=\frac{\alpha^2-\alpha}{2}$ ومنه $f(\alpha)=\frac{\alpha^2 e^{\alpha}}{e^{\alpha}-\alpha}=\frac{\alpha^2\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha^2+\alpha}{2}-\alpha}=\frac{\alpha^2\left(\alpha^2+\alpha\right)}{\alpha^2-\alpha}=\frac{\alpha^3+\alpha^2}{\alpha-1}$

أي : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\frac{2}{\alpha-1}$.

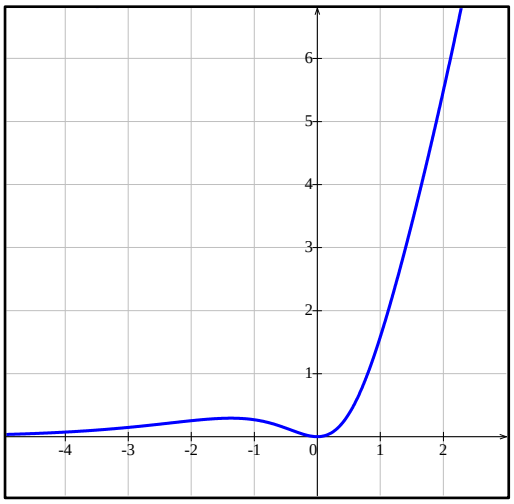
إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

لدينا : $-1,38<\alpha<-1,37$ يكافئ $\begin{cases}-0,76<2\alpha+2<-0,74\\(-1,37)^2<\alpha^2<(-1,38)^2\\-2,38<\alpha-1<-2,37\\-\frac{2}{2,37}<\frac{2}{\alpha-1}<-\frac{2}{2,38}\end{cases}$ ومنه $0,27<f(\alpha)<0,32$.

بـ- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2e^x}{e^x-x}-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^3}-\frac{1}{x^2}}\right)=0$

التفسير البياني :المنحنى (C_f) و المنحنى الممثل للدالة "مربع" $(x\mapsto x^2)$ متقاربان عند $+\infty$.

جـ- الرسم :



التمرين 9 باك 2017 - الدورة العادية - م2 ن7

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$

ب- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x)\geq 0$، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T).

2) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $]-1;+\infty[$.

4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

- تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$، ثم أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

حل مقترح للتمرين 9 باك 2017 – الدورة العادية -

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.

1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-x^2e^{1-x}\right)=2$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e\times x^2e^{-x}\right)=0$.

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-x^2e^{1-x}\right)=-\infty$.

2) أ- الدالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x،

$f'(x)=-2xe^{1-x}+x^2e^{1-x}=(x^2-2x)e^{1-x}=x(x-2)e^{1-x}$

ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x-2)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $[0;2]$ و متزايدة على كل من المجالين $[2;+\infty[$ و $]-\infty;0]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$2-4e^{-1}$	↗	2

3) كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

لدينا : $(T): y = f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $(T): y = -x+2$.

II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 1 - xe^{1-x}$.

1) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \geq 0$:

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x) = -e^{1-x} + xe^{1-x} = (x-1)e^{1-x}$

إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

الدالة h تقبل قيمة حدّية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $h(1)=0$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \geq 0$

• دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T) :

لدينا : $f(x) - y = 2 - x^2e^{1-x} + x - 2 = x(1-x)e^{1-x} = xh(x)$.

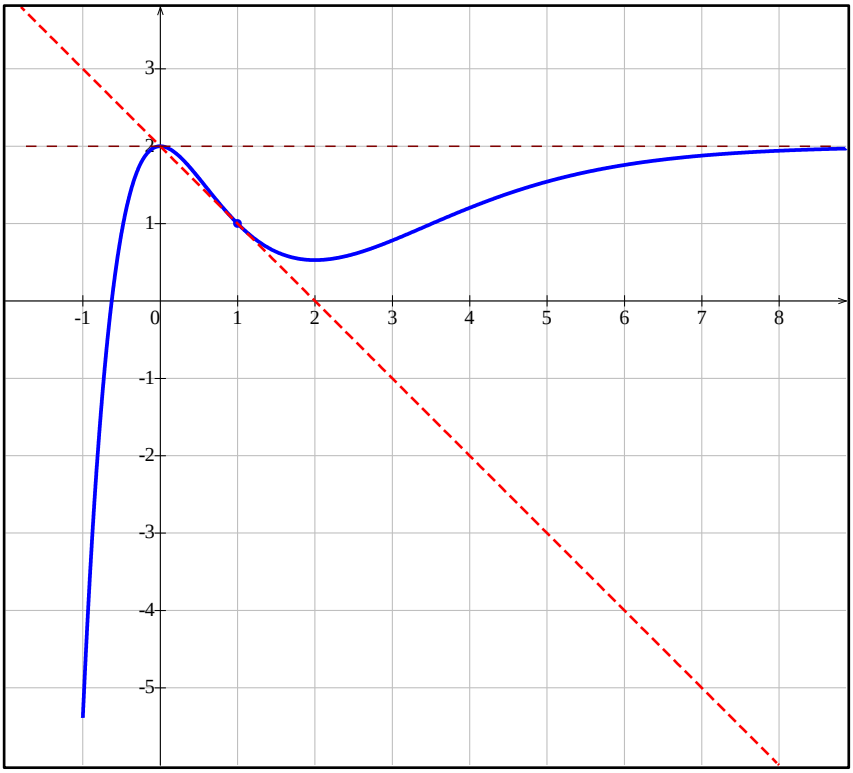
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	0	$+$	
الوضع النسبي	(T) تحت (C_f)		(T) يقطع (C_f)	(T) فوق (C_f)		(T) فوق (C_f)	

2) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و $]-0,7;-0,6[\subset]-\infty;0[$ و $\begin{cases} f(-0,7) \approx -0,7 \\ f(-0,6) \approx 0,2 \end{cases}$

أي $f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

3) الرسم :



4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=2x+\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}$.

ـ التحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$F'(x)=2+(2x+2)e^{1-x}-\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}=2-x^2e^{1-x}=f(x)$$

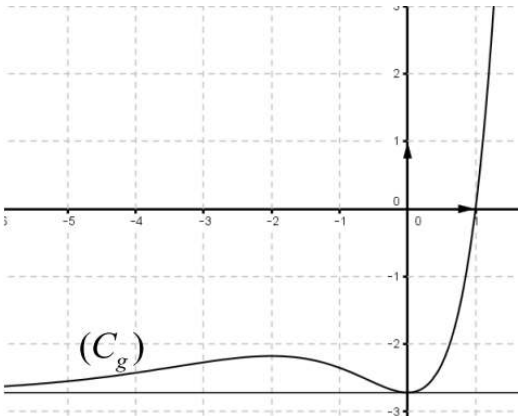
ـ حساب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=(7-2e)u.a$$

التمرين 10 باك 2017 - الدورة الإستثنائية - م1 ن7

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^x-e$.

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الشكل).



- أحسب $g(1)$.
- بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايات الآتية: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أن المنحنى (γ) الذي معادلته $y=e^{-x}-2$ و المنحنى (C_f) متقاربان بجوار، ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ).

3) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$.

4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1;0]$ و $]0;+\infty[$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

5) بيّن كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x\mapsto e^x$، ثم أرسم بعناية كلا من (γ) و (C_f) في نفس المعلم.

6) ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.

أحسب العدد الحقيقي I حيث: $I=A(0)+A(1)+....+A(2016)$.

حل مقترح للتمرين 10 باك 2017 - الدورة الإستثنائية -

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^x-e$.

- $g(1)=e^1-e=0$.
- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

- إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(-x)$		$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=-2 \;،\; \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=-\infty \;،\; \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=+\infty$$

2) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{e}{x}\right)=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]=0$ و المنحنى (γ) ذي المعادلة $y=e^{-x}-2$ و (C_f) متقاربان عند $-\infty$.

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) :

لدينا : $f(x)-y=-\dfrac{e}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	‖	$-$
الوضع النسبي	(γ) فوق (C_f)	‖	(γ) تحت (C_f)

3) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$f'(x)=-e^{-x}+\frac{e}{x^2}=\frac{-x^2e^{-x}+e}{x^2}=\frac{-\left(x^2e^{-x}-e\right)}{x^2}=\frac{-g(-x)}{x^2}$$

إتجاه تغيّر f الدالة :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(-x)$:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ ‖	$+$

و منه الدالة f متزايدة على كل من المجالين $]0;-1]$ و $]0;+\infty[$ متناقصة على المجال $]-\infty;-1[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

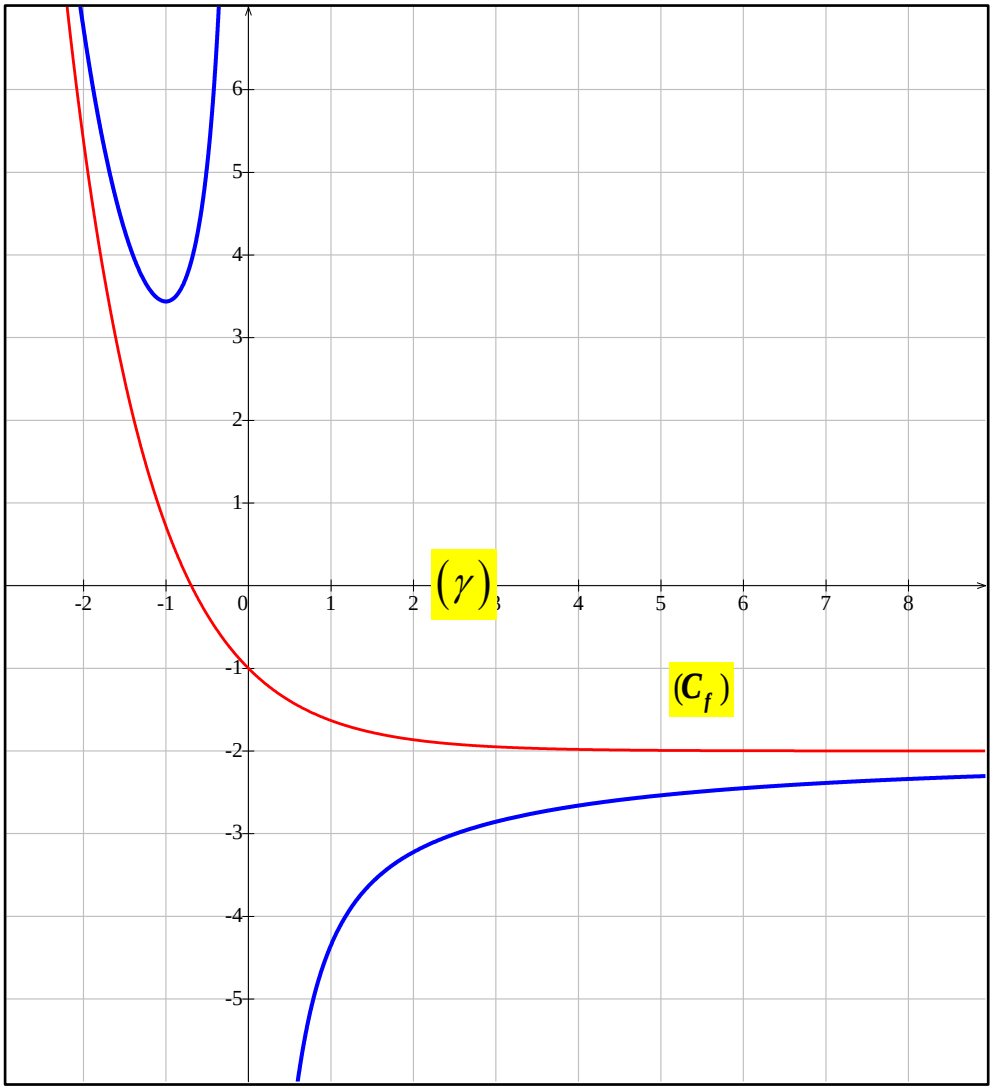
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$ ‖	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$2e-2$	↗ $+\infty$ ‖ $+\infty$	↗ $-\infty$

4) شرح كيفية إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x\mapsto e^x$:

لدينا : (γ) المنحنى ذي المعادلة $y=e^{-x}-2$

و منه (γ) هو صورة (Γ) منحنى الدالة $x\mapsto e^{-x}$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;-2)$ ، علما أن (Γ) هو نظير منحنى الدالة $x\mapsto e^x$ بالنسبة لحامل محور التراتيب .

الرسم :



5) n عدد طبيعي $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما:
$x=-e^{n+1}$ و $x=-e^{n}$.

$$A(n)=\int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}}\left[f(x)-e^{-x}+2\right]dx=\int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}}\left(-\frac{e}{x}\right)dx=-e\int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}}\left(\frac{1}{x}\right)dx=-e\left[\ln|x|\right]_{-e^{n+1}}^{-e^{n}}=e$$

حساب العدد الحقيقي l : $l=A(0)+A(1)+....+A(2016)=2017e$.

التمرين 11 باك 2018 م1 ن7

I g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) حيث : $(\Delta): y=2x+1$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x)=g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) أنشئ (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)\approx 0,8$).

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x=(1-m)e^{x}$

6) أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.

ب- أحسب العدد A مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$

حل مقترح للتمرين 11 باك 2018

I g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+(x-1)e^{-x}\right)=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+(x-1)e^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+xe^{-x}-e^{-x}\right)=2$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(x-1)=(2-x)e^{-x}$.

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x}>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $2-x$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		$-\quad 0\quad +$	

الدالة g متناقصة على المجال $[2;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty;2]$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↘	$2+e^{-2}$	↗	2

3)أ- تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ و $]-\infty;2]\subset]-\infty;+\infty[$ و $]-0,38;-0,37[$

$\begin{cases} g(-0.38)\approx -0,017 \\ g(-0.37)\approx 0,016 \end{cases}$

أي $g(-0,38)\times g(-0,37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$.

بـ- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

1)أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2+\dfrac{1}{x}-e^{-x}\right)\right]=-\infty$.

بـ- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=0$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) بحيث : $(\Delta): y=2x+1$.

لدينا : $f(x)-y=f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$		(C_f) تحت (Δ)

2)تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x)=g(x)$ ،

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$f'(x)=2+(-1)e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(-x)=2+(x-1)e^{-x}=g(x)$.

- إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، و منه نستنتج أن :

الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$.

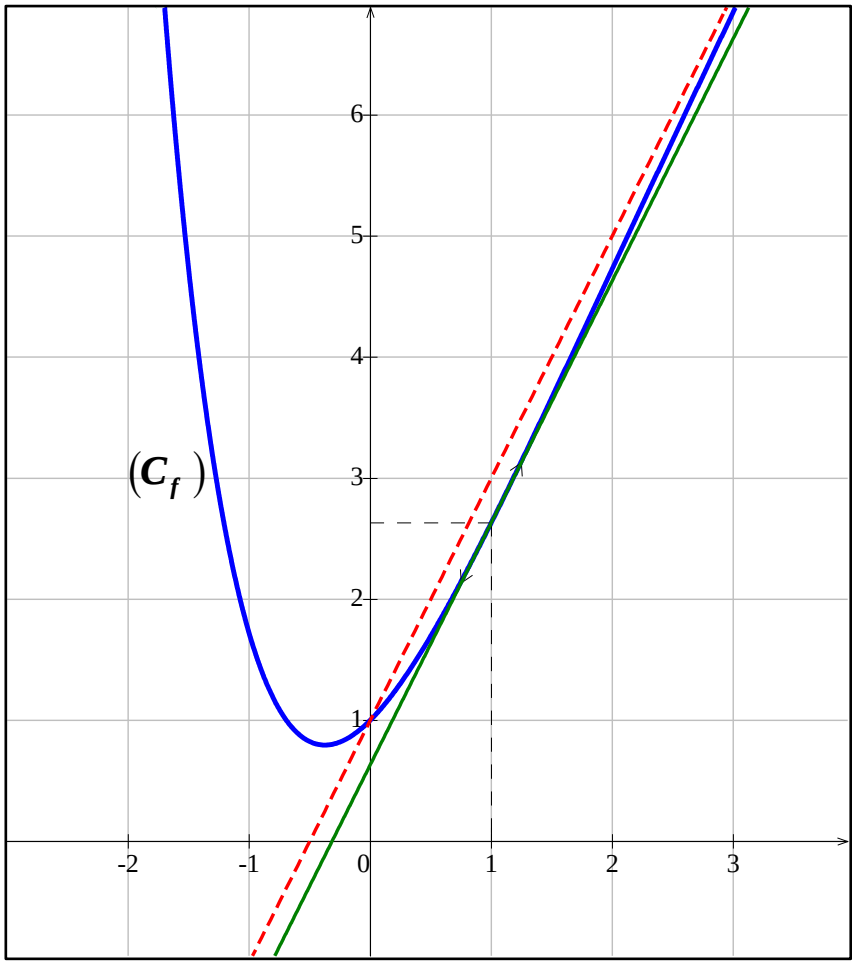
جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$+\infty$

3)كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

لدينا : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $y = 2x+1-\frac{1}{e}$ هي معادلة لـ (T).

4)الرسم :



5)المناقشة البيانية :

$x = (1-m)e^x$ تكافئ $xe^{-x} = (1-m)$ تكافئ $xe^{-x} = m-1$ تكافئ $2x+1-xe^{-x} = 2x+1+m-1$

أي $2x+1-xe^{-x} = 2x+m$ أي : $f(x) = 2x+m$ ⟵ مناقشة مائلة .

إذا كان $m \in \left]-\infty;1-\frac{1}{e}\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

إذا كان $m = 1-\frac{1}{e}$ المعادلة تقبل حل مضاعف .

إذا كان $m \in \left]1-\frac{1}{e};1\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما.

إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حل واحد معدوم.

إذا كان $m \in]1;+\infty[$ فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب تماما.

6)لتعيين دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x=1$.

الدالة $x \mapsto xe^{-x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=\int_1^x te^{-t}dt$.

نضع $u(t)=t$ ، $v'(t)=e^{-t}$ ومنه $u'(t)=1$ ، $v(t)=-e^{-t}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$F(x)=\left[-te^{-t}\right]_1^x-\int_1^x -e^{-t}dt=-xe^{-x}+e^{-1}-\int_1^x -e^{-t}dt=-xe^{-x}+e^{-1}-e^{-x}+e^{-1}=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$$

ومنه الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x=1$ هي: $F(x)=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$.

بحساب العدد A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$

$$A=\int_1^3\left((2x+1)-f(x)\right)dx=\int_1^3 xe^{-x}dx=F(3)-F(1)=2e^{-1}-4e^{-3}(u.a)$$

التمرين 12 باك 2019 م1 ن7

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$.

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x)=e^x-ex \quad \text{و} \quad f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2 .$$

1) أ ـ أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

بـ ـ إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f .

3) أحسب كلا من $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5) أرسم على المجال $[0;2]$ المنحيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (يعطى $e^2-2e\approx 2$)

6) أحسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) .

7) h الدالة المعرّفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي : $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ ـ بيّن أن الدالة h زوجية .

بـ ـ من أجل $x\in[0;2]$ أحسب $h(x)+f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .

حل مقترح للتمرين 12 باك 2019

$$f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2 \text{ و } g(x)=e^x-ex$$

1) أ ـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=e^x-e$

من أجل $x\in]-\infty;1]$ ، يكون $e^x\le e$ أي $g'(x)\le 0$ و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

من أجل $x\in[1;+\infty[$ ، يكون $e^x\ge e$ أي $g'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

بـ ـ إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

بما أن $g(1)=0$ و الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ فإن 0 قيمة حدّية صغرى للدالة g .

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)\ge 0$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^x-ex=g(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

3) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{2}ex^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{2}e\right)\right]=+\infty$$ لأن :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)=+\infty\end{cases}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x - \frac{1}{2}ex^2\right) = -\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty} e^x = 0\\ \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}ex^2\right) = -\infty\end{cases}$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	$+\infty$

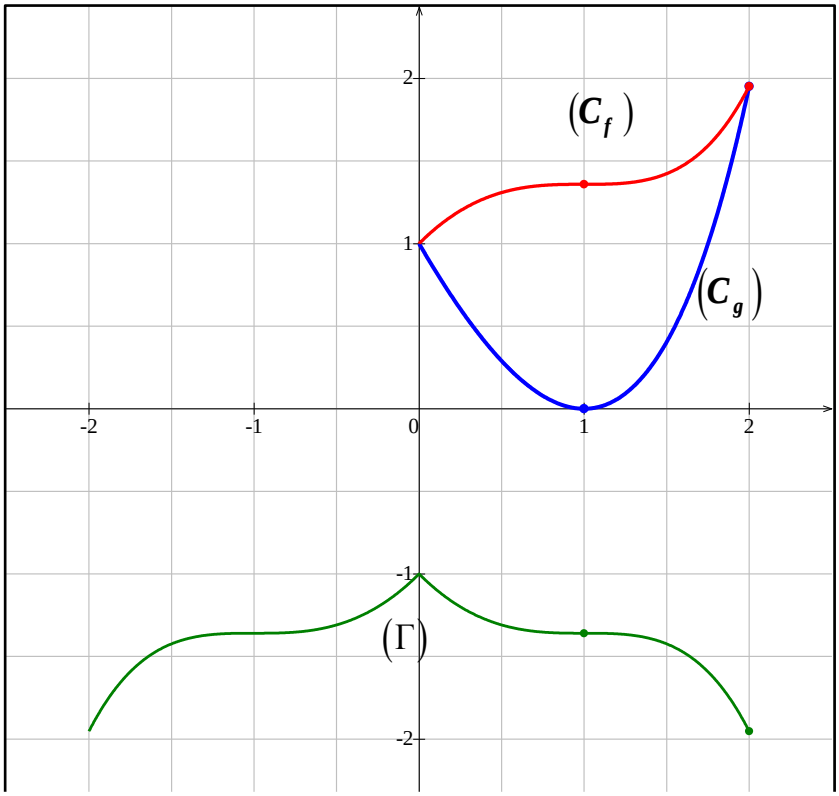
4) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$:

من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-g(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 - \left(e^x - ex\right) = -\frac{1}{2}ex^2 + ex = ex\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (C_g)	$A(0;1)$	(C_f) فوق (C_g)	$B\left(2;e^2-2e\right)$	(C_f) تحت (C_g)	

في النقطة $A(0;1)$ يقطع (C_f) (C_g) في النقطة $B\left(2;e^2-2e\right)$ يقطع (C_g) (C_f)

5) الرسم :



6) حساب مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g):

$$A=\int_0^2\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}ex^2+ex\right)dx=\left[-\frac{1}{6}ex^3+\frac{1}{2}ex^2\right]_0^2=-\frac{8}{6}e+2e=\frac{2e}{3}(ua)$$

ومنه $A=\frac{2e}{3}\times 4=\frac{8e}{3}cm^2$.

7) h الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي: $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$.

أ- تبيان أن الدالة h زوجية:

من أجل كل $x\in[-2;2]$ ، $-x\in[-2;2]$ و $h(-x)=\frac{1}{2}e(-x)^2-e^{|-x|}=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}=h(x)$.

ومنه الدالة h زوجية.

بـ- من أجل $x\in[0;2]$ ، $h(x)+f(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^x+e^x-\frac{1}{2}ex^2=0$.

استنتاج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f):

من أجل $x\in[0;2]$ ، $h(x)=-f(x)$ وبالتالي (Γ) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $[0;2]$.

ولرسم (Γ) على المجال $[-2;0]$ نستخدم كون الدالة h زوجية.

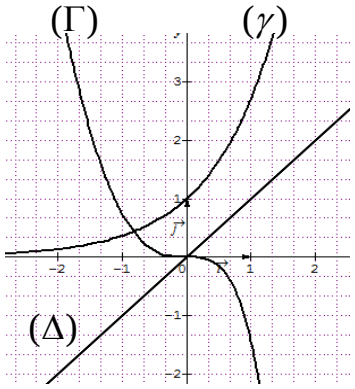
الرسم: أنظر الشكل.

التمرين 13 باك 2020 م1 ن7

I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

في الشّكل المرفق، (Γ) المنحنى الممثِّل للدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x^2+2x-2xe^x$

(Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=x$ و (γ) المنحنى الممثل للدالة: $x\mapsto e^x$.



بقراءة بيانية:

1) برّر أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x-x>0$

2) حدّد تبعا لقيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$ علما أنّ $g(0)=0$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-1+\dfrac{2e^x}{e^x-x}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ واحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ فسِّر نتيجتي النهايتين هندسيا.

2) أ . بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x)=\dfrac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$.

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكِّل جدول تغيّراتها.

3) أ . اكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) في النّقطة A ذات الفاصلة 0.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x يكون: $f(x)-(2x+1)=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$.

جـ. استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) على $\mathbb{R}$، ماذا تمثّل النقطة A بالنسبة إلى (C_f)؟

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1]$، ثم تحقق أنّ: $-0.5<\alpha<-0.6$.

5) أنشئ المماس (T) والمستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f).

حل مقترح للتمرين 13 باك 2020

I - $g(x)=2x^2+2x-2xe^x$ و $(\Delta): y=x$ و $(\gamma): y=e^x$ ...

1. بما أن (γ) يقع فوق المستقيم (Δ) و لا يتقاطعان فإن $e^x-x>0$.

2. إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	

II - لدينا $f(x)=-1+\dfrac{2.e^x}{e^x-x}$:

1. إثبات النهاية 1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-1+\dfrac{2.e^x}{e^x}\right]=1$ باستخدام التزايد المقارن. المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-1+\dfrac{2.e^x}{e^x-x}\right]=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2.e^x}{e^x-x}\right]=-0$. باستخدام التزايد المقارن. المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ مقارب للمنحنى (C_f) جهة $-\infty$

2. أ-إثبات عبارة المشتقة $f'(x)=\dfrac{2.e^x(e^x-x)-(e^x-1)2e^x}{(e^x-x)^2}$ أي $f'(x)=\dfrac{2e^x.(1-x)}{(e^x-x)^2}$ و هو المطلوب .

ب-إشارة المشتقة $f'(x)$ من إشارة $1-x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيراتها :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	-1	↗	$-1+\dfrac{2e}{e-1}$	↘	1

3. أ-معادلة المماس (T) :

$y=f'(0).x+f(0)$ أي أن

$y=2x+1$.

ب-إثبات مساواة : $f(x)-(2x+1)=-1+\dfrac{2.e^x}{e^x-x}-2x-1=-2x-2+\dfrac{2e^x}{e^x-x}=\dfrac{(-2x-2).(e^x-x)+2e^x}{e^x-x}$

أي $f(x)-(2x+1)=\dfrac{-2xe^x+2x^2-2e^x+2x+2e^x}{e^x-x}$ أي $f(x)-(2x+1)=\dfrac{-2xe^x+2x^2+2x}{e^x-x}$ إذن $f(x)-(2x+1)=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$

و هو المطلوب .

ج-استنتاج الوضعية :

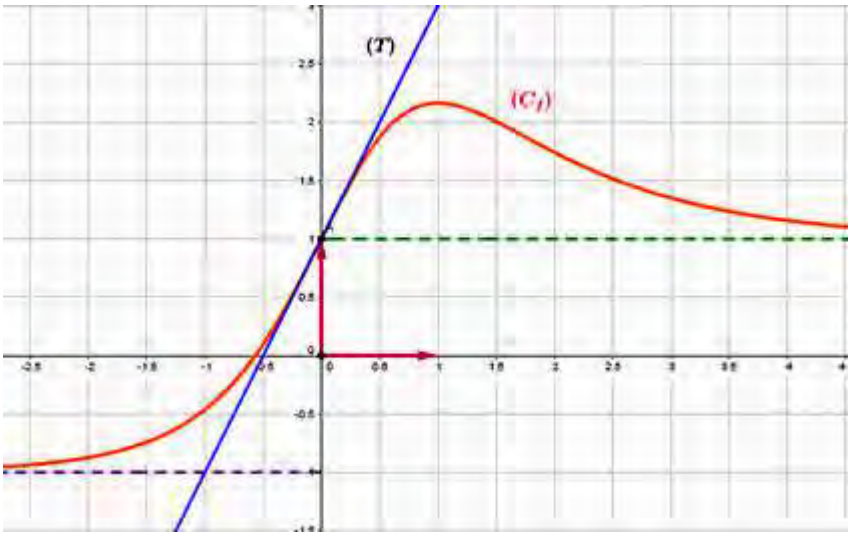
إشارتها من إشارة $g(x)$: $f(x)-y=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية	(T) يقع فوق (C_f)		(T) يقطع (C_f)		(T) يقع تحت (C_f)

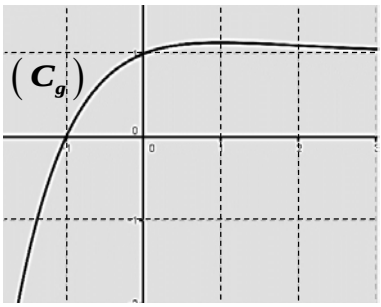
و منه النقطة A هي نقطة الانعطاف لأن المماس (T) اخترق المنحنى (C_f) .

4. مبرهنة القيم المتوسطة $f(-0,5)=0,096$ و $f(-0,6)=-0,04$ بما أن الدالة مستمرة و متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $-0,6<\alpha<-0,5$

5. إنشاء المستقيمين المقاربين و المماس
(T) و المنحنى (C_f) :



التمرين 14 باك 2021 م1 ن7



I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+xe^{-x-1}$، (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل)

1) احسب $g(-1)$.

2) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)e^{-x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) تَحقّق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم: $f(x)=x[1-(1+\frac{1}{x})e^{-x-1}]$

ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$

ب. استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;-1[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثمّ فسّر النّتيجة هندسيا.

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$

جـ. بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

4) أ. بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β

حيث: $0,3<\alpha<0,4$ و $-1,9<\beta<-1,8$

ب. ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثمّ ارسم المنحنى (C_f) على المجال $]-2;+\infty[$.

5) الدّالة العددية h معرّفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $h(x)=-|x|+(|x|-1)e^{|x|-1}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[-2;0]$: $h(x)=f(x)$

جـ. اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ ارسمه.

حل مقترح للتمرين 14 باك 2021

I -الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=1+x.e^{-x-1}$

1. حساب $g(-1)=1-1.e^{1-1}=0$
2. تحديد إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$-$	0	$+$	

II - الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x-(x+1).e^{-x-1}$

1. التحقق : من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right).e^{-x-1}\right]$ بالنشر x نجد

$$x.\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right).e^{-x-1}\right]=x-(x+1).e^{-x-1}=f(x)$$

حساب النهايات :

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1).e^{-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}x.e^{-x-1}=0$ باستخدام التزايد المقارن فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x]=+\infty$.

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right).e^{-x-1}\right]=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right).e^{-x-1}\right]=+\infty$.

2. أ- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$ لدينا: $f(x)=x-(x+1).e^{-x-1}$ و منه
$f'(x)=1-.e^{-x-1}+(x+1).e^{-x-1}$ أي أن $f'(x)=1+x..e^{-x-1}=g(x)$ محققة .

ب-بما أن $f'(x)=g(x)$ و من جدول إشارة $g(x)$ نستنتج أن f متزايدة على المجال $[-1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;-1]$.

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3. أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1).e^{-x-1}=0$ باستخدام التزايد المقارن و منه $y=x$ معادلة المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f).

ب-دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=x$: لدينا $[f(x)-x]=(x+1).e^{-x-1}$ إشارة الفرق من إشارة $(x+1)$

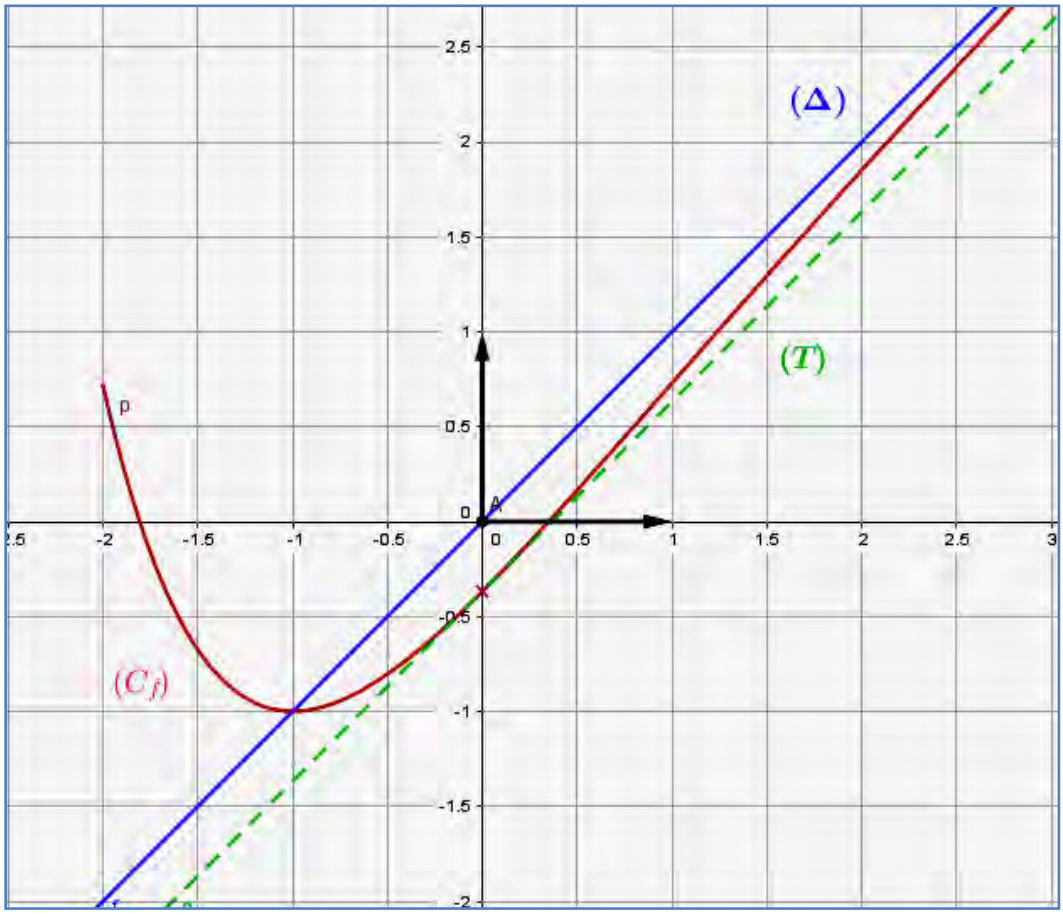
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $x+1$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) يقع تحت (Δ)		(C_f) يقع فوق (Δ)	
			(C_f) و (Δ) يتقاطعان		

جـ-إثبات أن (C_f) يقبل مماساً (T) موازي للمستقيم (Δ) يعني أن للمعادلة $f'(x)=1$ تقبل حلاً أي أن $g(x)=1$ يعني $1+x.e^{-x-1}=1$ يكافئ $x.e^{-x-1}=0$ يكافئ أن $x=0$ إذن $(T): y=x+f(0)$ و منه $(T): y=x-e^{-1}$ إذن $(T): y=x-\frac{1}{e}$

4. أ- لدينا $f(0,4)=0,05$ و $f(0,3)=-0,05$ و الدالة متزايدة و مستمرة على المجال $[0,3\,;\,0,4]$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $0,3<\alpha<0,4$

ولدينا $f(-1,8)=-0,01$ و $f(-1,9)=0,3$ و الدالة متناقصة و مستمرة على المجال $[-1,8\,;\,-1,9]$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها β حيث $-1,9<\beta<-1,8$

ب-رسم (T) و (Δ) و (C_f) على المجال $]-2;+\infty[$



5. الدالة العددية h المعرفة على $[-2;2]$ بـ $h(x)=-|x|+(|x|-1)e^{|x|-1}$

أ - لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;2]$: $h(-x)=-|-x|+(|-x|-1)e^{|-x|-1}=-|x|+(|x|-1)e^{|x|-1}=h(x)$

و منه h دالة زوجية .

ب -إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0]$: $h(x)=f(x)$

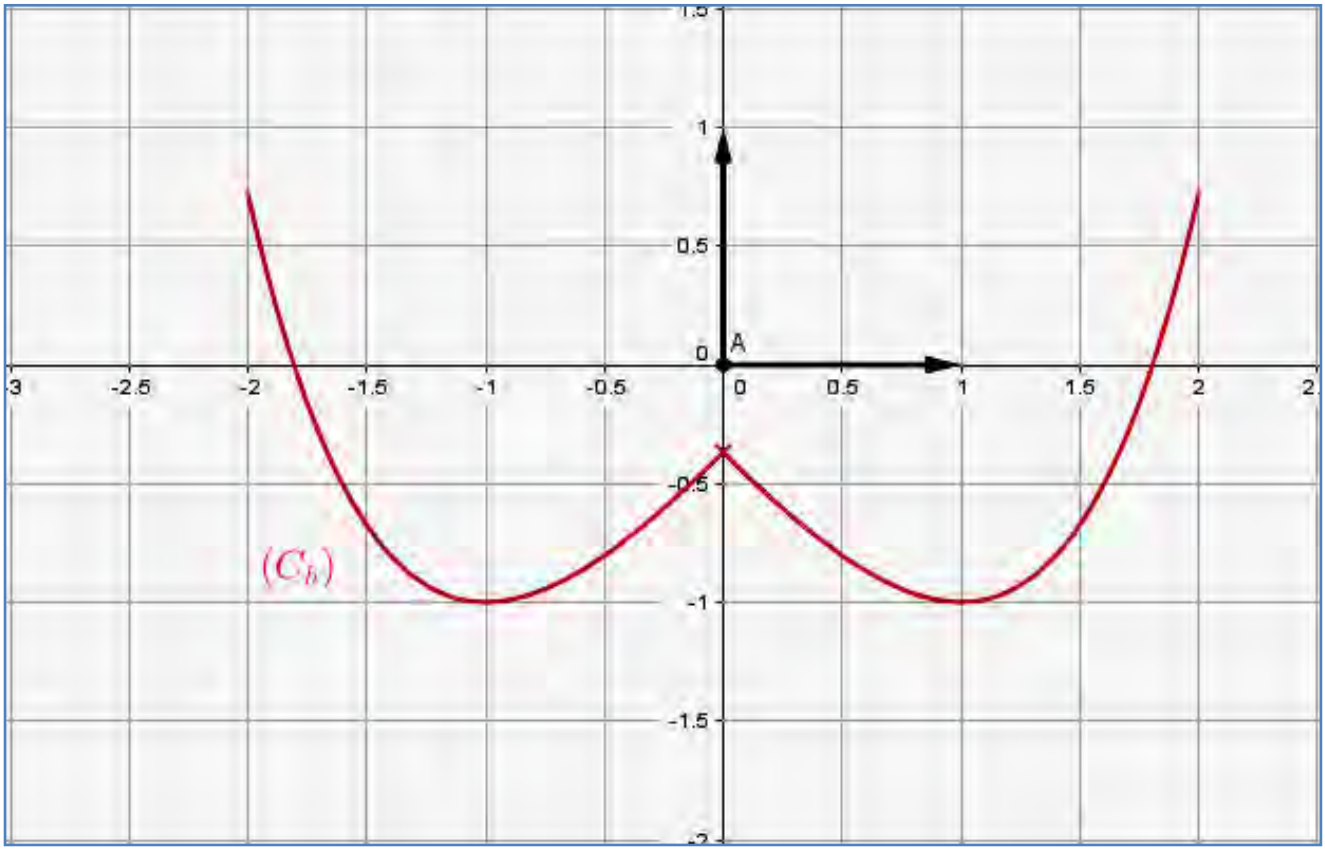
من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0]$: $|x|=-x$ و منه

$h(x)=f(x)$ إذن $h(x)=x-(x+1)e^{-x-1}$ و منه $h(x)=-|x|+(|x|-1)e^{|x|-1}=x+(-x-1)e^{-x-1}$

من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0]$: $h(x)=f(x)$.

جـ- من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0]$: $h(x)=f(x)$ ومنه (C_f) و (C_h) منطبقان على المجال $[-2;0]$

و بما h دالة زوجية فإن (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب



حلول تمارين الدوال الأسّية الواردة في الباكالوريا

شعبة: رياضيات

التمرين 1 بالك 2008 م2 7,5 نق

الجزء I :

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\dfrac{4}{e^x+1}$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيّرات الدالة f .

2. بيّن أنّ $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف ω واكتب معادلة لمماس $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ω .

ـ اثبت أنّ ω مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_f)$.

3. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$.

ـ استنتج أنّ $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.

4. بيّن أنّ $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,77;-2,76[$.

ـ احسب $f(1)$ ، $f(-1)$ (تدوّر النتائج إلى 10^{-2}) ثمّ ارسم $(\mathcal{C}_f)$ ومستقيميه المقاربين.

الجزء II :

g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=-x+3-\dfrac{4}{e^x+1}$.

$(\mathcal{C}_g)$ منحنى الدالة g .

1. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=f(-x)$.

ـ استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحوّل $(\mathcal{C}_f)$ إلى $(\mathcal{C}_g)$.

2. أنشئ في نفس المعلم السابق، المنحني $(\mathcal{C}_g)$ (دون دراسة الدالة g).

حل مقترح للتمرين 1 بالك 2008

الجزء I : f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\dfrac{4}{e^x+1}$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. دراسة تغيّرات الدالة f .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x-1+\dfrac{4}{e^x+1}=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\dfrac{4}{e^x+1}=+\infty$ ؛

$$f'(x)=1-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

	$+\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$	↗	

2. تبيين أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف ω :

لدينا الدالة f متزايدة تماما والمشتقة f' تنعدم عند 0

إذا المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا موازيا لمحور التراتيب عند النقطة $\omega(0;1)$ الذي يخترقه فيها وبالتالي $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وهي ω

- كتابة معادلة لمماس $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ω :

معادلة المماس عند ω هي $y=1$.

- إثبات أن ω مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_f)$:

لدينا $2\times 0-x=-x$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $(-x)\in\mathbb{R}$ لأن لكل عدد حقيقي له معاكس.

$$f(2\times 0-x)=f(-x)=-x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}=-x-1+\frac{4e^x}{1+e^x}$$

$$=-x+\frac{3e^x-1}{1+e^x}$$

$$2\times 1-f(x)=2-x+1-\frac{4}{e^x+1}=-x+\frac{3e^x-1}{e^x+1}$$

إذا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(2\times 0-x)=2\times 1-f(x)$

وبالتالي $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_f)$.

3. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x+1}=0$$

و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{e^x+1}-4=0$.

- استنتاج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=x-1$ وهذا في $(+\infty)$.

ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=0$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=x+3$ وهذا في $(-\infty)$.

4. تبيين أن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,77;-2,76[$:

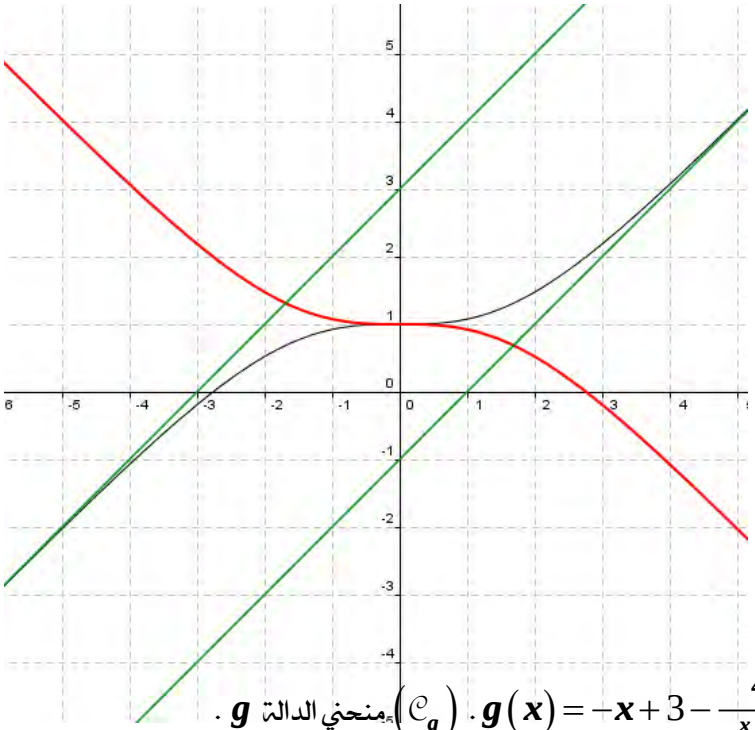
لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذا هي كذلك على المجال $[-2,77;-2,76]$ ولدينا

$f(-2,76)\approx 0,0019$ و $f(-2,77)\approx -0,0586$ إذا $f(-2,77)\times f(-2,76)<0$ ؛

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من المجال $]-2,76;$

في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,77;-2,76[$.

- حساب $f(1)$ ، $f(-1)$
$f(1)\approx 1,08$ ، $f(-1)\approx 0,92$.
- رسم $(\mathcal{C}_f)$ ومستقيميه المقاربين:



الجزء II :

g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=-x+3-\dfrac{4}{e^x+1}$. $(\mathcal{C}_g)$ منحنى الدالة g .

1. تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=f(-x)$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ،
$$f(-x)=-x+\frac{3e^x-1}{1+e^x}$$
$$f(-x)=-x+\frac{3e^x+3-4}{1+e^x}=-x+\frac{3(e^x+1)}{1+e^x}-\frac{4}{1+e^x}=-x+3-\frac{4}{1+e^x}$$
إذا $f(-x)=g(x)$

- استنتاج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول $(\mathcal{C}_f)$ إلى $(\mathcal{C}_g)$.

لدينا $g(x)=f(-x)=2-f(x)$

لتكن $M(x,y)$ نقطة من $(\mathcal{C}_f)$ و $M'(x',y')$ نقطة من $(\mathcal{C}_g)$ حيث $x'=-x$ لدينا $y=f(x)$ و

$y'=g(x')=f(-x')=f(x)=y$ إذا يوجد تحويل نقطي بسيط يحول $(\mathcal{C}_f)$ إلى $(\mathcal{C}_g)$ معرف بـ: $\begin{cases}x'=-x\\y'=y\end{cases}$ وهو

التناظر المحوري الذي محوره (yy').

2. إنشاء في نفس المعلم السابق، المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ (دون دراسة الدالة g).

التمرين 2 باك 2010 م2 ن7

الجزء I :

g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(3-x)e^x-3$.

1. ادرس تغيّرات الدالة g .
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2,82<\alpha<2,83$.
3. استنتج أشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء II

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1};\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. بيّن أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ ، اكتب معادلة لـ (T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ عند المبدأ O.
2. أ- بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=0$ ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل $x\neq 0$ فإنّ: $f'(x)=\dfrac{x^2}{(e^x-1)}g(x)$.

جـ- تحقق أنّ $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$ ثمّ عيّن حصرا له.

د- أنشئ جدول تغيّرات الدالة f .

- احسب $f(x)+x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة $x\mapsto -x^3$

- بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^3\right]=0$ وفسّر النتيجة هندسيا.

- أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}_f)$.

حل مقترح للتمرين 2 باك 2010

الجزء I

g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(3-x)e^x-3$

1. دراسة تغيّرات الدالة g :

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

إذا $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}3e^x-xe^x-3=-3$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)=-\infty$

إذا $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)e^x=-\infty$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1};\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$g'(x)=-e^x+(3-x)e^x=(2-x)e^x$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x>0$ إذن إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(2-x)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-3	↗	e^2-3	↘	$-\infty$

2. تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2,82<\alpha<2,83$

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ومتزايدة تماما على $]-\infty;2]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-3;e^2-3]$ و $0\in]-3;e^2-3]$ إذا المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty;2]$ ولدينا أيضا الدالة g متناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;e^2-3]$ و $0\in]e^2-3;-\infty[$ إذا المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[2;+\infty[$ وعليه فالمعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

لدينا $g(0)=(3-0)e^0-3=3-3=0$ ومنه 0 حل للمعادلة $g(x)=0$.

ولدينا $g(2,82)\approx 0,0198$ و $g(2,83)\approx -0,119$ إذن $g(2,83)\times g(2,82)<0$ وعليه فحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α حيث $2,82<\alpha<2,83$ و $g(\alpha)=0$.

3. استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الجزء II

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1};\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تبيين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(e^x-1)^2}(e^x-1)$$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{e^x-1}\right)^2=1$

إذا $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(e^x-1)^2}(e^x-1)=0$ أي $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

ـ معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند المبدأ O: $y=f'(0)x-f(0)$ ومنه $y=0$

2. أ ـ تبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(e^{-\frac{1}{3}x}\right)^3=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{3}x}\right)^3=\lim_{x\to+\infty}\left(3\times\frac{1}{3}xe^{-\frac{1}{3}x}\right)^3$$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -27\left(-\frac{1}{3}xe^{-\frac{1}{3}x}\right)^3$

نضع $t=-\frac{1}{3}x$ ولدينا $\lim\limits_{t\to-\infty} te^t = 0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = \lim\limits_{t\to-\infty} -27\left(te^t\right)^3 = 0$

ـ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x\left(1-e^{-x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)} = 0$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

ـ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{e^x-1} = +\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$

ب ـ تبيين أنه من أجل $x \neq 0$ فإن: $f'(x) = \frac{x^2}{\left(e^x-1\right)^2} g(x)$:

ليكن x عددا حقيقيا غير معدوم: $f'(x) = \frac{3x^2\left(e^x-1\right)-x^3e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$

أي $f'(x) = \frac{x^2\left[3e^x-3-xe^x\right]}{\left(e^x-1\right)^2} = \frac{x^2\left[(3-x)e^x-3\right]}{\left(e^x-1\right)^2} = \frac{x^2}{\left(e^x-1\right)^2} g(x)$

جـ ـ تحقق أن $f(\alpha) = \alpha^2(3-\alpha)$:

$f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{e^\alpha-1}$ ولدينا $g(\alpha) = 0$ معناه $(3-\alpha)e^\alpha - 3 = 0$ أي $e^\alpha = \frac{3}{(3-\alpha)}$

إذن $f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\frac{3}{3-\alpha}-1} = \frac{\alpha^3}{\frac{3-3+\alpha}{3-\alpha}} = \frac{\alpha^3(3-\alpha)}{\alpha} = \alpha^2(3-\alpha)$.

ـ حصر العدد $f(\alpha)$: لدينا $2,82 < \alpha < 2,83$ معناه $(2,82)^2 < \alpha^2 < (2,83)^2$ أي $7,9524 < \alpha^2 < 8,0089$

ولدينا $2,82 < \alpha < 2,83$ معناه $3-2,83 < 3-\alpha < 3-2,82$ أي $0,17 < 3-\alpha < 0,18$

إذا $7,9524\times0,17 < \alpha^2(3-\alpha) < 0,18\times8,0089$ أي $1,351908 < f(\alpha) < 1,441602$

د ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

3. حساب $f(x)+x^3$:

$$f(x)+x^3=\frac{x^3}{e^x-1}+x^3=\frac{x^3+x^3e^x-x^3}{e^x-1}=\frac{x^3e^x}{e^x-1}$$

ـ الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C) حيث (C) منحني الدالة $x\mapsto -x^3$.

	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$	
$\frac{x^3}{e^x-1}$		$+$	‖	$+$	
$f(x)+x^3$		$+$	0	$+$	
الوضعية	(C_f) يقع فوق (C)		(C_f) يقطع (C) في المبدأ O	(C) يقع فوق (C_f)	

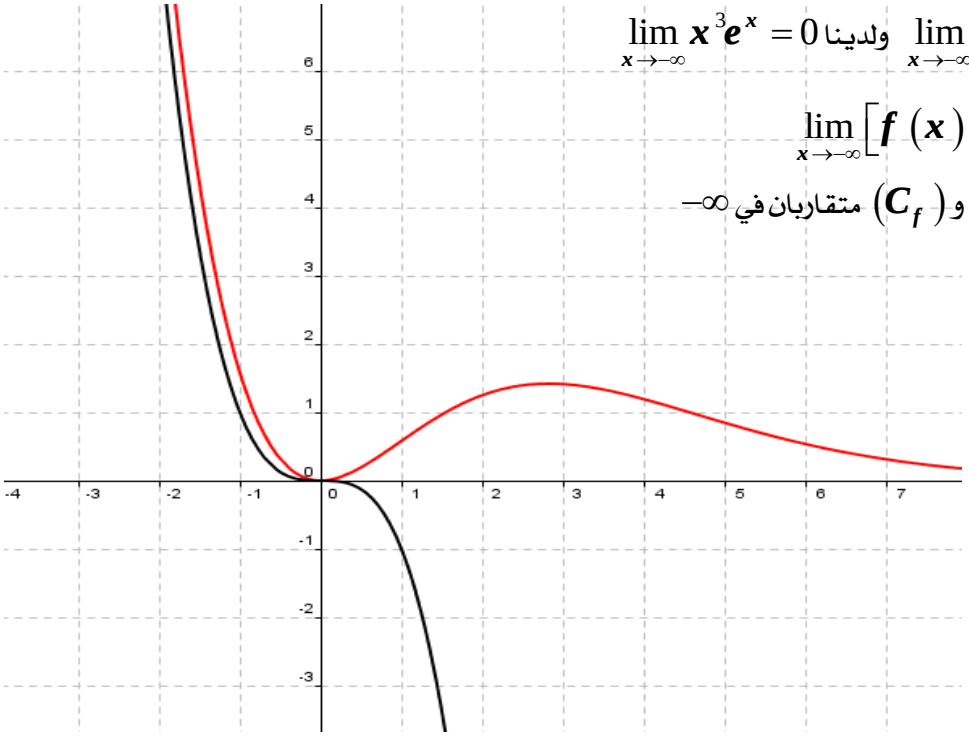
ـ تبيين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^3\right]=0$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x-1=-1$ ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^x=0$

إذا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3e^x}{e^x-1}=0$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^3\right]=0$

ـ التفسير الهندسي للنهاية: المنحنيان (C) و (C_f) متقاربان في $-\infty$

4. إنشاء (T) والمنحنيين (C) و (C_f)



التمرين 3 باك 2011 م1 7 ن

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(3x+4)e^x$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ ثمّ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$f^{(n)}(x)=(3x+3n+4)e^x$$

حيث: f' ، f'' ، ... ، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f .

ب- استنتج حلا للمعادلة التفاضلية: $y''=(3x+16)e^x$.

2.أ- بيّن أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ وفسّر النتيجة هندسيا.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3.أ- اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ω التي فاصلتها $\frac{-10}{3}$.

ب- بيّن أن ω هي نقطة انعطاف المنحني $(\mathcal{C}_f)$.

جـ- ارسم (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty;0]$.

4.أ- x عدد حقيقي من المجال $]-\infty;0]$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^{x} te^t\,dt$ ثمّ استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

ب- λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$.

- احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيّز من المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=-\frac{4}{3}$ و $x=\lambda$ ، ثمّ جد $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$.

حل مقترح للتمرين 3 باك 2011

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(3x+4)e^x$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ- حساب $f'(x)$ و $f''(x)$:

$$f'(x)=3e^x+(3x+4)e^x=(3x+7)e^x$$

$$f''(x)=3e^x+(3x+7)e^x=(3x+10)e^x$$

- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=(3x+3n+4)e^x$:

من أجل $n=1$ لدينا: $f'(x)=(3x+7)e^x$ و $(3x+3+4)e^x=(3x+7)e^x$ إذا $f'(x)=(3x+3+4)e^x$ ومنه الخاصية الابتدائية محققة.

نفرض أن $f^{(p)}(x)=(3x+3p+4)e^x$ من أجل عدد طبيعي غير معدوم p ولنبرهن أن $f^{(p+1)}(x)=[3x+3(p+1)+4]e^x$.

لدينا $f^{(p+1)}(x)=\left(f^{(p)}\right)'(x)=3e^x+(3x+3p+4)e^x$

أي $f^{(p+1)}(x)=(3x+3p+4+3)e^x=[3x+3(p+1)+4]e^x$ ،

إذا الخاصية $f^{(p+1)}(x)=[3x+3(p+1)+4]e^x$ صحيحة

وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=(3x+3n+4)e^x$.

ب ـ استنتاج حلا للمعادلة التفاضلية $y''=(3x+16)e^x$:

لدينا $f^{(4)}(x)=(3x+3\times4+4)e^x$ أي $f^{(4)}(x)=(3x+16)e^x$

ومنه $y=f''(x)+ax+b$ مع a و b عددين حقيقيين ،

أي $y=(3x+10)e^x+ax+b$ مع a و b عددين حقيقيين

2. أ ـ تبيين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$: لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3x+4)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}3xe^x=0$

- التفسير الهندسي: $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ إذا المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ (حامل محور الفواصل).

ب ـ دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=(3x+7)e^x$ و $e^x>0$ ومنه:

من أجل $x=-\frac{7}{3}$ لدينا $3x+7=0$ أي $f'(x)=0$

من أجل $x\in\left]-\infty;-\frac{7}{3}\right[$ لدينا $3x+7<0$ أي $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;-\frac{7}{3}\right]$.

من أجل $x\in\left]-\frac{7}{3};+\infty\right[$ لدينا $3x+7>0$ أي $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\left[-\frac{7}{3};+\infty\right[$.

- جدول تغيرات الدالة f :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+4)=+\infty$ إذا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-2,9$	↗	$+\infty$
			0		

3. أ ـ معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ω التي فاصلتها $\frac{-10}{3}$:

$f\left(-\frac{10}{3}\right)=(-10+4)e^{-\frac{10}{3}}=-6e^{-\frac{10}{3}}$ ؛ $f'\left(-\frac{10}{3}\right)=-3e^{-\frac{10}{3}}$

ومنه: $y=-3e^{-\frac{10}{3}}\left(x+\frac{10}{3}\right)-6e^{-\frac{10}{3}}=-3e^{-\frac{10}{3}}\left(x+\frac{16}{3}\right)$

ب ـ تبيين أن ω هي نقطة انعطاف المنحنى $(\mathcal{C}_f)$:

ليكن x عددا حقيقيا، لدينا $f''(x)=(3x+10)e^x$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $3x+10$.

x	$-\infty$		$-\frac{10}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

إذا $f''(x)$ ينعدم ويغيّر من إشارته عند $-\frac{10}{3}$ وبالتالي المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف $\omega\left(-\frac{10}{3};-6e^{-\frac{10}{3}}\right)$.

جـ ـ رسم (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty;0]$:

4. أ ـ x عدد حقيقي من $]-\infty;0]$، باستعمال التكامل بالتجزئة إيجاد $\int_{-1}^{x} te^t\,dt$:

نضع $\begin{cases}u(t)=t\\v'(t)=e^t\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(t)=1\\v(t)=e^t\end{cases}$

$$\int_{-1}^{x} te^t\,dt=\int_{-1}^{x} u(t)v'(t)\,dt=\left[u(t)v(t)\right]_{-1}^{x}-\int_{-1}^{x} u'(t)v(t)\,dt$$

$$=\left[te^t\right]_{-1}^{x}-\int_{-1}^{x} e^t\,dt=\left[te^t-e^t\right]_{-1}^{x}=(x-1)e^x+2e^{-1}$$

- استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$:

$f(x)=(3x+4)e^x$،

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt=\int_{-1}^{x}(3t+4)e^t\,dt$$

$$=\int_{-1}^{x} 3te^t+4e^t\,dt=3(x-1)e^x+6e^{-1}+4\left[e^t\right]_{-1}^{x}$$

$$=3(x-1)e^x+6e^{-1}+4e^x-4e^{-1}$$

$$=(3x+1)e^x+2e^{-1}$$

ب- λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$.

- حساب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيّز من المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=-\frac{4}{3}$ و $x=\lambda$:

$$A(\lambda)=\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} -f(t)\,dt=\int_{-\frac{4}{3}}^{\lambda} f(t)\,dt=\left[(3t+1)e^{t}\right]_{-\frac{4}{3}}^{\lambda}$$

$$=(3\lambda+1)e^{\lambda}-(-3)e^{-\frac{4}{3}}$$

$$=\left[(3\lambda+1)e^{\lambda}+3e^{-\frac{4}{3}}\right]ua$$

- إيجاد $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$:

لدينا $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}(3\lambda+1)e^{\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}3\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda}=0$ ومنه $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=3e^{-\frac{4}{3}}$.

التمرين 4 باك 2012 م2 7 ن

الجزء I

g هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2-xe^x$.

1. ادرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثمّ تحقق أنّ: $0,8<\alpha<0,9$.
3. عيّن، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

الجزء II

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1};\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x+2}{e^x+2}$.

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (وحدة الطول $2\ cm$).

1. بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
2. أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنّ المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

3. ادرس وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى كل من (Δ') و (Δ)، حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.
4. أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f.

ب- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\alpha$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

5. ارسم (Δ)، (Δ') و $(\mathcal{C}_f)$.
6. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x)=f(m)$.

الجزء III

(u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. برهن بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n<\alpha$.
2. باستعمال (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$ ، مثل على محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 و u_2 ، ثمّ خمّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).
3. برهن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثمّ احسب نهايتها.

حل مقترح للتمرين 4 باك 2012

الجزء I

g هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2-xe^x$.

1. دراسة تغيّرات الدالة g :

الدالتان $x \mapsto -x$ و $x \mapsto e^x$ تقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذا الدالة $x \mapsto -xe^x$ هي كذلك لكونها جداء دالتين، ومنه الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن x عددا حقيقيا، $g'(x) = -e^x - xe^x = (-x-1)e^x$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$

ومنه إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $-x-1$ ؛ وعليه: $g'(-1) = 0$ ؛

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ ، $g'(x) < 0$ إذا الدالة g متناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$ ؛

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;-1[$ ، $g'(x) > 0$ إذا الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 - xe^x = 2$ ؛

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - xe^x = -\infty$.

- جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$g(x)$	2	↗		↘	$2+e^{-1}$ ‖ 0	↘	$-\infty$

2. تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ إذا هي مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ و $[-1;+\infty[$ ؛

من أجل $x \in [-1;+\infty[$ لدينا $g(x) \in]2;2+e^{-1}]$ إذا $g(x) \neq 0$.

لدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $[-1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2+e^{-1}]$ إذن لكل عدد حقيقي من $]-\infty;2+e^{-1}]$ له سابقة وحيدة في المجال $[-1;+\infty[$ بواسطة الدالة g وبالأخص العدد 0 له سابقة وحيدة α في $[-1;+\infty[$ أي $g(\alpha) = 0$

خلاصة: المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$:

- تحقق أن: $0,8 < \alpha < 0,9$:

لدينا $g(0,8) \approx 0,22$ و $g(0,9) \approx -0,21$ إذا $g(0,9) \times g(0,8) < 0$

ومنه $0,8 < \alpha < 0,9$.

3. تعيين، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;\alpha[$ ، $g(x) > 0$ ؛

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha;+\infty[$ ، $g(x) < 0$ و $g(\alpha) = 0$.

الجزء II

f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{2x+2}{e^x+2}$. $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (وحدة الطول 2 cm).

1. تبيين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{e^x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\times\frac{2+\frac{2}{x}}{1+2e^{-x}}$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ ، $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ إذا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\times 2=0$.

- التفسير الهندسي:

المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ (محور الفواصل) عند $+\infty$.

2.أ-حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

لدينا $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2}{e^x+2}=-\infty$

ب-تبيين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x)-(x+1)=\frac{2x+2}{e^x+2}-x-1$

أي $f(x)-(x+1)=\frac{2x+2-xe^x-2x-e^x-2}{e^x+2}=\frac{-xe^x-e^x}{e^x+2}$

لدينا $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$

إذا $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-xe^x-e^x}{e^x+2}=0$ ؛ ومنه المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ') معادلته $y=x+1$ عند $-\infty$.

3. دراسة وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ'):

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)-(x+1)=\frac{-xe^x-e^x}{e^x+2}=\frac{(-x-1)e^x}{e^x+2}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x-1$	$+$	0	$-$		
$f(x)-(x+1)$	$+$	0	$-$		
الوضعية	$(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (Δ')		$(\mathcal{C}_f)$ يقع أسفل (Δ')		

$(\mathcal{C}_f)$ و (Δ') متقاطعان في النقطة $A(-1;0)$

- دراسة وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ)، ((Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$):

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f(x)-x=\frac{2x+2}{e^x+2}-x=\frac{2x+2-xe^x-2x}{e^x+2}=\frac{2-xe^x}{e^x+2}=\frac{g(x)}{e^x+2}$$

إشارة $f(x)-x$ هي من نفس إشارة $g(x)$ وحسب السؤال 3. من الجزء الأول لدينا: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)>0$ ؛

من أجل كل

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضعية	$(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (Δ)		$(\mathcal{C}_f)$ يقع أسفل (Δ)

$(\mathcal{C}_f)$ و (Δ) متقاطعان في النقطة $B(\alpha;\alpha)$

4. أ- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{\left(e^x+2\right)^2}$:

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f'(x)=\frac{2\left(e^x+2\right)-(2x+2)e^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\frac{2e^x+4-2xe^x-2e^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\frac{4-2xe^x}{\left(e^x+2\right)^2}$$

$$=\frac{2\left(2-xe^x\right)}{\left(e^x+2\right)^2}=\frac{2g(x)}{\left(e^x+2\right)^2}$$

- استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ ومنه: $f(\alpha)=g(\alpha)=0$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)>0$ أي $f'(x)>0$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)<0$ أي $f'(x)<0$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;\alpha[$ ومتناقصة تماما على $]\alpha;+\infty[$.

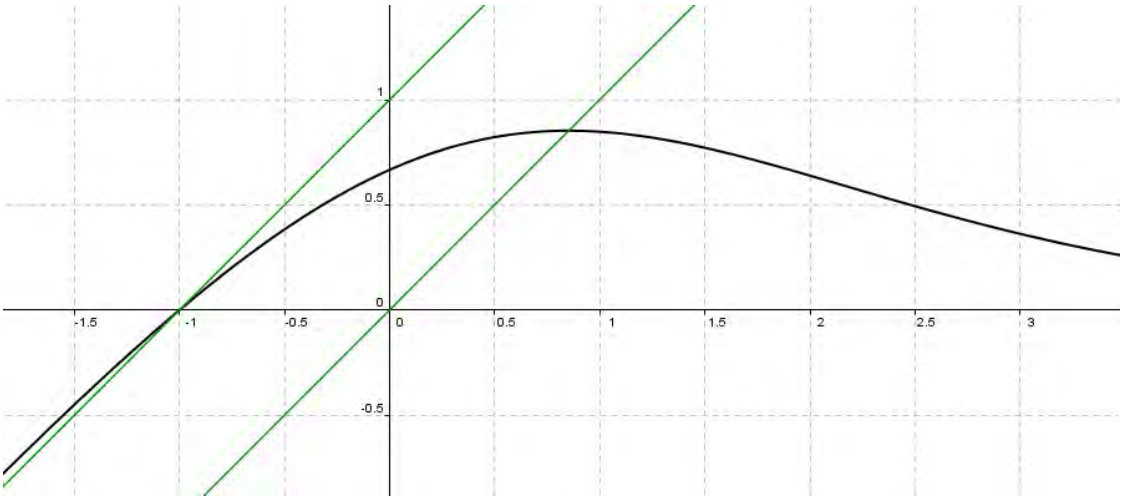
ب- تبيين أن: $f(\alpha)=\alpha$:

لدينا $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{e^x+2}$ ومنه $f(\alpha)-\alpha=\dfrac{g(\alpha)}{e^\alpha+2}=0$ إذا $f(\alpha)=\alpha$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	α	0

5. رسم (Δ)، (Δ') و $(\mathcal{C}_f)$:



6. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x)=f(m)$:

إذا كان $m\le -1$ فإن $f(m)\le 0$

ومنه المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلا واحدا.

إذا كان $m=\alpha$ فإن $f(m)=\alpha$ ومنه المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلا واحدا.

إذا كان $m\in]-1;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ فإن $f(-1)<f(m)<f(\alpha)$ ومنه $f(m)<\alpha$ إذا المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين.

الجزء III (u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. البرهان بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<\alpha$:

لدينا $u_0=0$ ومنه $0\le u_0<\alpha$ إذا الخاصية الابتدائية محققة.

نفرض أن $0\le u_n<\alpha$ ولنبرهن صحة الخاصية $0\le u_{n+1}<\alpha$

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ وعليه فإذا كان $0\le u_n<\alpha$ فإن $f(0)\le f(u_n)<f(\alpha)$

بما أن $f(0)=\frac{3}{2}$ ، $f(u_n)=u_{n+1}$ و $f(\alpha)=\alpha$ فإن $\frac{3}{2}\le u_{n+1}<\alpha$

ومنه $0\le u_{n+1}<\alpha$ إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<\alpha$.

2. تمثيل على محور الفواصل

الحدود: u_0 ، u_1 و u_2 :

لدينا $u_0=0$ ،

$u_1=f(u_0)$

و $u_2=f(u_1)$

- تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا من الشكل $u_0<u_1<u_2$

إذا يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة.

3. البرهان أن المتتالية (u_n) متقاربة:

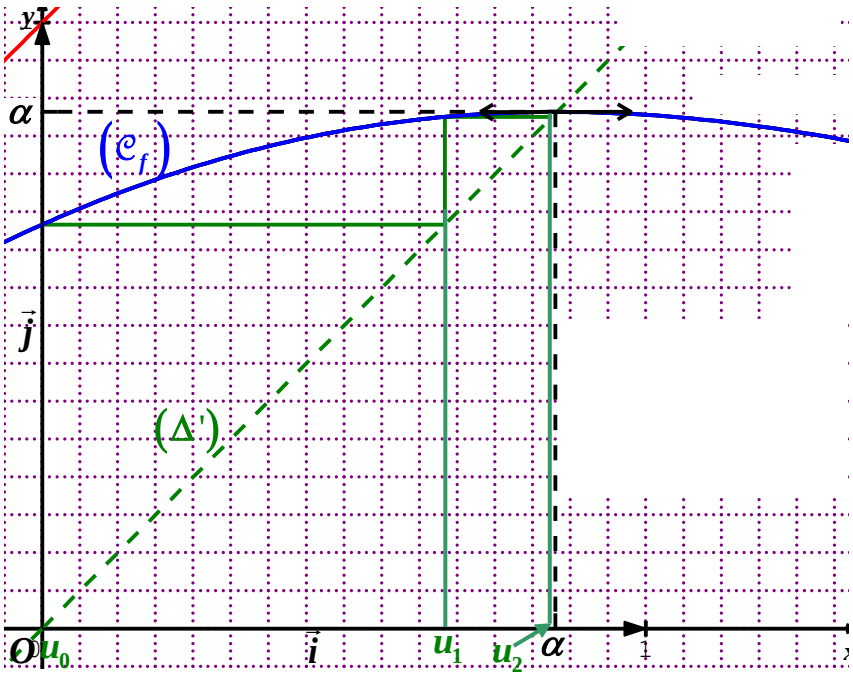
لدينا من أجل كل $x \in]-\infty;\alpha[$ ، $f(x)-x \geq 0$ ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < \alpha$ ومنه $f(u_n)-u_n \geq 0$ أي $u_{n+1}-u_n \geq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة ، زيادة عن هذا هي محدودة من الأعلى بالعدد α إذا هي متقاربة.

- حساب نهاية المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) متقاربة إذن هي تقبل نهاية ℓ مع $\ell \in \mathbb{R}$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ؛

لدينا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ إذا $\ell = f(\ell)$

وبما أن $f(\alpha) = \alpha$ فإن $\ell = \alpha$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.



التمرين 5 بالك 2013 م1 6,5 نق

I – 1. الدالة u معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $u(x)=e^x-3x+4-e$.

أ- ادرس اتجاه تغيّر الدالة u.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x-e>3x-4$.

2. الدالة v معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$.

أ- بيّن أن: $v'(1)=0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v)

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $v(x)\leq 0$.

جـ- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{-1+\ln x}{x^2}\leq 3x-4$.

3. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $e^x-e+\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$.

II – الدالة f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=e^x-ex+\dfrac{\ln x}{x}$. $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3. احسب $f(1)$ ثمّ مثل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left]0;\dfrac{5}{2}\right]$. يعطى: $f(2)\approx 2,3$ $f(1,64)\approx 1$ و $f\left(\dfrac{5}{2}\right)\approx 5,75$.

4. احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب : $x=\dfrac{1}{2}$ و $x=2$.

حل مقترح للتمرين 5 بالك 2013

I – 1. الدالة u معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $u(x)=e^x-3x+4-e$.

أ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة u :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $u'(x)=e^x-3$ ؛

$u'(x)=0$ معناه $e^x-3=0$ ومعناه $e^x=3$ يكافئ $x=\ln 3$.

$u'(x)>0$ معناه $e^x-3>0$ ومعناه $e^x>3$ يكافئ $x>\ln 3$.

x	0		$\ln 3$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$		↘	$u(\ln 3)\approx 1$	↗	

ب- تبيين أنه

من خلال جدول التغيرات لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $u(x) \geq u(\ln 3)$ و $u(\ln 3) \approx 1$ إذن $u(x) > 0$ أي $e^x - 3x + 4 - e > 0$ وهذا يعني $e^x - e > 3x - 4$

2. الدالة v معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x .$$

أ- تبيين أن: $v'(1) = 0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v):

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $v'(x) = -9x^2 + 8x + \frac{1}{x} = \frac{-9x^3 + 8x^2 + 1}{x}$

ومنه $v'(1) = \frac{-9 \times 1^3 + 8 \times 1^2 + 1}{1} = 0$.

ب- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $v(x) \leq 0$:

$v'(x) = \frac{-9x^3 + 8x^2 + 1}{x}$ معناه $v'(x) = \frac{(x-1)(-9x^2 - x - 1)}{x}$

$\Delta = 1 - 36 = -35$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $-9x^2 - x - 1 < 0$ ومنه:

x	0		1		$+\infty$
$v'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$v(x)$	‖	↗	$v(1) = 0$	↘	

إذا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $v(x) \leq 0$.

جـ- استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $v(x) \leq 0$ معناه $-3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x \leq 0$ ومعناه

$-1 + \ln x \leq 3x^3 - 4x^2$ يكافئ $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq \frac{3x^3 - 4x^2}{x^2}$ أي $\frac{\ln x - 1}{x^2} \leq 3x - 4$.

3. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $3x - 4 < e^x - e$

و $\frac{\ln x - 1}{x^2} \leq 3x - 4$ إذا $\frac{\ln x - 1}{x^2} < e^x - e$ وهذا يعني أن $e^x - e - \frac{\ln x - 1}{x^2} > 0$ أي $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$.

II- الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x - ex = 1$ إذا $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[e^x - ex + \frac{\ln x}{} \right] = -\infty$ ؛

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}e^x-ex=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^x}{x}-e\right)=+\infty$ إذا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^x-ex+\frac{\ln x}{x}=+\infty$.

2. تبيين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$:

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=e^x-e+\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}$ ،

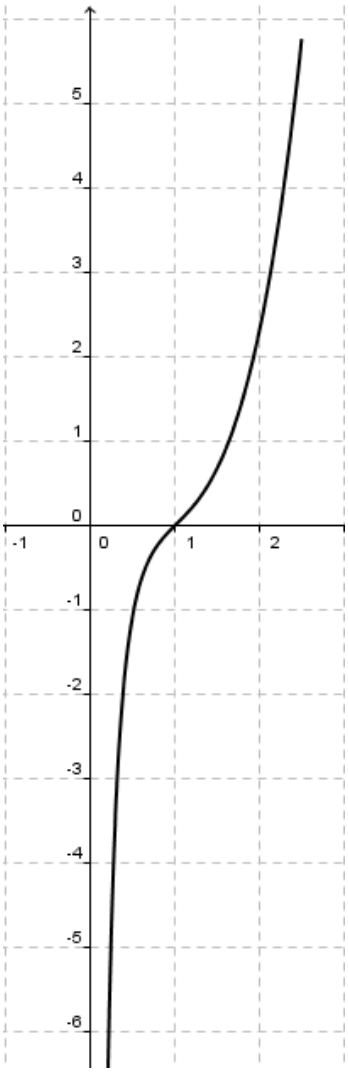
وحسب السؤال $\mathbf{I}-$ 3. لدينا من أجل كل عدد حقيقي

x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



3. حساب $f(1)$ ثمّ تمثيل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left]0;\frac{5}{2}\right]$: يعطى: $f(2)\approx 2,3$ ،

$f(1,64)\approx 1$ و $f\left(\frac{5}{2}\right)\approx 5,75$.

$f(1)=e^1-e+\frac{\ln 1}{1}=0$.

4. حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما على الترتيب : $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$.

نرمز بـ S إلى المساحة المطلوبة.

$$S=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{1}^{\frac{1}{2}}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$$

لدينا: $\int_{1}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\int_{1}^{\frac{1}{2}}\left(e^x-ex+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{1}^{\frac{1}{2}}$

أي $\int_{1}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\left[e^{\frac{1}{2}}-\frac{e}{8}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}\right)^2\right]-\left[e-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}(\ln 1)^2\right]$

$$\int_{1}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=e^{\frac{1}{2}}-\frac{5e}{8}+\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

ولدينا: $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(e^x - ex + \frac{\ln x}{x}\right)dx = \left[e^x - \frac{e}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2$

أي $\int_1^2 f(x)dx = \left[e^2 - 2e + \frac{1}{2}(\ln 2)^2\right] - \left[e - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right]$

$$\int_1^2 f(x)dx = e^2 - \frac{5}{2}e + \frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

إذن $S = e^{\frac{1}{2}} - \frac{5e}{8} + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + e^2 - \frac{5}{2}e + \frac{1}{2}(\ln 2)^2$ أي $S = e^2 + e^{\frac{1}{2}} - \frac{25e}{8} + (\ln 2)^2 \approx 1,024\ ua$.

التمرين (6) (باك 2014) (م 1) (6 ن)

I) g ال $= \quad - \quad {}^{x} -$

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. بيّن أن للمعادلة: $g(x)=0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث $-1,2<\alpha<-1,1$ و $1,8<\beta<1,9$.

3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وفسّر النتيجتين هندسيا.

2. بيّن أنه من أجل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-x)^2}$ واستنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3. بيّن أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$ واستنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.

4. احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى (C_f).

5. λ عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 1 .

أ- احسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda)=\int_1^{\lambda}\left[f(x)-1\right]dx$.

ب- احسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$.

حل مقترح للتمرين 6 باك 2014

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(2-x)e^x-1$.

1. دراسة تغيرات الدالة g : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^x-1=\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x-xe^x-1=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^x-1=-\infty$.

ليكن x عددا حقيقيا: $g'(x)=-e^x+(2-x)e^x=(1-x)e^x$ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x>0$ وعليه فإشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(1-x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	↗	$e-1$	↘	$-\infty$

2. تبيين أن للمعادلة: $g(x)=0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث $-1,2<\alpha<-1,1$ و $1,8<\beta<1,9$.

الدالة g مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $[1;+\infty[$ إذن صورة كل من هذين المجالين هو مجال ولدينا $g(]-\infty;1])=]-1;e-1]$ و $g([1;+\infty[)=]-\infty;e-1]$ بما أن $0\in]-1;e-1]$ و $0\in]-\infty;e-1]$ فإن المعادلة:

$g(x)=0$ تقبل حلا α في $]-\infty;1[$ وحلا β في $]1;+\infty[$ وبما أن الدالة g رتيبة على كل من المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$ فإن α و β حلان وحيدان

$g(-1,2)\approx -0,036$ ؛ $g(-1,1)\approx 0,032$ إذن $g(-1,1)\times g(-1,2)<0$ ومنه $-1,2<\alpha<-1,1$.

$g(1,8)\approx 0,21$ ؛ $g(1,9)\approx -0,33$ إذن $g(1,8)\times g(1,9)<0$ ومنه $1,8<\beta<1,9$.

3. استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x-x}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(1-e^{-x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{1-\dfrac{x}{e^x}}=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.

التفسير الهندسي للنهايتين:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ إذا (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ وهذا في $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ إذا (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=1$ وهذا في $+\infty$.

2. تبيين أنه من أجل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$:

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2-x)e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

ـ استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f :

لدينا $g(\alpha)=g(\beta)=0$ وهذا يعني أن $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$.

لدينا من أجل كل x من $]-\infty;\alpha[\cup]\beta;+\infty[$ ، $g(x)<0$ ومعناه $f'(x)<0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;\alpha[$ و $]\beta;+\infty[$.

ولدينا من أجل x من $]\alpha;\beta[$ ، $g(x)>0$ ومعناه $f'(x)>0$ إذا الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$.

ـ جدول تغيّرا

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘	1

3. تبيين أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$:

$g(\alpha)=0$ معناه $(2-\alpha)e^{\alpha}-1=0$ ومعناه $e^{\alpha}=\dfrac{1}{2-\alpha}$

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-\alpha}=\frac{\frac{1}{2-\alpha}-1}{\frac{1}{2-\alpha}-\alpha}=\frac{1-2+\alpha}{2-\alpha}\times\frac{2-\alpha}{1-2\alpha+\alpha^2}=\frac{-1+\alpha}{(\alpha-1)^2}$$

أي $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$

ـ استنتاج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$:

$-1,2<\alpha<-1,1$ معناه $-2,2<\alpha-1<-2,1$ ومعناه $-\dfrac{1}{2,1}<\dfrac{1}{\alpha-1}<-\dfrac{1}{2,2}$ أي

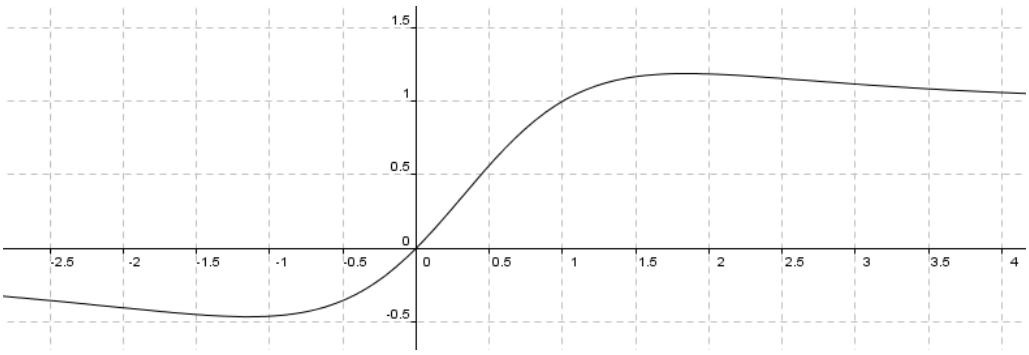
$$-0,476<f(\alpha)<-0,455$$

بنفس الطريقة نجد $f(\beta)=\dfrac{1}{\beta-1}$ ولدينا $1,8<\beta<1,9$ معناه

$0,8<\beta-1<0,9$ ومعناه $\dfrac{1}{0,8}<\dfrac{1}{\beta-1}<\dfrac{1}{0,9}$ يكافئ $1,25<f(\beta)<1,11$.

4. حساب $f(1)$: $f(1)=\dfrac{e-1}{e-1}=1$

ـ رسم المنحنى (C_f):



5. λ عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 1 .

أ ـ حساب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda)=\int_1^{\lambda}\left[f(x)-1\right]dx$:

$$a(\lambda)=\int_1^{\lambda}\left[f(x)-1\right]dx=\int_1^{\lambda}\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}-1\right]dx=\left[\ln\left(e^x-x\right)-x\right]_1^{\lambda}$$

$$a(\lambda)=\ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right)-\lambda-\ln(e-1)+1=\ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right)-\ln e^{\lambda}+1-\ln(e-1)$$

$$a(\lambda)=\ln\left(\frac{e^{\lambda}-\lambda}{e^{\lambda}}\right)+1-\ln(e-1)=\ln\left(1-\lambda e^{-\lambda}\right)+1-\ln(e-1)$$

ب- حساب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$:

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}a(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln\left(1-\lambda e^{-\lambda}\right)+1-\ln(e-1)=1-\ln(e-1)$ لأن $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}-\lambda e^{-\lambda}=\lim\limits_{t\to-\infty}te^t=0$ و $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln\left(1-\lambda e^{-\lambda}\right)=\ln 1=0$.

التمرين 7 باك 2015 م2 ن7

f الدالة المعرّفة بـ: $f(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

2. احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x)}{x}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

3. أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4. أ- بيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$.

ب- استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ ، يُطلب تعيين معادلة له.

5. g الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ: $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

6. أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)>x$.

ب- استنتج وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

جـ- أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

7. (u_n) المتتالية المعرّفة بـ: $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<0$.

ب- حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ- بيّن أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثمّ عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

8. m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغيّر الحقيقي x المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ: $h_m(x)=xe^{\frac{1}{x}}-mx$

أ- احسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m.

ب- باستعمال المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ، ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $h'_m(x)=0$.

حل مقترح للتمرين 7 باك 2015

f الدالة المعرّفة بـ: $f(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. دراسة اسة

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$

إذا الدالة f مستمرة على يسار 0.

2. حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \left(\frac{x-1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} e^{\frac{1}{x}} - \lim_{t \to -\infty} te^{t}$$

أي $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

ـ التفسير الهندسي: الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار 0 وعددها المشتق من اليسار معدوم وعليه فالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس موازٍ لحامل محور الفواصل عند المبدأ O ، $y = 0$ معادلة له.

3. أ ـ حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = -\infty$

ب ـ دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $]-\infty;0[$: $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$

$\Delta = 1-4 = -3$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $x^2 - x + 1 > 0$ وبالتالي $f'(x) > 0$ وعليه فالدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;0[$.

ـ جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	$-\infty$	↗	0

4. أ ـ تبيان أن $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - x \right] = 0$:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - x \right] = \lim_{x \to -\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x}} - x$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - x \right] = \lim_{t \xrightarrow{<} 0} \frac{e^t}{t} - e^t - \frac{1}{t} = \lim_{t \xrightarrow{<} 0} \frac{e^t - 1}{t - 0} - e^t = 1 - 1 = 0$$ حيث $t = \dfrac{1}{x}$

ب ـ استنتاج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) في $-\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - x \right] = 0$ إذا المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) في $-\infty$ ، $y = x$ معادلة له.

5. g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ: $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

أ ـ حساب x $\left(\dfrac{x-1}{\ }\right)^{\frac{1}{x}}$

ب ـ دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $]-\infty;0[$: $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

$$g'(x)=\frac{x\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}-(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\frac{x^2-x+1}{x}-x+1\right)$$

$g'(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(x-1+\dfrac{1}{x}-x+1\right)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\times\dfrac{1}{x}$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$: $e^{\frac{1}{x}}>0$ ، $x^2>0$ و $x<0$ إذا $g'(x)<0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$.

ـ جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$	0
$g'(x)$	$-$	‖
$g(x)$	1 ↘	0

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x)}{x}=0$

6. أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)>x$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $0<g(x)<1$ معناه $0<\dfrac{f(x)}{x}<1$ ومعناه $x<f(x)<0$

ب ـ استنتاج وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ) :

من أجل كل $]-\infty;0[$ ، $x\in]-\infty;0[$ ، $x<f(x)$ ولدينا $f(0)=0$

إذا $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (Δ) ويتقاطعان في المبدأ O.

جـ ـ إنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.



7. (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<0$:

استعمال البرهان بالتراجع:

لدينا $u_0=-3$ ومنه $u_0<0$ الخاصية الابتدائية محققة.

نفرض أن $u_n<0$ من أجل عدد طبيعي n أي $u_n\in]-\infty;0[$ إذا حسب جدول تغيرات الدالة f ، $f(u_n)\in]-\infty;0[$ وهذا يعني أن $u_{n+1}\in]-\infty;0[$ أي $u_{n+1}<0$ إذا الخاصية وراثية ؛ وعليه فحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<0$.

ب ـ تحديد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $x < f(x)$ وبما أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \in]-\infty;0[$
فإن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < u_{n+1}$ وعليه فالمتتالية (u_n) متزايدة تماما.

جـ ـ تبيان أن المتتالية (u_n) متقاربة:

المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 0 إذا هي متقاربة.

ـ تعيين $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ مع $\ell \in \mathbb{R}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $x < f(x)$ إذن المعادلة $f(x) = x$ لا تقبل حلا في المجال $]-\infty;0[$ ولدينا $f(0) = 0$ إذن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا معدوما في المجال $]-\infty;0]$

وبما أن الدالة f مستمرة على $]-\infty;0]$ فإن $f(\ell) = \ell$ ومنه $\ell = 0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

8. m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغير x المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ: $h_m(x) = xe^{\frac{1}{x}} - mx$

أ ـ حساب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m :

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $]-\infty;0[$. $h'_m(x) = e^{\frac{1}{x}} + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} - m = e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right) - m$

ب ـ المناقشة بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $h'_m(x) = 0$:

$h'_m(x) = 0$ معناه $e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right) - m = 0$ ومعناه $\frac{e^{\frac{1}{x}}(x-1)}{x} = m$ أي $f(x) = mx$ و $x \neq 0$.

نسمي (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = mx$

إذا كان $m \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ فإن (Δ) يقطع $(\mathcal{C}_f)$ في نقطة وحيدة وهي المبدأ وبما أن $x \in]-\infty;0[$ فإن المعادلة $h'_m(x) = 0$ لا تقبل حلا.

إذا كان $m \in]0;1[$ فإن (Δ) يقطع $(\mathcal{C}_f)$ في نقطتين إحداهما المبدأ وأخرى تختلف عنه وبما أن $x \in]-\infty;0[$ فإن المعادلة $h'_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $]-\infty;0[$.

التمرين 8 باك 2016 م2 6 نق

I) φ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\varphi(x)=\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1 .$$

1.أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة φ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2. بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلا α يختلف عن 1 ثمّ تحقق أنّ $2,79<\alpha<2,80$.

3. استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f و g الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ ، على الترتيب كما يلي: $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ ؛ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ على الترتيب تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2. بيّن أنّ للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسا مشركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 ، ثمّ جد معادلة له.

3. ارسم المماس (T) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

4.أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

ب- ادرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثمّ استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$.

جـ- باستعمال مكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة x : $\int_1^x f(t)dt$.

د- احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$.

II) 1. احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخمينا لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم. ($f^{(n)}(x)$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f).

2. برهن بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$.

3. (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n=f^{(n)}(1)$.

أ- احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع: u_k+u_{k+1} .

ب- استنتج بدلالة n ، المجموع: $u_1+u_2+\ldots+u_{2n}$.

حل مقترح للتمرين 8 باك 2016

I) φ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\varphi(x)=\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1 .$$

1.أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1=+\infty .$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x+1}-1$$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e\dfrac{x^2}{e^x}-1=-1$.

ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة φ :

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $\varphi'(x)=(2x-1)e^{-x+1}+\left(x^2-x+1\right)(-1)e^{-x+1}$

أي $\varphi'(x)=\left(-x^2+3x-2\right)e^{-x+1}$.

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $e^{-x+1}>0$ ومنه إشارة $\varphi'(x)$ هي من إشارة $\left(-x^2+3x-2\right)$؛

$\Delta=9-8=1$ ومنه $x'=\dfrac{-3-1}{-2}=2$ و $x''=\dfrac{-3+1}{-2}=1$ ، وعليه فمن أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ ، $-x^2+3x-2<0$ أي $\varphi'(x)<0$ ومنه الدالة φ متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $[2;+\infty[$؛

ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]1;2[$ ، $-x^2+3x-2>0$ أي $\varphi'(x)>0$ ومنه الدالة φ متزايدة تماما على المجال $[1;2]$.

- جدول تغيرات الدالة φ :

x	$-\infty$		1		2		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{e}-1$	↘	0	↘	-1

2. تبيين أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلا α يختلف عن 1 :

من خلال جدول تغيرات الدالة φ لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;1[\cup]1;2]$ ، $\varphi(x)>0$ و $\varphi(1)=0$ إذا المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $]-\infty;2]$ حلا وحيدا وهو 1.

لدينا الدالة φ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]-1;\dfrac{3}{e}-1\right]$ إذا يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[2;+\infty[$ حيث $\varphi(\alpha)=0$ أي α حل للمعادلة $\varphi(x)=0$.

- تحقق أن $2,79<\alpha<2,80$:

لدينا $\varphi(2,79) \approx 0,000776$ و $\varphi(2,80) \approx -0,00159$ إذا $\varphi(2,80) \times \varphi(2,79) < 0$ ومنه $2,79 < \alpha < 2,80$.

3. استنتاج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $\varphi(1) = \varphi(\alpha) = 0$ ؛ من أجل كل $x \in]-\infty;1[\cup]1;\alpha[$ ، $\varphi(x) > 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha ; +\infty[$ ، $\varphi(x) < 0$.

II) f و g الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ ، على الترتيب كما يلي: $f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ ؛ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ على الترتيب تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{t} = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{-x+1} = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)e^{-x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x}\right)e = 0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$.

ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

ليكن $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2e^{-x+1} + (2x-1)(-1)e^{-x+1}$

$f'(x) = (2-2x+1)e^{-x+1} = (3-2x)e^{-x+1}$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x+1} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(3-2x)$؛

$f'(x) = 0$ تكافئ $3-2x = 0$ ومعناه $x = \dfrac{3}{2}$ ؛

$f'(x) > 0$ تكافئ $3-2x > 0$ ومعناه $x < \dfrac{3}{2}$.

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$ و متناقصة تماما على المجال $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	↘	0

2. تبيين أن للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 :

ليكن $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = \dfrac{2(x^2 - x + 1) - (2x - 1)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2 - 4x^2 + 4x - 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

أي $$g'(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

ومنه $g'(1) = \dfrac{-2 + 2 + 1}{(1 - 1 + 1)^2} = 1$ و $f'(1) = (3 - 2)e^{-1+1} = 1$

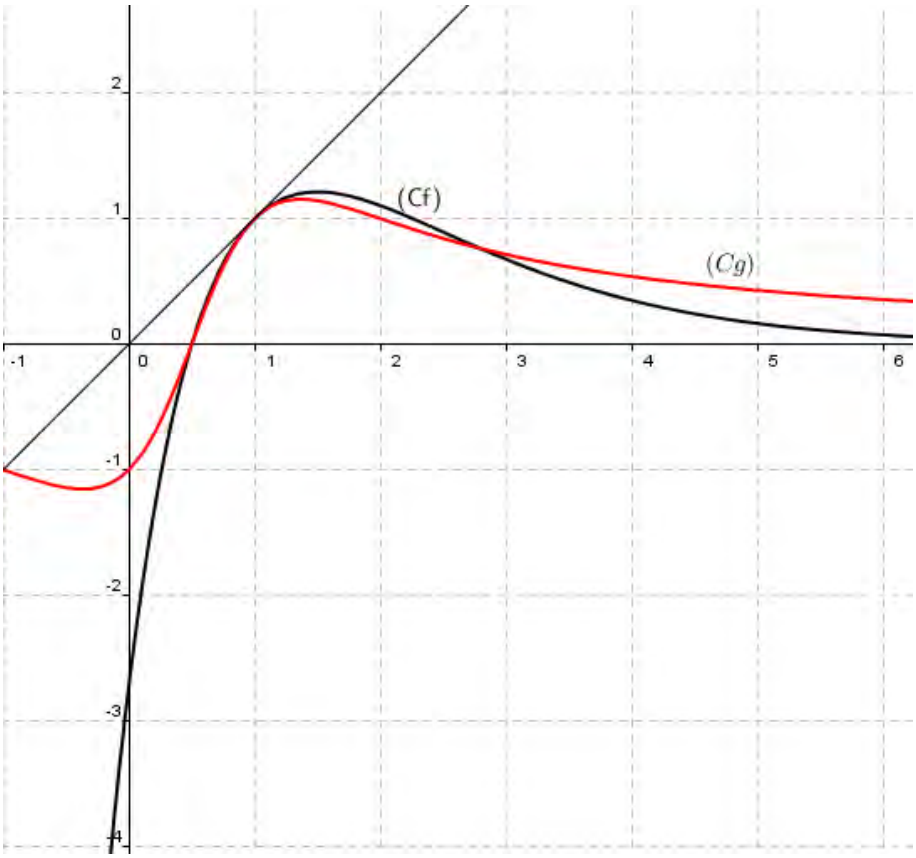
إذا للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسين لهما نفس معامل التوجيه 1 في النقطة ذات الفاصلة 1 ، ولدينا

$f(1) = (2 - 1)e^{-1+1} = 1$ و $g(1) = \dfrac{2 - 1}{1^2 - 1 + 1} = 1$ إذا للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ نقطة مشتركة $A(1;1)$ وهي نقطة التماس ومنه للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسا مشركا (T) في النقطة $A(1;1)$.

ـ إيجاد معادلة للمستقيم (T) :

$y = x - 1 + 1$ أي $y = x$.

3. رسم المماس (T) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$:



4. أ- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-g(x)=(2x-1)e^{-x+1}-\frac{2x-1}{x^2-x+1}$

$$f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)\left[\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1\right]}{x^2-x+1}$$

أي $f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

ب- دراسة إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$:

لندرس إشارة ثلاثي الحدود x^2-x+1 : $\Delta=1-4=-3$ ومنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $x^2-x+1>0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$2x-1$	$-$	$\|$	0	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$\varphi(x)$	$+$	$\|$	$+$	0	$+$	0	$\|$	$-$	
x^2-x+1	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$		
$f(x)-g(x)$	$-$	$\|$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

- استنتاج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$:

يتقاطعان $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ في النقط $A(1;1)$ ، $B\left(\frac{1}{2};0\right)$ و $C(\alpha;f(\alpha))$.

في المجالين $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ و $]\alpha;+\infty[$ ، $(\mathcal{C}_f)$ يقع أسفل $(\mathcal{C}_g)$ ؛

وفي المجالين $\left]\frac{1}{2};1\right[$ و $]1;\alpha[$ ، $(\mathcal{C}_f)$ يقع أعلى $(\mathcal{C}_g)$.

جـ- باستعمال مكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة x : $\int_1^x f(t)dt$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $\int_1^x f(t)dt=\int_1^x(2t-1)e^{-t+1}dt$.

نضع $u(t)=2t-1$ و $v'(t)=e^{-t+1}$ ومنه $u'(t)=2$ و $v(t)=-e^{-t+1}$.

$$\int_1^x f(t)dt=\int_1^x(2t-1)e^{-t+1}dt=\int_1^x u(t)v'(t)dt$$

$$\int_1^x f(t)dt=u(t)v(t)-\int_1^x u'(t)v(t)dt$$

$$\int_1^x f(t)dt=\left[-(2t-1)e^{-t+1}\right]_1^x-\int_1^x -2e^{-t+1}dt$$

$$\int_1^x f(t)dt = -(2x-1)e^{-x+1} + 1 - 2\left[e^{-t+1}\right]_1^x$$

$$\int_1^x f(t)dt = -(2x-1)e^{-x+1} + 1 - 2\left(e^{-x+1} - 1\right)$$

$$\int_1^x f(t)dt = -(2x+1)e^{-x+1} + 3 .$$

د ـ حساب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$:

$$\int_1^2 \left[f(x) - g(x)\right]dx = \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx$$

$$\int_1^2 \left[f(x) - g(x)\right]dx = \left[-(2x+1)e^{-x+1} + 3\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$\int_1^2 \left[f(x) - g(x)\right]dx = -5e^{-1} + 3 - \left[\ln\left(x^2 - x + 1\right)\right]_1^2$$

$$\int_1^2 \left[f(x) - g(x)\right]dx = \left(-5e^{-1} + 3 - \ln 3\right)ua$$

المساحة المطلوبة هي $\int_1^2 \left[f(x) - g(x)\right]dx$ حيث:

$$\int_1^2 \left[f(x) - g(x)\right]dx = \left(-5e^{-1} + 3 - \ln 3\right)ua \approx 0,0619905\,ua .$$

II) 1. حساب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$:

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (3-2x)e^{-x+1}$ ومنه

$f''(x) = -2e^{-x+1} - (3-2x)e^{-x+1} = (2x-5)e^{-x+1}$ ؛

$f^{(3)}(x) = 2e^{-x+1} - (2x-5)e^{-x+1} = -(2x-7)e^{-x+1}$ ؛

$f^{(4)}(x) = -2e^{-x+1} + (2x-7)e^{-x+1} = (2x-9)e^{-x+1}$.

ـ تخمين عبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم. ($f^{(n)}(x)$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f):

يبدو أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $f^{(n)}(x) = (-1)^n\left[2x - (2n+1)\right]e^{1-x}$.

2. البرهان بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = (-1)^n\left[2x - (2n+1)\right]e^{1-x}$:

$f'(x) = (-1)\left[2x - (2+1)\right]e^{1-x} = -(2x-3)e^{1-x}$ ومنه الخاصية الابتدائية محققة.

نفرض أنه $f^{(n)}(x) = (-1)^n\left[2x - (2n+1)\right]e^{1-x}$ من أجل عدد طبيعي غير معدوم n ولنبرهن أن

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\left[2x - (2n+3)\right]e^{1-x}$$

لدينا $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\,2e^{1-x} + (-1)^n\left[2x - (2n+1)\right](-1)e^{1-x}$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}e^{1-x}\left[2x - (2n+1) - 2\right]$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}e^{1-x}\left[2x - (2n+3)\right]$$

ومنه الخاصية وراثية وعليه فحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ،

$$f^{(n)} \qquad n \qquad +1)\right]e^{1-x}$$

3. (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n = f^{(n)}(1)$.

أ- حساب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع: $u_k + u_{k+1}$:

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = f^{(n)}(1) = (-1)^n\left[2-(2n+1)\right] = (-1)^{n+1}(2n-1)$

ليكن $k \in \mathbb{N}^*$ ، $u_k + u_{k+1} = (-1)^{k+1}(2k-1) + (-1)^{k+2}(2k+1)$

$$u_k + u_{k+1} = (-1)^{k+1}(2k-1-2k-1)$$

أي $u_k + u_{k+1} = 2(-1)^{k+2} = 2(-1)^k$

ب- استنتاج بدلالة n ، المجموع: $u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}$:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n} = \frac{(u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}) + (u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n})}{2}$$

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}$$

$$= \frac{u_1 - u_{2n+1} + (u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}) + (u_2 + \ldots + u_{2n} + u_{2n+1})}{2}$$

$$= \frac{u_1 - u_{2n+1}}{2} + \frac{1}{2}\left[(u_1 + u_2) + (u_2 + u_3) + \ldots + (u_{2n} + u_{2n+1})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \left((-1)^{2n+2}(4n+1)\right)\right] + \frac{1}{2} \times 2\left[(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{2n}\right]$$

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n} = -2n + \left[(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{2n}\right] = -2n$$

التمرين 09 باك 2018 م1 7 ن

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$.

1. بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$،

واستنتج اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,9<\alpha<1$، واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

و $(\mathcal{C}_f)$ التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ واستنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

2. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$ (يمكن وضع $t=-\dfrac{1}{x}$) ثمّ استنتج أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في $+\infty$.

3. h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\dfrac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ ثمّ ادرس اتجاه تغيّر الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب- تحقّق أنّ $f(x)-x=(1+x)h(x)$ ثمّ استنتج الوضعية النسبية لـ $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

4. ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ (نأخذ $f(\alpha)\approx 1,73$).

5. (u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها العام u_n حيث: $u_n=\dfrac{n}{n+1}f\left(\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{n^2}{n+1}$.

أ- اكتب u_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل u_1.

ب- احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث:

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right).$$

حل مقترح للتمرين 09 باك 2018

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\left(1+x+x^2\right)e^{-\frac{1}{x}}-1$.

1. تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{(x+1)\left(2x^2+1\right)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$:

ليكن $x\in]0;+\infty[$: $g'(x)=(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^2}\left(1+x+x^2\right)e^{-\frac{1}{x}}$

$g'(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(x^2+2x^3+1+x+x^2\right)e^{-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x^2}\left(2x^2+2x^3+1+x\right)e^{-\frac{1}{x}}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $(x+1)\left(2x^2+1\right)=2x^3+2x^2+x+1$ إذا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$:

$g'(x)=\dfrac{(x+1)\left(2x^2+1\right)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

- استنتاج اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

لدينا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $e^{-\frac{1}{x}}>0$ ؛ $(x+1)>0$ ؛ $\left(2x^2+1\right)>0$ و $x^2>0$ إذا $g'(x)>0$

وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2. تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,9<\alpha<1$:

لدينا الدالة g مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا $g(0,9)\approx -0,108$ و $g(1)\approx 0,104$ ومنه $g(0,9)\times g(1)<0$

إذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]0,9;1[$ حيث $g(\alpha)=0$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن α هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

- استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

من أجل كل $x\in]0;\alpha[$: $g(x)<0$ ؛ من أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$: $g(x)>0$ و $g(\alpha)=0$.

II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

و $(\mathcal{C}_f)$ التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}-\dfrac{1}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(1+x)=1$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(1+x)e^{-\frac{1}{x}}=0$ إذا

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

ب-تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$:

ليكن $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}(1+x)e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}\left[\left(1+x+x^2\right)e^{-\frac{1}{x}}-1\right]$ أي

$f'(x)=\frac{1}{x^2}\times g(x)$.

- استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f : $g(\alpha)=0$ معناه $f'(\alpha)=0$.

لدينا من أجل $x\in]0;\alpha[$: $g(x)<0$ أي $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha[$ ؛

ولدينا من أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$: $g(x)>0$ أي $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\alpha;+\infty[$.

- جدول تغيّرات الدالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2. تبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$ (يمكن وضع $t=-\frac{1}{x}$):

$x=-\frac{1}{t}$ معناه $t=-\frac{1}{x}$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{-e^t+1}{t}\right)=\lim\limits_{t\to0}-\left(\frac{e^t-e^0}{t-0}\right)=-1$.

- استنتاج أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في $+\infty$:

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}\right]+\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xe^{-\frac{1}{x}}-x\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=1-1=0$ ؛ ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في $+\infty$.

3. h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}=0-1+1=0$.

- دراسة اتجاه تغيّر الدالة h :

ليكن $x\in]0;+\infty[$: $h'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x^2}\left(1+e^{-\frac{1}{x}}\right)$ ؛ لدينا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$:

$h'(x)<0$

• استنتاج إشارة $h(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	↘	0

من خلال جدول تغيرات الدالة h ينتج أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $h(x) > 0$.

ب- التحقق أن $f(x) - x = (1+x)h(x)$:

ليكن $x \in]0;+\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} - x = \frac{1}{x} + e^{-\frac{1}{x}} + xe^{-\frac{1}{x}} - x = h(x) + 1 + xe^{-\frac{1}{x}} - x$$ أي

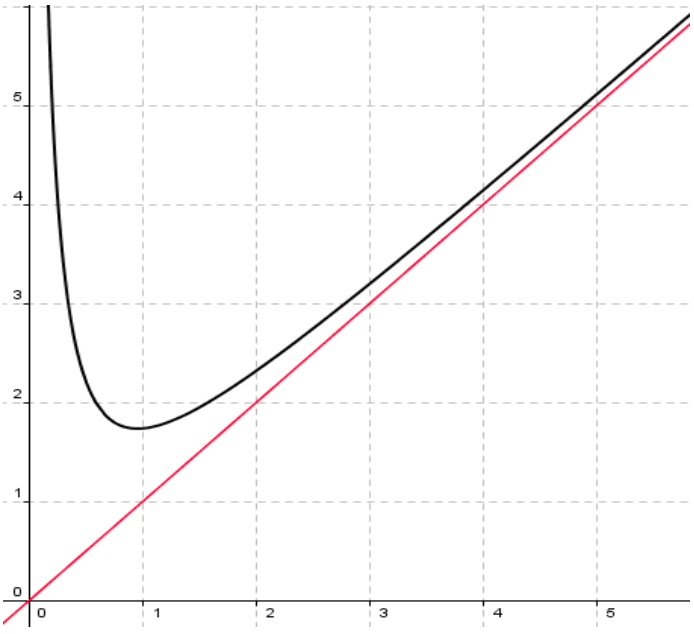
$$f(x) - x = h(x) + x\left(\frac{1}{x} + e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) = h(x) + xh(x) = (1+x)h(x)$$

• استنتاج الوضعية النسبية لـ $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $f(x) - x = (1+x)h(x)$ و $h(x) > 0$ و $x + 1 > 0$ إذا $f(x) - x > 0$

وبالتالي $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق المستقيم (Δ).

4. رسم المستقيم (Δ) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ (نأخذ $f(\alpha) \approx 1,73$).



5. (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n حيث: $u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$.

أ- كتابة u_n بدلالة n :

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$: $f\left(\frac{1}{n}\right) = n + \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-n} = n + \left(\frac{n+1}{n}\right)e^{-n}$ ومنه

$u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1}\left[n + \left(\frac{n+1}{n}\right)e^{-n}\right] - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2}{n+1} + e^{-n} - \frac{n^2}{n+1} = e^{-n}$.

• تبيين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول u_1:

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = e^{-n-1} = e^{-n} \times e^{-1} = u_n \times e^{-1}$ ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها e^{-1} وحدّها الأول u_1 حيث:

$u_1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

ب- حساب، بدلالة n، المجموع S_n حيث:

$$S_n = \left(\frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$$

التمرين (10) (بك 2019) (م1) (7 نق)

I) f_k الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي. ليكن $(\mathcal{C}_k)$ التمثيل البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمرّ من نقطتين ثابتتين يُطلب تعيينهما.
2. احسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ وعند $+\infty$. (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k).
3. أ) احسب $f_k'(x)$، ثمّ حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغيّر الدالة f_k.

ب) شكّل جدول تغيّرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما.

4. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k، الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathcal{C}_k)$ و$(\mathcal{C}_{k+1})$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$.

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. شكّل جدول تغيرات الدالة f، ثمّ ارسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$.
2. أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث: $-1,28<\alpha<-1,27$.

ب) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

3. g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x+1)e^{-2x}$.

أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ ثمّ استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب A مساحة الحيّز المستوي المحدّد المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و$x=0$.

حل (10) (بك 2019)

I) f_k الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathcal{C}_k)$ التمثيل البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تبيين أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمرّ من نقطتين ثابتتين يُطلب تعيينهما:

ليكن $k\in\mathbb{R}$، نضع $(x+1)^2e^{-kx}=y$ لدينا $y\geq 0$.

إذا كان $y=0$ فإن $(x+1)^2e^{-kx}=0$ وهذا يعني أن $(x+1)^2=0$ أي $x=-1$.

إذا كان $y>0$ فإن: $(x+1)^2e^{-kx}=y$ تكافئ $\ln\left[(x+1)^2e^{-kx}\right]=\ln y$ ومعناه

$\ln(x+1)^2+\ln e^{-kx}=\ln y$ أي $-kx+\ln(x+1)^2=\ln y$.

من أجل كل $k\in\mathbb{R}$: $(x+1)^2e^{-kx}=y$ تكافئ $-kx+\ln(x+1)^2=\ln y$ وتكافئ $\begin{cases}-x=0\\ \ln(x+1)^2=\ln y\end{cases}$

ومعناه $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=0 \\ y=(x+1)^2 \end{cases}$ ؛ إذا كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمرّ من نقطتين ثابتتين هما: $B(-1;0)$ و $C(0;1)$.

2. حساب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ وعند $+\infty$. (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k).

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)^2 e^{-kx}$

ـ إذا كان $k=0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)^2 = +\infty$

ـ إذا كان $k<0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)^2 e^{-kx}$.

نضع $-kx = 2t$ وهذا يعني أن $x = -\frac{2}{k}t$ لما $x \to -\infty$ فإن $t \to -\infty$ ومنه:

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{2}{k}t+1\right)^2 e^{2t} = \lim_{t\to-\infty}\left[\left(-\frac{2}{k}t+1\right)e^t\right]^2 = \lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{2}{k}te^t+e^t\right]^2 = 0 .$$

ـ إذا كان $k>0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} -kx = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)^2 e^{-kx} = +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^2 e^{-kx}$

ـ إذا كان $k=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^2 = +\infty$

ـ إذا كان $k<0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} -kx = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^2 e^{-kx} = +\infty$.

ـ إذا كان $k>0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)^2 e^{-kx} = +\infty$.

نضع $-kx = 2t$ وهذا يعني أن $x = -\frac{2}{k}t$، لما $x \to +\infty$ فإن $t \to -\infty$ ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{2}{k}t+1\right)^2 e^{2t} = \lim_{t\to-\infty}\left[\left(-\frac{2}{k}t+1\right)e^t\right]^2 = \lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{2}{k}te^t+e^t\right]^2 = 0 .$$

الملخص:

	$\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)$
$k<0$	0	$+\infty$
$k=0$	$+\infty$	$+\infty$
$k>0$	$+\infty$	0

3.أ) حساب $f_k'(x)$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$ وليكن $k\in\mathbb{R}$: $f_k'(x) = 2(x+1)e^{-kx} - k(x+1)^2 e^{-kx}$

أي $f_k'(x) = \left(-kx^2-2kx-k+2x+2\right)e^{-kx} = \left[-kx^2+2(1-k)x-k+2\right]e^{-kx}$.

- تحديد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغيّر الدالة f_k:

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $e^{-kx}>0$ ومنه إشارة $f_k'(x)$ هي من إشارة $\left[-kx^2+2(1-k)x-k+2\right]$.

ـ إذا كان $k=0$ فإن $\left[-kx^2+2(1-k)x-k+2\right]$ يصبح $2x+2$

x	$+\infty$

$2x+2$	$-$	0	$+$

تكون الدالة f_k متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

ـ إذا كان $k\neq 0$ فإن المميز المختصر للعبارة $\left[-kx^2+2(1-k)x-k+2\right]$ هو Δ' حيث:

$\Delta'=(1-k)^2-(-k)(2-k)=1-2k+k^2+2k-k^2=1$ ومنه العبارة

$\left[-kx^2+2(1-k)x-k+2\right]$ تقبل جذرين متمايزة x' و x'' حيث: $x'=\dfrac{k-1-1}{-k}$ و $x''=\dfrac{k-1+1}{-k}$

أي $x'=-1+\dfrac{2}{k}$ و $x''=-1$ وبالتالي:

ـ إذا كان $k<0$ فإن $x'<x''$ ومنه:

x	$-\infty$		$-1+\frac{2}{k}$		-1		$+\infty$
$-kx^2+2(1-k)x-k+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذا تكون الدالة f_k متناقصة تماما على المجال $\left[-1+\dfrac{2}{k};-1\right]$ ومتزايدة تماما على كل من المجالين $\left]-\infty;-1+\dfrac{2}{k}\right]$ و $[-1;+\infty[$.

إذا كان $k>0$ فإن $x'>x''$ ومنه:

x	$-\infty$		-1		$-1+\frac{2}{k}$		$+\infty$
$-kx^2+2(1-k)x-k+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذا تكون الدالة f_k متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ و $\left[-1+\dfrac{2}{k};+\infty\right[$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[-1;-1+\dfrac{2}{k}\right]$.

ب) جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما:

x	$-\infty$		-1		$-1+\frac{2}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4e^{k-2}}{k^2}$	↘	0

$f_k(-1)=(-1+1)^2e^k=0$ ؛ $f_k\left(-1+\dfrac{2}{k}\right)=\left(-1+\dfrac{2}{k}+1\right)^2e^{-k\left(-1+\frac{2}{k}\right)}=\dfrac{4e^{k-2}}{k^2}$

4. المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي k ، الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathcal{C}_k)$ و $(\mathcal{C}_{k+1})$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$ وليكن $k\in\mathbb{R}$:

$f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ و $f_{k+1}(x)=(x+1)^2e^{-(k+1)x}=(x+1)^2e^{-kx}\times e^{-x}$ ومنه

$$f_{k+1}(x)-f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}\times\left(e^{-x}-1\right)$$

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ومن أجل كل $k\in\mathbb{R}$: $(x+1)^2\geq 0$ و $e^{-kx}>0$؛

$e^{-x}-1=0$ تكافئ $e^{-x}=1$ وتكافئ $-x=0$ أي $x=0$؛

$e^{-x}-1>0$ تكافئ $e^{-x}>1$ وتكافئ $-x>0$ أي $x<0$؛ $e^{-x}-1<0$ تكافئ $x>0$.

x	$-\infty$		-1		0	$+\infty$
$f_{k+1}(x)-f_k(x)$		$+$		$+$	$-$	
الوضعية		$(\mathcal{C}_k)$ يقع فوق $(\mathcal{C}_{k+1})$		$(\mathcal{C}_k)$ يقع فوق $(\mathcal{C}_{k+1})$	$(\mathcal{C}_k)$ يقع تحت $(\mathcal{C}_{k+1})$	

$(\mathcal{C}_k)$ يقطع $(\mathcal{C}_{k+1})$ في $B(-1;0)$ — $(\mathcal{C}_k)$ يقطع $(\mathcal{C}_{k+1})$ في $C(0;1)$

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$.

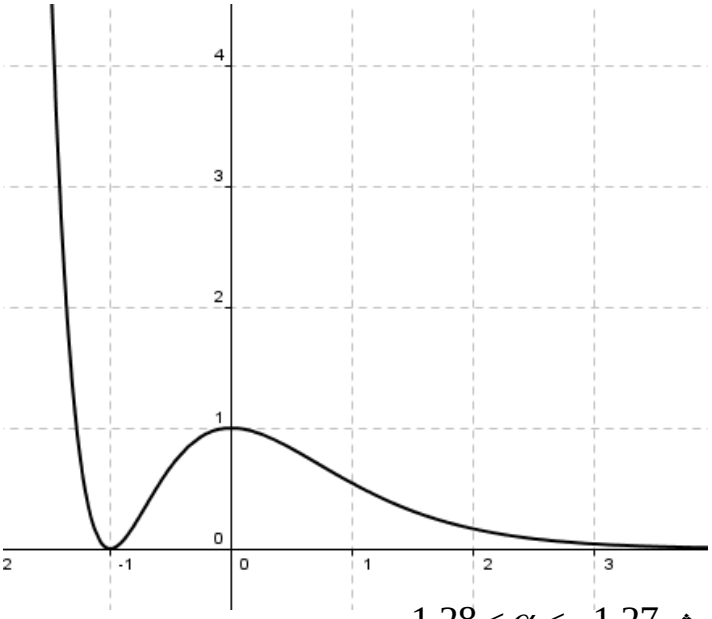
نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. جدول تغيرات الدالة f :

لدينا $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}=f_2(x)$

x	$-\infty$		-1		0	$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘ 0

• رسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$:



2.أ) تبيين أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث: $-1,28<\alpha<-1,27$:

لدينا $f(0)=1$ ومن أجل كل $x\in[-1;0[\cup]0;+\infty[$ ، $0\leq f(x)<1$ إذا المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1;+\infty[$ وهو 0.

لدينا الدالة f مستمرة على المجال $]-\infty;-1]$ إذا هي مستمرة على المجال $[-1,27\ ;\ -1,28]$ ولدينا $f(-1,27)\approx 0,92$ و $f(-1,28)\approx 1,014$ ومنه $f(-1,27)<1<f(-1,28)$ وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]-1,28\ ;\ -1,27[$ يحقق $f(\alpha)=1$ وبما أن الدالة f متناقصة ماما على المجال $]-\infty;-1]$ فإن α هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=1$ في المجال $]-\infty;-1]$ ؛ وعليه فالمعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ هما 0 و α حيث: $\alpha\in]-1,28\ ;\ -1,27[$.

ب) عين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

$\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ تكافئ $\frac{|x+1|}{e^x}=\frac{|m+1|}{e^m}$ وتكافئ $\left(\frac{|x+1|}{e^x}\right)^2=\left(\frac{|m+1|}{e^m}\right)^2$ ومعناه

$\frac{(x+1)^2}{e^{2x}}=\frac{(m+1)^2}{e^{2m}}$ معناه $(x+1)^2e^{-2x}=(m+1)^2e^{-2m}$ أي $f(x)=f(m)$.

تقبل المعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا معناه تقبل المعادلة $f(x)=f(m)$ حلا وحيدا وهذا يعني بيانيا أن

$f(m)=0$ أو $f(m)>1$ أي $m=-1$ أو $m\in]-\infty;\alpha[$.

3. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x+1)e^{-2x}$.

أ) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=e^{-2x}-2(x+1)e^{-2x}=(-2x-1)e^{-2x}$ ومنه

$g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=(-2x-1)e^{-2x}+2(x+1)e^{-2x}-e^{-2x}=(-2x-1+2x+2-1)e^{-2x}$ أي

$g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$.

- استنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ معناه $g(x)=-\frac{1}{2}g'(x)+\frac{1}{2}e^{-2x}$ ومنه دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ هي الدالة G حيث: $G(x)=-\frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{4}e^{-2x}$ أي $G(x)=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x}$.

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، حساب A مساحة الحيز المستوي المحدّد المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

$A=\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^{-2x}\,dx$.

نضع $\begin{cases}u(x)=(x+1)^2\\ v'(x)=e^{-2x}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(x)=2(x+1)\\ v(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{cases}$ إذا

$A=\int_{-1}^{0}u(x)\times v'(x)dx=\left[u(x)\times v(x)\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}u'(x)\times v(x)dx$

$$A = \left[-\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x} \right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x} \right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x} \right]_{-1}^{0}$$ ؛

$$A = -\frac{1}{2}\left[\left(x^2+2x+1+x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x} \right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}\left[\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right)e^{-2x} \right]_{-1}^{0}$$ ؛

$$A = -\frac{1}{2}\left[\frac{5}{2} - \left(1^2-3+\frac{5}{2}\right)e^2 \right] = \frac{e^2-5}{4}\,ua$$ ؛ $A \approx 0,6\,ua$.

التمرين 11 باك 2020 م1 7 نق

I) الدّالتان العدديتان g و h معرفتان على المجال $]-\infty;0]$ كما يلي: $g(x)=-2e^x$ و $h(x)=x(e^x+1)$.
حدّد إشارة كل من $h(x)$ و $g(x)$ على المجال $]-\infty;0]$.

II) الدالة العددية f معرّفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ: $f(x)=(x-3)e^x+\frac{1}{2}x^2$.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ . بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-\infty;0]$: $f'(x)=h(x)+g(x)$
ب. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

2) احسب $f(0)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;0]$ ثمّ تَحقّق أنّ: $-1.5<\alpha<-1.4$.

4) (P) هو التمثيل البياني للدالة: $x\mapsto\frac{1}{2}x^2$ على المجال $]-\infty;0]$.
أ . احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2\right]$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.
ب. ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (P) و (C_f).
جـ. أنشئ (P) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;0]$.

5) ليكن m وسيطا حقيقيا، ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $|f(x)|=e^m$ في $]-\infty;0]$.

حل مقترح للتمرين 11 باك 2020

I – لدينا $g(x)=-2e^x$ و $h(x)=x(e^x+1)$ من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0]$ فإن $g(x)$ سالبة و $h(x)$ سالبة .

II – الدالة f : $f(x)=(x-3)e^x+\frac{1}{2}x^2$

1. أ–إثبات عبارة المشتقة $f'(x)=e^x+(x-3)e^x+x=-2e^x+x(e^x+1)$ أي أن $f'(x)=g(x)+h(x)$.
ب–بما أن $g(x)$; $h(x)$ سالبين على المجال $]-\infty;0]$ فإن $f'(x)$ سالبة و منه f متناقصة على $]-\infty;0]$.

2. حساب $f(0)$: $f(0)=-3$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}.x^2=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-3)e^x=0$.

جدول تغيرات :

x	$-\infty$		0
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3

3. إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α

$f(-1,5)=0,12$ و $f(-1,4)=-0,11$ بما أن الدالة f مستمرة و متزايدة على المجال

$]-1,5\ ;\ -1,4[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حل وحيد α .

4. لدينا $(P): y=\frac{1}{2}x^2$

أ. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-3).e^x=0$ التفسير البياني $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2\right]=0$ (P) منحنى مقارب للمنحنى (C_f) جهة $-\infty$.

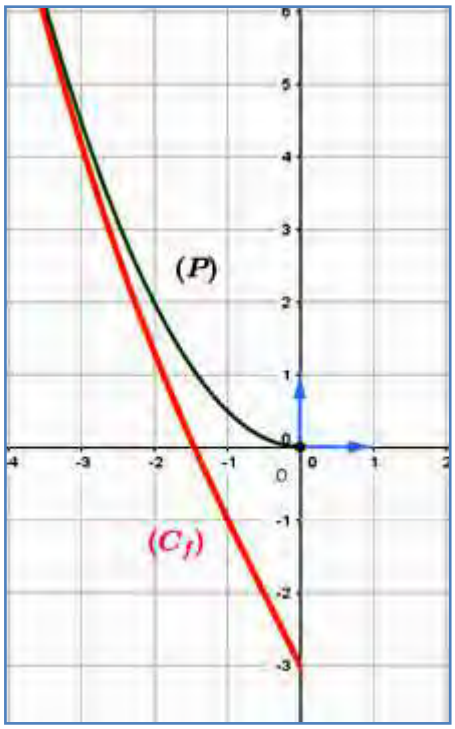
ب. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (P) : $\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2\right]=(x-3).e^x$ إشارة الفرق من إشارة $(x-3)$ و هو عدد سالب على المجال $]-\infty;0[$ و منه (C_f) يقع تحت المنحنى (P) .

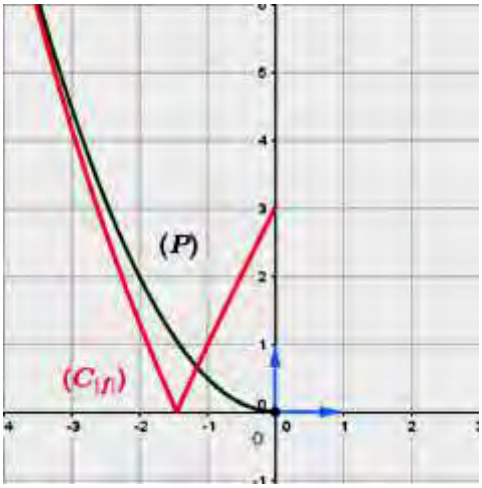
ج. إنشاء المنحنى (P) و المنحنى (C_f) :

5. ليكن m وسيط حقيقي $|f(x)|=e^m$ حلها هو ايجاد فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $(\Delta_m): y=e^m$

لما $m\in]-\infty;\ln(3)]$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين و منه للمعادلة حلين

لما $m\in]\ln 3\ ;+\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة حل وحيد .


(P)
(C_f)


(P)
$(C_{|f|})$

التمرين 12 باك 2021 م1 ن7

I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $g(x)=(x^2-3)e^x+3$

1) ادرس تغيّرات الدّالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ . بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق: $1,53<\alpha<1,54$

ب. احسب $g(0)$ ثمّ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x)=3x+1+(x^2-2x-1)e^x$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$

ب. استنتج أنّ f متزايدة تماما على كلّ من $]-\infty\,;0]$ و $[\alpha\,;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0\,;\alpha]$

جـ. شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

3) أ . بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=3x+1$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$

ب. ادرس وضعية (C) بالنّسبة إلى (Δ)

جـ. بيّن أنّ (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β تُحقّق: $2,03<\beta<2,04$

د. بيّن أنّ (C) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين لِـ (Δ) (لا يُطلب كتابة معادلة لِـ (T) و (T'))

4) ارسم (Δ) ، (T) ، (T') و (C) على $]-\infty\,;1+\sqrt{2}\,]$

(نأخذ: $\alpha\simeq1,53$ ، $f(\alpha)\simeq-2,3$ ، $f(\sqrt{3})\simeq-2,1$ و $f(-\sqrt{3})\simeq-3,2$)

5) الدّالة العددية h معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=f[\ln(x)]$

أ . احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

ب. ادرس اتجاه تغيّر الدّالة h ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

حل مقترح للتمرين 12 باك 2021

I - الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=(x^2-3)e^x+3$

1. دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[(x^2-3)e^x+3]=3$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}[(x^2-3)e^x]=0$ بالتزايد المقارن

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2e^x]=+\infty$.

المشتقة :

$g'(x)=2x.e^x+(x^2-3)e^x$ و منه $g'(x)=(x^2+2x-3)e^x$ إشارتها من إشارة (x^2+2x-3) و هي تنعدم عند العددين 1 و -3

و منه الدالة المشتقة$g'(x)$ موجبة على المجالين $]1;+\infty[$ و $]-\infty;-3[$ إذن g متزايدة على المجالين $]1;+\infty[$ و $]-\infty;-3[$

الدالة المشتقة$g'(x)$ سالبة على المجال $]-3;1[$ إذن g متناقصة على المجال $]-3;1[$.

جدول تغيرات g

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$g(x)$	3	↗	$\frac{6}{e^3}+3$	↘	$-2e+3$	↗	$+\infty$

2. أ-إثبات أن $g(x)=0$ تقبل حل وحد α حيث $1,53<\alpha<1,54$: $g(1,53)=-0,04$ و $g(1,54)=0,07$
الدالة g مستمرة و متزايدة تماما $[1,54\ ;\ 1,53]$ على فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حل وحيد α حيث $1,53<\alpha<1,54$.

ب -حساب $g(0)=(0^2-3)e^0+3=0$

إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II - الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=3x+1+(x^2-2x-1).e^x$

1. حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[3x+1]=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x-1).e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2.e^x=+\infty$.

2. أ-إثبات عبارة المشتقة : $f'(x)=3+(2x-2)e^x+(x^2-2x-1).e^x$ يعني أن $f'(x)=(x^2-3)e^x+3$ إذن $f'(x)=g(x)$.

ب-من إشارة $g(x)$ نستنتج أن f متزايدة على المجالين $]-\infty;0[$ و $]\alpha;+\infty[$ و متناصة على المجال $]0;\alpha[$

ج- جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3. أ-بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x-1).e^x=0$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(3x+1)]=0$ $(\Delta):y=3x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) جهة $-\infty$.

ب-دراسة الوضعية : دراسة إشارة الفرق $[f(x)-(3x+1)]=(x^2-2x-1).e^x$ إشارتها من إشارة (x^2-2x-1) نحسب المميز: $\Delta=8$ و منه لـ(x^2-2x-1) جذرين هما $x_1=1+\sqrt{2}$ و $x_2=1-\sqrt{2}$

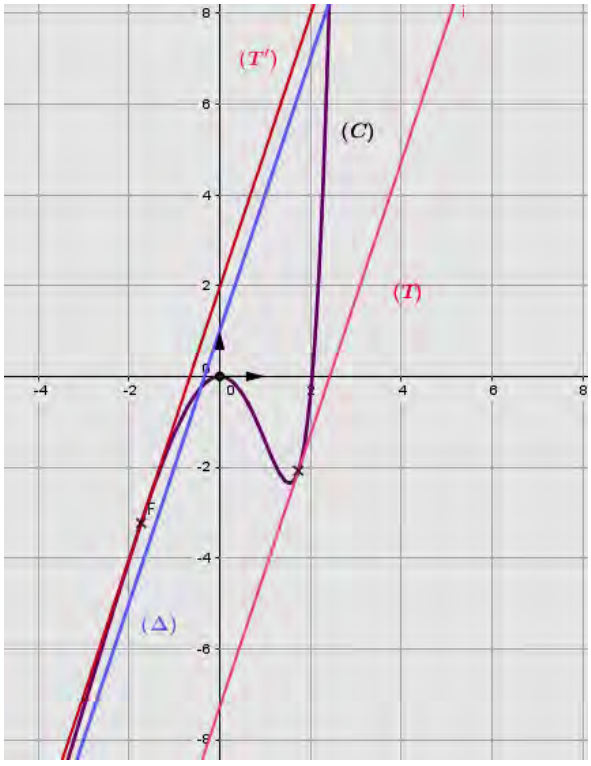
x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
إشارة $f(x)-(3x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C) يقع فوق (Δ)		(C) يقع تحت (Δ)		(C) يقع فوق (Δ)	
		(C) و (Δ) يتقاطعان				(C) و (Δ) يتقاطعان	

ج- لدينا $f(2,03)=-0,06$ و $f(2,04)=0,06$ بما أن الدالة f مستمرة و متزايدة على المجال $]\alpha\,;+\infty[$ و f مستمرة و سالبة على المجال $]-\infty\,;\alpha[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد β حيث $2,03<\beta<2,04$ يعني أن (C) يقع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β .

ج- إثبات أن (C) يقبل مماسين (T) و (T') موازيان للمستقيم (Δ) يعني أن المعادلة $f'(x)=3$ تقبل حلين متمايزين

$f'(x)=3$ يعني أن $g(x)=3$ أي أن $(x^2-3)e^x+3=3$ يكافئ $(x^2-3)e^x=0$ يكافئ $(x^2-3)=0$ يكافئ $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\ \text{او}\\ x=-\sqrt{3}\end{cases}$

4. الرسم: (T) و (T') و (Δ) و (C):



5. الدالة العددية h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ $h(x)=f(\ln(x))$:

أ - حساب

$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} h(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(\ln(x))=-\infty$.

ب ـ دراسة تغيرات الدالة h

$h'(x)=\frac{1}{x}f'(\ln(x))$ و $f'(x)=g(lx)$ و منه $h'(x)=\frac{1}{x}g(\ln(x))$

$h'(x)=0$ يكافئ $\ln x=0$ أو $x=1$ يكافئ $\ln x=\alpha$ أو $x=e^{\alpha}$

$h'(x)<0$ يكافئ $0<\ln x<\alpha$ يكافئ $1<x<e^{\alpha}$ و منه h متناقصة على المجال $[1;e^{\alpha}]$

و متزايدة على المجالين $]0;1]$ و $[e^{\alpha};+\infty[$

جدول تغيرات

x	0		1		e^{α}		$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

حلول تمارين الدوال الأسّية الواردة في الباكالوريا

شعبة :

تقني رياضي

التمرين 1 بالك 2009 م2 7,5 نق

نعتبر الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$. وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_f)$.
2. ادرس تغيرات الدالة f على $[0;+\infty[$ ثم استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.
3. بيّن أن المستقيم ذي المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$.
   - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$،
   - استنتج المستقيم المقارب للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند $-\infty$.
4. بيّن أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا واحدا α بحيث $-1,7<\alpha<-1,6$.
5. ارسم $(\mathcal{C}_f)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$.
6. بيّن أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $f(x)=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$.
7. احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمات ذات المعادلات: $y=x+2$، $x=0$ و $x=\alpha$.
   - بيّن أن $\mathcal{A}(\alpha)=2\ln(-\alpha)$ ثم استنتج حصرا للعدد $\mathcal{A}(\alpha)$.

حل مقترح للتمرين 1 بالك 2009

نعتبر الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$.

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x :

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x)+f(-x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}-x+\dfrac{2}{e^{-x}+1}$

$$f(x)+f(-x)=\frac{2}{e^x+1}+\frac{2e^x}{1+e^x}=\frac{2(e^x+1)}{1+e^x}=2$$

- استنتاج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_f)$:

النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ معناه أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $(2\times0-x)\in\mathbb{R}$ و $f(2\times0-x)=2\times1-f(x)$ ومعناه أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $(-x)\in\mathbb{R}$ و $f(-x)=2-f(x)$

ليكن x عددا حقيقيا: لدينا $(-x)\in\mathbb{R}$ لأن 0 يتوسط المجموعة $\mathbb{R}$ ولدينا من السؤال السابق $f(x)+f(-x)=2$ أي $f(-x)=2-f(x)$ إذن $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_f)$.

2. دراسة تغيّ

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = 0$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{2}{e^x+1}\right) = +\infty$.

$f(0) = 0 + \dfrac{2}{e^0+1} = 1$.

$f'(x) = 1 - \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$ ،

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{2x} > 0$ و $(e^x+1)^2 > 0$ إذن $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذن هي متزايدة تماما على $]-\infty;0]$.

استنتاج جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty}[2 - f(t)] = -\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)$	↗	$+\infty$

3. تبيين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x+1} = 0$

إذا للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x$ وهذا عند $+\infty$.

- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+\dfrac{2}{e^x+1}-(x+2)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^x+1} - 2$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)] = 0$.

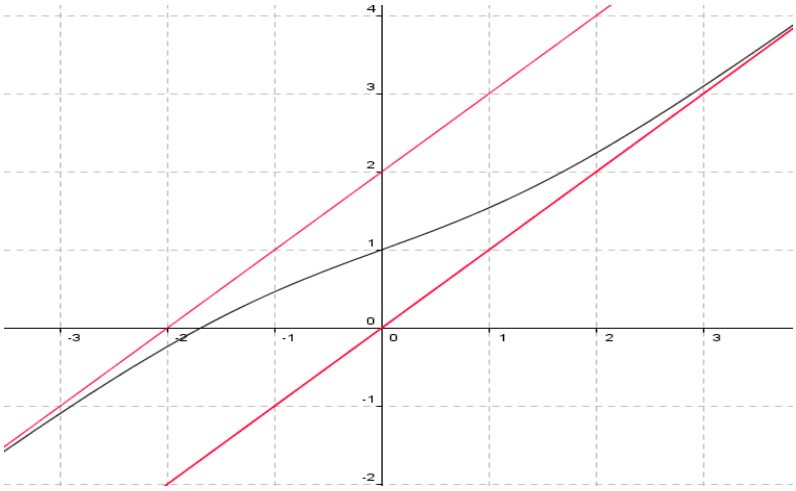
- استنتاج المستقيم المقارب للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند $-\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)] = 0$ إذن للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x+2$ وهذا عند $-\infty$.

4. تبيين أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا واحدا α بحيث $-1,7 < \alpha < -1,6$:

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ إذا هي مستمرة على المجال $[-1,6;-1,7]$ ولدينا $f(-1,7) \approx -0,0089$ و $f(-1,6) \approx 0,064$ إذن $f(-1,7)\times f(-1,6) < 0$ وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]-1,7;-1,6[$ حيث $f(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن α يكون وحيد.

5. رسم $(\mathcal{C}_f)$ من أجل $x \in \mathbb{R}$:



6. تبيين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $f(x)=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x)=x+\dfrac{2}{e^{x}+1}=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}\left(e^{x}+1\right)}=x+\dfrac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$

7. حساب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمات ذات المعادلات: $y=x+2$ ، $x=0$ و $x=\alpha$:

$$\mathcal{A}(\alpha)=\int_{\alpha}^{0}\left[x+2-f(x)\right]dx=\int_{\alpha}^{0}\left[x+2-x-\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}\right]dx$$

$$=\int_{\alpha}^{0}\left[2+2\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right]dx=2\left[x+\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{\alpha}^{0}$$

$$\mathcal{A}(\alpha)=2\left[\ln 2-\alpha-\ln\left(1+e^{-\alpha}\right)\right]ua=2\left[\ln\frac{2}{1+e^{-\alpha}}-\alpha\right]ua$$.

- تبيين أن $\mathcal{A}(\alpha)=2\ln(-\alpha)$:

لدينا $f(\alpha)=0$ معناه $\alpha+\dfrac{2e^{-\alpha}}{e^{-\alpha}+1}=0$ ومعناه $\dfrac{2e^{-\alpha}}{e^{-\alpha}+1}=-\alpha$

يكافئ $\ln\dfrac{2e^{-\alpha}}{e^{-\alpha}+1}=\ln(-\alpha)$ ويكافئ $\ln\dfrac{2}{e^{-\alpha}+1}+\ln e^{-\alpha}=\ln(-\alpha)$

معناه $\ln\dfrac{2}{e^{-\alpha}+1}-\alpha=\ln(-\alpha)$ ومعناه $2\left(\ln\dfrac{2}{e^{-\alpha}+1}-\alpha\right)=2\ln(-\alpha)$ أي $\mathcal{A}(\alpha)=2\ln(-\alpha)$.

- استنتاج حصرا للعدد $\mathcal{A}(\alpha)$:

$-1,7<\alpha<-1,6$ معناه $1,6<-\alpha<1,7$ ومعناه $\ln 1,6<\ln(-\alpha)<\ln 1,7$ يكافئ

$2\ln 1,6<2\ln(-\alpha)<2\ln 1,7$ أي $0,94<\mathcal{A}(\alpha)<1,06$

التمرين 2 بالك 2010 م2 ن7

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$.

ليكن $(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x)=ax+\dfrac{b}{3(e^x-1)}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$.

2. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها.

3. بيّن أنّ f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

4. أ ـ (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب: $y=x$ و $y=x+\dfrac{4}{3}$.

ـ بيّن أنّ (D) و (D') مقاربان للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$، ثمّ حدّد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

ب ـ بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث: $0,9<x_0<0,91$ و $-1,66<x_1<-1,65$.

جـ ـ احسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f(x)+f(-x)$.

ـ فسّر النتيجة هندسيا.

د ـ ارسم (D) و (D') و $(\mathcal{C}_f)$.

هـ ـ m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرّف بالمعادلة $y=x+m$.

ـ ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

5. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\left[f(x)\right]^2$.

ـ ادرس تغيّرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x.

حل مقترح للتمرين (2) (باك 2010)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f الممثل في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1. تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث: $f(x)=ax+\dfrac{b}{3(e^x-1)}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

$$f(x)=\frac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}=\frac{3x(e^x-1)}{3(e^x-1)}+\frac{-4}{3(e^x-1)}$$ إذا $a=1$ و $f(x)=x+\dfrac{-4}{3(e^x-1)}$ وعليه $b=-4$

$$f(x)=x-\frac{4}{3(e^x-1)}$$

2. حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات تعريفها:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x-\dfrac{4}{x}=-\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{3(e^x-1)} = 0$ إذا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \dfrac{-4}{3(e^x-1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

ولدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x + \dfrac{-4}{3(e^x-1)} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} x + \dfrac{-4}{3(e^x-1)} = +\infty$

3. تبيين أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها:

$$f(x) = x + \frac{-4}{3(e^x-1)} \text{ ومنه } f'(x) = 1 + \frac{4e^x}{3(e^x-1)^2}$$

وبالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) > 0$ إذا f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ومنه ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↗ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↗ $-\infty$

4.أ ـ (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب $y = x$ و $y = x + \dfrac{4}{3}$

ـ تبيان أن (D) و (D') مقاربان للمنحني (C_f)

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x + \dfrac{-4}{3(e^x-1)} - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{3(e^x-1)} = 0$ وبالتالي (D) هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - \left(x+\frac{4}{3}\right)\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[x + \frac{-4}{3(e^x-1)} - x - \frac{4}{3}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - \left(x+\frac{4}{3}\right)\right] = \lim_{x\to-\infty} -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{(e^x-1)} + 1\right) = 0$$

وبالتالي (D') هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

ـ وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D):

x	$-\infty$	0	$+\infty$

$f(x)-x=\dfrac{-4}{3(e^x-1)}$	$+$	$-$
الوضعية	(D) فوق (D)	(C_f) أسفل (C_f)

ـ وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D'):

$$f(x)-\left(x+\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{e^x-1}+1\right)=-\frac{4}{3}\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-\left(x+\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)$		$+$	$-$
الوضعية		(C_f) فوق (D')	(C_f) أسفل (D')

ب ـ تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $0,9<x_0<0,91$ و $-1,65>x_1>-1,66$:

لدينا الدالة f مستمرة على كل مجال من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ إذا هي مستمرة على كل مجال من المجالين $[0,9;0,91]$ و $[-1,66;-1,65]$ ؛

ولدينا: $f(0,9)\approx -0,01$ و $f(0,91)\approx 0,01$ ومنه $f(0,9)\times f(0,91)<0$

ولدينا: $f(-1,66)\approx -0,01$ و $f(-1,65)\approx 0,0002$ ومنه $f(-1,66)\times f(-1,65)<0$

إذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x_0)=0$ و $f(x_1)=0$.

جـ ـ حساب $f(x)+f(-x)$:

$$f(x)+f(-x)=x+\frac{-4}{3(e^x-1)}-x+\frac{-4}{3(e^{-x}-1)}$$

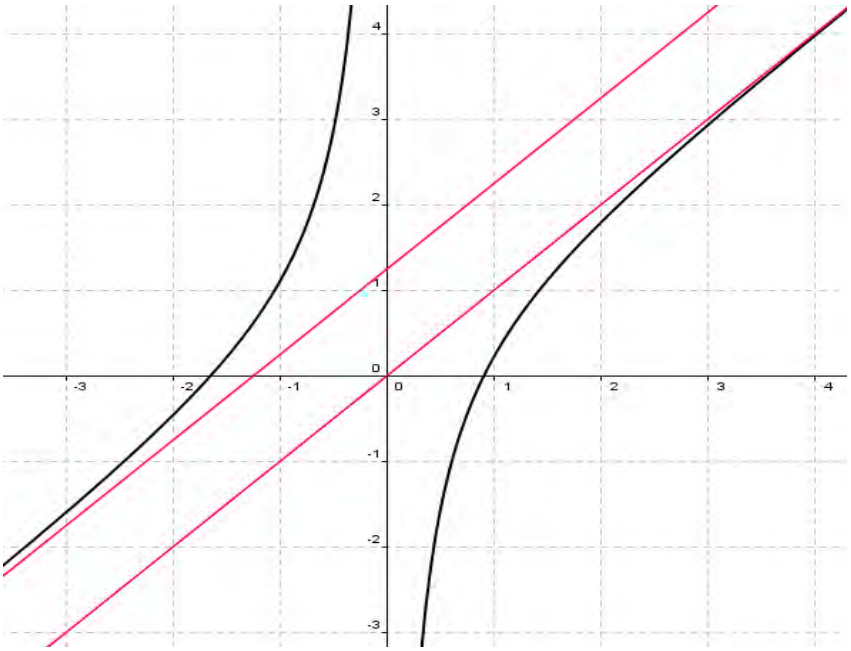
$$f(x)+f(-x)=\frac{-4}{3}\left[\frac{1}{(e^x-1)}+\frac{e^x}{(1-e^x)}\right]=\frac{-4}{3}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x-1}\right]=\frac{4}{3}$$

ـ التفسير الهندسي:

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ فإن $(-x)\in\mathbb{R}^*$ ولدينا $f(2\times 0-x)=2\times\frac{2}{3}-f(x)$

ومنه النقطة $\omega\left(0;\frac{2}{3}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

د ـ رسم (D) و (D') و (C_f) :



هـ ـ m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرف بالمعادلة $y = x + m$

ـ المناقشة بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$

ـ إذا كان $m \in]-\infty;0[\cup \left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا.

ـ إذا كان $m \in \left[0;\frac{4}{3}\right]$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا.

5. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يأتي: $g(x) = [f(x)]^2$

دون حساب $g(x)$ بدلالة x ، دراسة تغيرات الدالة g :

لدينا: $g'(x) = 2f'(x) \times f(x)$

ولدينا من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ولدينا أيضا إذا كان $x \in]0;x_0[$ فإن $f(x) < 0$

وإذا كان $x \in]x_0;+\infty[$ فإن $f(x) > 0$ وعليه فمن أجل كل $x \in]0;x_0[$ ، $g'(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]x_0;+\infty[$ ، $g'(x) > 0$.

لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} [f(x)]^2 = +\infty$.

ولدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ إذا $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

التمرين 3 بالك 2011 م2 ن7

الجزء I :

f الدالة المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=3-\dfrac{4}{e^x+1}$. $(\mathcal{C}_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. ادرس تغيّرات الدالة f .
2. عيّن المستقيمات المقاربة للمنحني $(\mathcal{C}_f)$.
3. بيّن أنّ للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها ثمّ اكتب معادلة لمماس $(\mathcal{C}_f)$ عندها.
4. لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=f(x)-x$.
   أ- ادرس تغيّرات الدالة g .
   ب- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,7<\alpha<2,8$.
5. أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.
   ب- ارسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x$ والمنحني $(\mathcal{C}_f)$.

الجزء II :

(U_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $U_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=f(U_n)$.

1. باستخدام $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) ، مثل U_0 ، U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل.
2. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1\le U_n<\alpha$.
3. بيّن أنّ المتتالية (U_n) متزايدة تماما.
4. استنتج أنّ (U_n) متقاربة وبيّن أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\alpha$.

حل مقترح للتمرين 3 باك 2011

الجزء I :

f الدالة المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=3-\dfrac{4}{e^x+1}$.

$(\mathcal{C}_f)$ منحناها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. دراسة تغيّرات الدالة f :

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3-\dfrac{4}{e^x+1}=-1$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 3-\dfrac{4}{e^x+1}=3$

$f(x)=3-\dfrac{4}{e^x+1}$ ومنه $f'(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$ لدينا إذا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

	$+\infty$

$f'(x)$	+
$f(x)$	-1 ↗ 3

2. تعيين المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ إذا المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=-1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ إذا المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=3$.

3. تبيين أن للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها:

لدينا $f'(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$ ومنه

$$f''(x)=\frac{4e^x(e^x+1)^2-8e^{2x}(e^x+1)}{(e^x+1)^4}=\frac{4e^x(e^x+1)(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4}$$

$$=\frac{4e^x(e^x+1)(1-e^x)}{(e^x+1)^4}$$

$f''(x)=0$ معناه $1-e^x=0$ ومعناه $x=0$ ؛ $f''(x)>0$ معناه $1-e^x>0$ ومعناه $x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		$+\quad 0\quad -$	

العبارة $f''(x)$ تنعدم من أجل 0 وتغيّر من إشارتها وعليه فللمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ نقطة انعطاف $\omega(0;f(0))$ أي $\omega(0;1)$

- معادلة المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $\omega(0;1)$:

$y=f'(0)x+f(0)$ أي $y=x+1$.

4. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=f(x)-x$.

أ- دراسة تغيرات الدالة g :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=-\infty$.

$g(x)=f(x)-x$ ومنه $g'(x)=f'(x)-1=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}-1=\dfrac{4e^x-e^{2x}-2e^x-1}{(e^x+1)^2}=-\dfrac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$

لدينا $g'(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x ، $g'(x)<0$ وعليه فالدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

ب- تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,7<\alpha<2,8$:

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ وكذلك الدالة $x \mapsto -x$ إذا الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ومنه هي مستمرة على المجال $[2,7;2,8]$
ولدينا: $g(2,7) \approx 0,048$ و $g(2,8) \approx -0,029$ إذن $g(2,7) \times g(2,8) < 0$ وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة
يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]2,7;2,8[$ يحقق $g(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فإن α يكون وحيد.

5.أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$:

$f(x) = 0$ معناه $3 - \frac{4}{e^x + 1} = 0$ ومعناه $3 = \frac{4}{e^x + 1}$ يكافئ $3e^x = 1$

ويكافئ $e^x = \frac{1}{3}$ أي $x = -\ln 3$.

ب- رسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x$ والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$:



الجزء II :

(U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.

1. باستخدام $(\mathcal{C}_f)$ و (Δ) تمثيل U_0 ، U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل:

لدينا $U_0 = 1$ ، $U_1 = f(U_0)$ و $U_2 = f(U_1)$

2. تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \leq U_n < \alpha$:

لدينا $U_0 = 1$ إذا $1 \leq U_0 < \alpha$ ؛ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذا هي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1;\alpha[$

وبالتالي صورة المجال $[1;\alpha[$ بواسطة الدالة f هو المجال $[f(1);f(\alpha)[$ أي $\left[3 - \frac{4}{e+1};\alpha\right[$

نفرض أن $U_k \in [1;\alpha[$ من أجل عدد طبيعي k إذن $f(U_k) \in \left[3-\frac{4}{e+1};\alpha\right[$ ولدينا $3-\frac{4}{e+1} \approx 1,92$ إذن

$\left[3-\frac{4}{e+1};\alpha\right[\subset [1;\alpha[$ ومنه $f(U_k) \in [1;\alpha[$ أي $U_{k+1} \in [1;\alpha[$ وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n \in [1;\alpha[$.

3. تبيين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما: $U_{n+1}-U_n = f(U_n)-U_n = g(U_n)$

لدينا من أجل كل $x \in]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)>0$ وبما أن $U_n \in [1;\alpha[$ فإن $g(U_n)>0$ أي $U_{n+1}-U_n>0$ ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

4. استنتاج أن (U_n) متقاربة:

المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد α وهي متزايدة تماما إذن هي متقاربة,

- تبيين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$:

بما أن (U_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \ell$

ولدينا $U_{n+1} = f(U_n)$ حيث f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ إذن $\ell = f(\ell)$ وهذا يعني $f(\ell)-\ell = 0$ أي $g(\ell) = 0$

ولدينا المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α إذن $\ell = \alpha$ وعليه $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$.

التمرين 4 بالك 2012 م2 ن7

الجزء I :

g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = -4+(4-2x)e^x$.

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث:
$1,59<\alpha<1,60$.

3. استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء II :

f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}$.

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2\ cm$).

1. بيّن أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتيهما على الترتيب: $y=-1$ و $y=0$.

2. أ- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$.

ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f .

جـ- احسب $f(1)$ ، ثمّ استنتج، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.

3. أ- بيّن أن: $f(\alpha)=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ، حيث α هو العدد المعرّف في السؤال 2 من الجزء الأول.

ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

جـ- ارسم المنحني $(\mathcal{C}_f)$.

4. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة:
$2x-2=(e^x-2x)(m+1)$.

5. h هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=[f(x)]^2$.

أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كلا من $f'(x)$ و $f(x)$ ، ثمّ استنتج إشارة $h'(x)$.

ب- شكّل جدول تغيرات الدالة h .

حل مقترح للتمرين 4 باك 2012

الجزء I :

g هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=-4+(4-2x)e^x$.

1. دراسة تغيرات الدالة g :

الدالة الأسّية والدالة التآلفية تقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن جداءهما كذلك وبالتالي الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$g'(x)=-2e^x+(4-2x)e^x=(2-2x)e^x=2(1-x)e^x$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $(1-x)$ إذا $g'(1)=0$ ؛

من أجل $x\in]1;+\infty[$ ، $1-x<0$ ومنه $g'(x)<0$ إذا الدالة g متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ ؛

من أجل $x\in]-\infty;1[$ $1-x>0$ $g'(x)>0$ g $]-\infty;1$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

إذا $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -4+4e^x-2xe^x = -4$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-2x) = -\infty$ إذا $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -4+(4-2x)e^x = -\infty$

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$g(x)$	-4	↗	$\|$	↗	$2e-4$	↘	$\|$	↘	$-\infty$

2. تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث:

$1,59 < \alpha < 1,60$:

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ إذا هي مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;1]$

و $[1;+\infty[$ وهي رتيبة تماما على كل من هذين المجالين ؛

لدينا: $g(]-\infty;1]) = [-4;2e-4]$ و $g([1;+\infty[) =]-\infty;2e-4]$ ولدينا $2e-4 \approx 1,44$ إذا $0 \in]-4;2e-4]$

و $0 \in]-\infty;2e-4]$ ومنه بواسطة الدالة g العدد 0 يقبل سابقة وحيدة α في المجال $[1;+\infty[$ ويقبل سابقة وحيدة β في

المجال $]-\infty;1]$ بما أن $g(0) = -4+(4-2\times0)e^0 = 4-4 = 0$ فإن $\beta = 0$ ومنه $g(\alpha) = g(0) = 0$. لدينا

$g(1,59) \approx 0,02$ و $g(1,60) \approx -0,04$ إذا $g(1,60)\times g(1,59) < 0$ ومنه $1,59 < \alpha < 1,60$.

3. استنتاج إشارة $g(x)$:

من أجل $x \in]-\infty;0[\cup]\alpha;+\infty[$ ، $g(x) < 0$ ؛

من أجل $x \in]0;\alpha[$ ، $g(x) > 0$ و $g(\alpha) = g(0) = 0$.

الجزء II :

f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{2x-2}{e^x-2x}$. $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تبيين أن المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتيهما على الترتيب: $y=-1$ و $y=0$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-2}{e^x-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{e^x-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2}=0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y=-1$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y=0$.

2. أ- البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{g(x)}{\left(e^x-2x\right)^2}$:

$$f'(x)=\frac{2\left(e^x-2x\right)-(2x-2)\left(e^x-2\right)}{\left(e^x-2x\right)^2}$$

$$=\frac{2e^x-4x-2xe^x+4x+2e^x-4}{\left(e^x-2x\right)^2}=\frac{-4+4e^x-2xe^x}{\left(e^x-2x\right)^2}$$

$$=\frac{-4+(4-2x)e^x}{\left(e^x-2x\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(e^x-2x\right)^2}$$

ب- استنتاج إشارة $f'(x)$:

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ وعليه: $f'(0)=0$ و $f'(\alpha)=0$ ؛

من أجل $x\in]-\infty;0[\cup]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)<0$ ومنه $f'(x)<0$ ،

ومن أجل $x\in]0;\alpha[$ ، $g(x)>0$ ومنه $f'(x)>0$.

- جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘		↗	$f(\alpha)$			↘	0
			-2						

جـ- حساب $f(1)$: $f(1)=\frac{2-2}{e-2}=0$

- استنتاج، حسب قيَم x ، إشارة $f(x)$:

$f(1)=0$ ؛ من أجل $x\in]-\infty;1[$ ، $f(x)<0$

ومن أجل $]\infty$

3. أ- تبيين أن: $f(\alpha)=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ، حيث α هو العدد المعرّف في السؤال 2 من الجزء الأول:

$g(\alpha)=0$ معناه $-4+(4-2\alpha)e^{\alpha}=0$ ومعناه $e^{\alpha}=\dfrac{4}{4-2\alpha}$ يكافئ $e^{\alpha}-2\alpha=\dfrac{4}{4-2\alpha}-2\alpha$ أي

$$e^{\alpha}-2\alpha=\frac{4-8\alpha+4\alpha^2}{4-2\alpha}$$

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha-2}{e^{\alpha}-2\alpha}=\frac{(2\alpha-2)(4-2\alpha)}{4-8\alpha+4\alpha^2}=\frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{1-2\alpha+\alpha^2}$$

$$=\frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^2}=\frac{2-\alpha}{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1-\alpha}{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha-1}-1$$

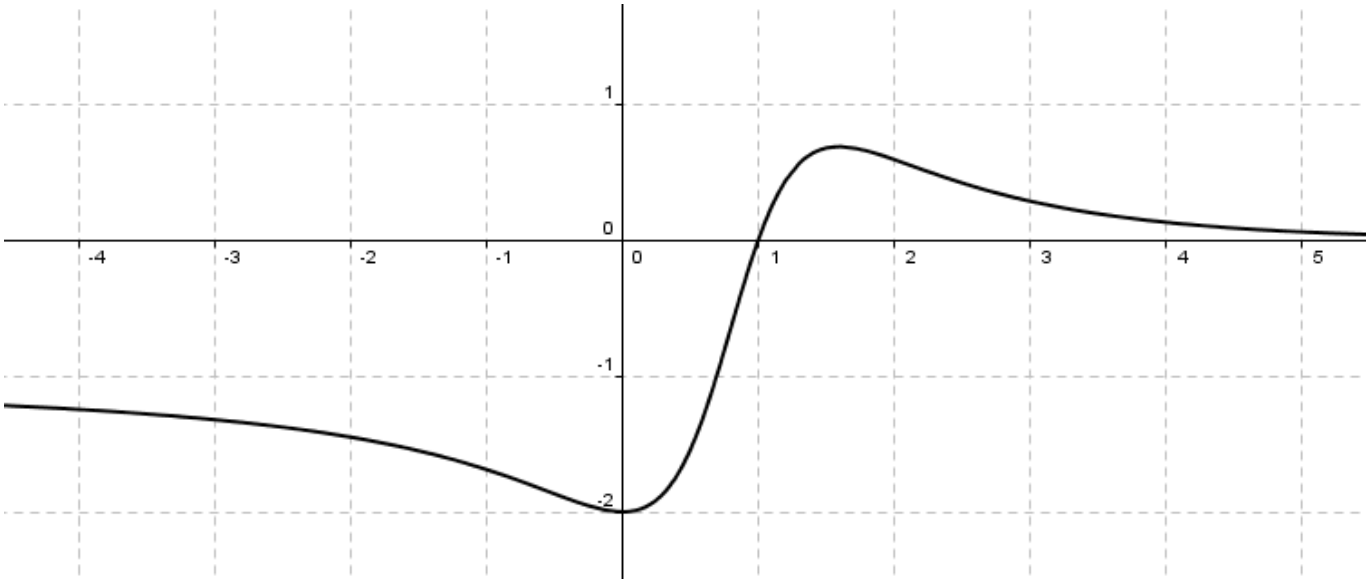
ب- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$: (تدوّر النتائج إلى 10^{-2}).

$1,59<\alpha<1,60$ معناه $1,59-1<\alpha-1<1,60-1$

ومعناه $0,59<\alpha-1<0,60$ يكافئ $\dfrac{1}{0,60}<\dfrac{1}{\alpha-1}<\dfrac{1}{0,59}$

ويكافئ $\dfrac{1}{0,59}-1<\dfrac{1}{\alpha-1}-1<\dfrac{1}{0,60}-1$ أي $0,67<f(\alpha)<0,69$.

جـ- رسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$:



4. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة:

$(e^x-2x)(m+1)=2x-2$:

$(e^x-2x)(m+1)=2x-2$ معناه $\dfrac{2x-2}{e^x-2x}=m+1$ أي $f(x)=m+1$.

إذا كان $m\in]-\infty;-3[\cup\left]\dfrac{1}{-2}-1;+\infty\right[$ فإن $m+1<-2$ أو $m+1>\dfrac{1}{-2}-1$ ومنه المعادلة لا تقبل حلا.

إذا كان $m=-3$ فإن $m+1=-2$ ومنه المعادلة تقبل حلا معدوما مضاعفا.

إذا كان $m=\frac{1}{\alpha-1}-2$ فإن $m+1=\frac{1}{\alpha-1}-1$ ومنه المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا وهو α .

إذا كان $m\in]-3;-2[$ فإن $-2<m+1<-1$ ومنه المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة (أحدهما سالب والآخر موجب).

إذا كان $m\in[-2;-1]$ فإن $-1\le m+1\le 0$ ومنه المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا.

إذا كان $m\in\left]-1;\frac{1}{\alpha-1}-2\right[$ فإن $0<m+1<\frac{1}{\alpha-1}-1$ ومنه المعادلة تقبل حلين موجبين.

5. h هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=[f(x)]^2$.

أ- حساب $h'(x)$ بدلالة كلا من $f'(x)$ و $f(x)$:

نضع $u(x)=x^2$ الدالة المربع u تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $u'(x)=2x$ ؛

لدينا $h(x)=[f(x)]^2=u[f(x)]=[u\circ f](x)$ ومنه:

$$h'(x)=[u\circ f]'(x)=f'(x)\times u'[f(x)]=f'(x)\times 2f(x)$$
$$=2f'(x)\times f(x)$$

- استنتاج إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

ب- جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	1	↗	4	↘	0	↗	$[f(\alpha)]^2$	↘	0

التمرين 5 باك 2013 م2 6,5 نق

I- الدالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^x$.

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1+(x-1)e^x\ge 0$.

II– الدالة f معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-1}{x};x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1.أ- بيّن أن الدالة f مستمرّة على المجال $[0;+\infty[$.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2.أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1+(x-1)e^x}{x^2}.$$

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

III– n عدد طبيعي حيث $n\geq 1$ ، f_n الدالة المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x$ و $(\mathcal{C}_n)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f_n على المجال $[0;+\infty[$.

2. احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

3. ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$.

4. بيّن أنّ جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$ تمرّ بنقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثيتيها.

5.أ- بيّن أنه ، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من المجال $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1)<0$ ، ثمّ برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.

6.أ- بالاعتماد على الجزء **II–** ؛ بيّن أنه ، من أجل كل x من المجال $]0;1]$: $\dfrac{e^x-1}{x}\leq e-1$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$:

$$\ln(\alpha_n)\geq\frac{1-e}{n}$$ ثمّ ، $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

جـ- جد نهاية المتتالية (α_n).

حل مقترح للتمرين 5 باك 2013

I– الدالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^x$.

1. دراسة تغيّرات الدالة g :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x-e^x\right)=0$$ ؛ $$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$$.

$(e^x=xe^x$

$g'(x)<0$ ، $]-\infty;0[$

و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g'(x)>0$

وعليه فجدول تغيرات الدالة g يكون على النحو التالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

2. تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1+(x-1)e^x \geq 0$:

من خلال جدول تغيرات الدالة g لدينا القيمة الحدية الصغرى للدالة g هي -1 وتبلغها عند القيمة 0

أي من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \geq -1$ وهذا يعني أن $(x-1)e^x \geq -1$ يكافئ $1+(x-1)e^x \geq 0$.

II– الدالة f معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-1}{x};x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

1.أ- تبيين أن الدالة f مستمرة على المجال $[0;+\infty[$:

لدينا الدالتان $x \mapsto e^x-1$ و $x \mapsto x$ مستمرتان على $\mathbb{R}$ فهما مستمرتان على المجال $]0;+\infty[$ وبما أن $x \neq 0$ فإن الدالة f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{e^x-e^0}{x-0}=e^0=1$

($\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{e^x-e^0}{x-0}$ هو العدد المشتق للدالة الأسية النيبرية من أجل القيمة 0) ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=f(0)$ وعليه فالدالة f مستمرة عند 1 من اليمين وبالتالي هي مستمرة على المجال $[0;+\infty[$.

ب- حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x-1}{x}=\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x}=0$.

2.أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1+(x-1)e^x}{x^2}$$:

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$.

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا من الجزء **I–** 2. ، من أجل كل عدد حقيقي x : $1+(x-1)e^x \geq 0$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $1+(x-1)e^x>0$ وهذا يعني أن $f'(x)>0$ أي $\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}>0$ وعليه فالدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$:

- جدول تغيرا

x	0		$+\infty$
f'		$+$	
f	1	↗	$+\infty$

III – n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ،

f_n الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n\ln x$$

و $(\mathcal{C}_n)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f_n على المجال $]0;+\infty[$:

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $]0;+\infty[$: $f_n'(x) = f'(x) + \frac{n}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) > 0$ و $\frac{n}{x} > 0$ إذن $f'(x) + \frac{n}{x} > 0$ أي $f_n'(x) > 0$ وعليه فالدالة f_n متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2. حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$:

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} n\ln x = -\infty$ إذا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f_n(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{e^x - 1}{x} + n\ln x = -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} + n\ln x = +\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} n\ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

3. دراسة الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$:

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، وليكن x عددا حقيقيا من المجال $]0;+\infty[$:

أي $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x} + (n+1)\ln x\right) - \left(\frac{e^x - 1}{x} + n\ln x\right)$

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n\ln x + \ln x - \frac{e^x - 1}{x} - n\ln x$ وهذا يعني أن $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln x$

من أجل $x = 1$ ، لدينا $\ln x = 0$ ومنه $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$ وبالتالي المنحنيان $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$ يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(1;e-1)$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ لدينا $\ln x < 0$ ومنه $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ وبالتالي المنحنى $(\mathcal{C}_{n+1})$ يقع أسفل المنحنى $(\mathcal{C}_n)$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ لدينا $\ln x > 0$ ومنه $f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$ وبالتالي المنحنى $(\mathcal{C}_{n+1})$ يقع فوق المنحنى $(\mathcal{C}_n)$.

4. تبيين أن جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$ تمرّ بنقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثيتيها:

نضع $B(x_0;y_0)$.

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f_n(x_0)=y_0$ معناه $\frac{e^{x_0}-1}{x_0}+n\ln x_0=y_0$ ومعناه $\ln x_0=0$ و

$x_0=1$ يكافئ $\frac{e^{x_0}-1}{x_0}=y_0$

و $y_0=e-1$ وعليه فجميع المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$ تمر بنقطة ثابتة $B(1;e-1)$.

5. أ- تبيين أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من المجال $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f_1(x)=\frac{e^x-1}{x}+\ln x$

الدالتان f و $x\mapsto \ln x$ مستمرتان على المجال $]0;+\infty[$ إذا الدالة f_1 هي مستمرة على $]0;+\infty[$ وبالتالي هي مستمرة على المجال $[0,3;0,4]$ ولدينا $f_1(0,3)\approx -0,038$ و $f_1(0,4)\approx 0,313$ إذا $f_1(0,4)\times f_1(0,3)<0$ وعليه فحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α_1 من المجال $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$ وبما أن الدالة f_1 متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن α_1 وحيد في المجال $]0;+\infty[$.

ب- تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$ فإن: $f_n(\alpha_1)<0$:

$f_1(\alpha_1)=0$ معناه $\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}+\ln\alpha_1=0$ ومعناه $\ln\alpha_1=-\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}$

$$f_n(\alpha_1)=\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}-n\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}=\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}(1-n)=(1-n)\,f(\alpha_1)$$

من خلال جدول تغيرات الدالة f لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x)>1$ ومنه $f(\alpha_1)>0$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$ ، $1-n<0$ إذن $f_n(\alpha_1)<0$.

- البرهان أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$ وهذا من أجل $n>1$:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم الدالة f_n مستمرة ومتزايدة تماما على $[\alpha_1;1]$ ولدينا $f_n(\alpha_1)<0$ و $f_n(1)=e-1$ أي $f_n(1)>0$ ومنه $f_n(1)\times f_n(\alpha_1)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.

6. أ- بالاعتماد على الجزء II- ؛ تبيين أنه، من أجل كل x من المجال $]0;1]$: $\frac{e^x-1}{x}\le e-1$:

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1]$: $f(x)\le f(1)<1$

أي $\frac{e^x-1}{x}\le\frac{e^1-1}{1}<1$ وهذا يعني أن $\frac{e^x-1}{x}\le e-1<1$.

ب- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\ge 1$: $\ln(\alpha_n)\ge\frac{1-e}{n}$:

$f_n(\alpha_n)=0$ معناه $\frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n}+n\ln\alpha_n=0$ ومعناه $\ln\alpha_n=-\frac{e^{\alpha_n}-1}{n\alpha_n}$

لدينا من أجل كل x من المجال $]0;1]$: $\frac{e^x-1}{x}\le e-1$ معناه $\frac{1-e^x}{x}\le 1-e$

ولدينا $\alpha_n \in]\alpha_1;1[$ إذن $\alpha_n \in]0;1]$ ومنه $1-e \le \frac{1-e^{\alpha_n}}{\alpha_n}$ وهذا يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \ge 1$:

$\frac{1-e}{n} \le \frac{1-e^{\alpha_n}}{n\alpha_n}$ أي $\frac{1-e}{n} \le \ln(\alpha_n)$.

- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \ge 1$: $\alpha_n \ge e^{\frac{1-e}{n}}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \ge 1$: $\ln(\alpha_n) \ge \frac{1-e}{n}$ معناه

$e^{\ln(\alpha_n)} \ge e^{\frac{1-e}{n}}$ ومعناه $\alpha_n \ge e^{\frac{1-e}{n}}$

جـ- إيجاد نهاية المتتالية (α_n).

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \ge 1$: $\alpha_n \in]\alpha_1;1[$ و $e^{\frac{1-e}{n}} \le \alpha_n$ إذا $e^{\frac{1-e}{n}} \le \alpha_n < 1$

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e}{n} = 0$ إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1-e}{n}} = 1$ وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.

التمرين 6 بالك 2014 م2 ن6

f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x-1)e^x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عيّن نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
3. أ ـ بيّن أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثمّ تحقق أن $1,27<\alpha<1,28$.

ب ـ اكتب معادلة لـ (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدّد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T).

جـ ـ ارسم (T) و (C_f).

4. عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $(x-1)e^x-(m-1)e^m=-1$ حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.
5. h هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=(|x|+1)e^{-|x|}$

و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ ـ بيّن أن الدالة h زوجية.

ب ـ ارسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f).

6. g دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(ax+b)e^x$ حيث: a و b عددان حقيقيان.

ـ عيّن a و b حتى يكون: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=f(x)$.

حل مقترح للتمرين 6 باك 2015

f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-1)e^x$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. تعيين نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ إذا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x-e^x=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ إذا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$.

2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$:

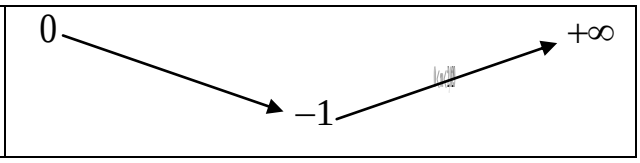
ليكن $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$ ؛ $f'(x)=0$ معناه $x=0$.

من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ ، $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

ـ جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$		

$f(x)$	

3. أ- تبيين أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$:

لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;0]$ ، $f(x)<0$ ومنه المعادلة $f(x)=1$ لا تقبل حلول في $]-\infty;0]$.

الدالة f مستمرة على المجال $[0;+\infty[$ إذا صورة المجال $[0;+\infty[$ هي مجال من $\mathbb{R}$ ولدينا $f([0;+\infty[)=[-1;+\infty[$ بما أن $1\in[-1;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=1$ تقبل على الأقل حلا α في المجال $[0;+\infty[$ وبما أن الدالة f رتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $[0;+\infty[$ فإن الحل α وحيد في $[0;+\infty[$ وعليه فالمعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$.

- تحقق أن $1,27<\alpha<1,28$:

$f(1,27)\approx 0,96$ ؛ $f(1,28)\approx 1,01$ إذا $f(1,27)<1<f(1,28)$ ومنه $1,27<\alpha<1,28$.

ب- كتابة معادلة لـ (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ معناه $y=e(x-1)$

- تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) :

$$f(x)-e(x-1)=(x-1)e^x-e(x-1)=(x-1)(e^x-e)$$

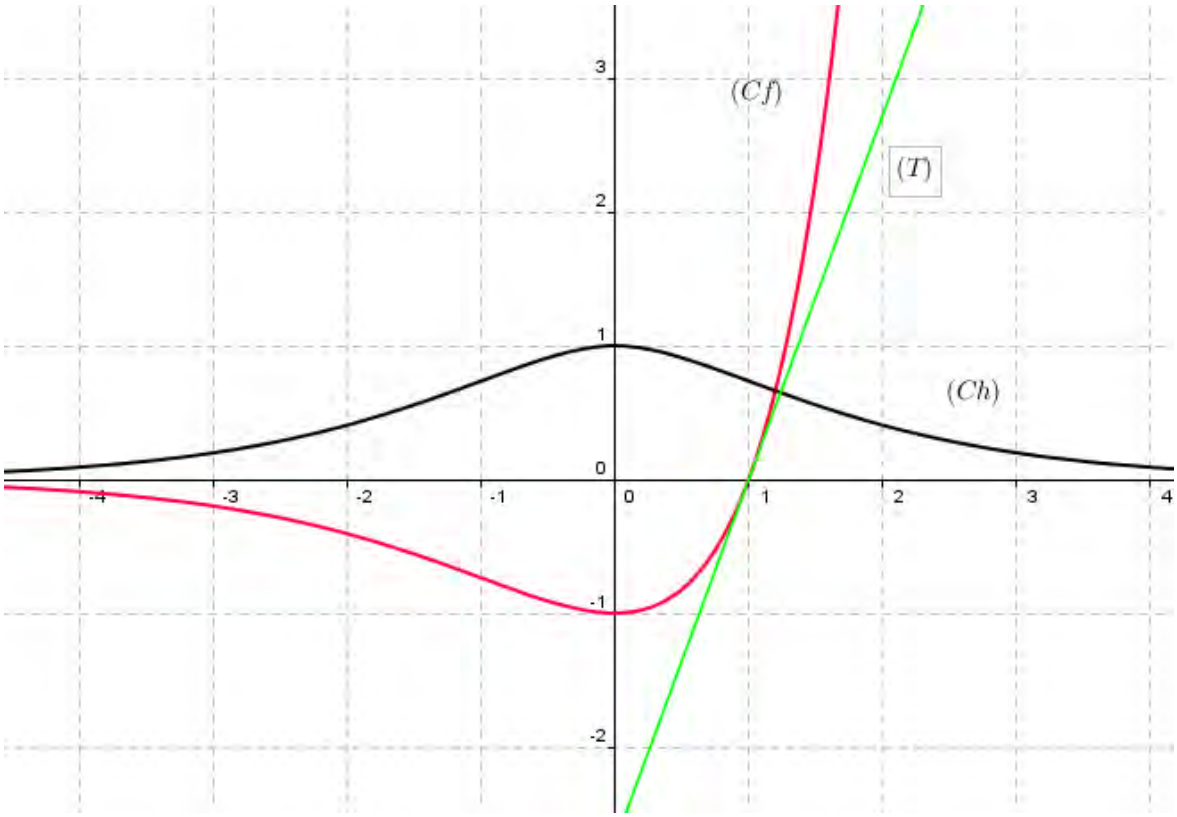
$f(x)-e(x-1)=0$ معناه $(x-1)(e^x-e)=0$ ومعناه $(x-1=0)$ أو $(e^x-e=0)$

يكافئ $(x=1)$ أو $(e^x=e)$ أي $(x=1)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)$		$-$	0	$+$	
(e^x-e)		$-$	0	$+$	
$f(x)-e(x-1)$		$+$	0	$+$	

إذا المنحنى (C_f) يقع فوق (T).

جـ- رسم (T) و (C_f) :



4. تعيين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $(x-1)e^x-(m-1)e^m=-1$ حلا وحيدا في $\mathbb{R}$:

$(x-1)e^x-(m-1)e^m=-1$

معناه $f(x)=f(m)-1$ ومعناه $f(m)-1=-1$ أو $f(m)-1\geq 0$

يكافئ $f(m)=0$ أو $f(m)\geq 1$

أي $m=1$ أو $m\geq\alpha$.

5. h هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=(|x|+1)e^{-|x|}$

و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ- تبيين أن الدالة h زوجية:

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $(-x)\in\mathbb{R}$ ؛

$h(-x)=(|-x|+1)e^{-|-x|}=(|x|+1)e^{-|x|}=h(x)$

لأن من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $|-x|=|x|$ ؛ إذن الدالة h زوجية.

ب- رسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f) :

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$_ لدينا: $h(x)=(|x|+1)e^{-|x|}=(-x+1)e^{-(-x)}$

أي $h(x)=-(x-1)e^x=-f(x)$

إذا في المجال $]-\infty;0]$ يكون (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل ؛ وفي المجال $[0;+\infty[$ يرسم (C_h) بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

6. g دالة مع

ـ تعيين a و b حتى يكون: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=f(x)$:

ليكن x عددا حقيقيا: $g'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $g'(x)=f(x)$ معناه $(ax+a+b)e^x=(x-1)e^x$ يكافئ $(ax+a+b)=(x-1)$

ويكافئ $a=1$ و $a+b=-1$ أي $a=1$ و $b=-2$.

التمرين 7 بالك 2015- م2 ن7

I) g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=(x+2)e^x-2$.

1. احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3. احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(II

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x+3-(x+1)e^x$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=-g(x)$.

ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

جـ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ ؛ ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

3. أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $0,92<\alpha<0,93$ و $-1,56<\beta<-1,55$.

ب- ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

4. أ- بيّن أن الدالة $x\mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب- احسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$ (حيث α هي القيمة المعرفة في السؤال 3. أ-).

جـ- جد حصرا للعدد A .

حل مقترح للتمرين 7 باك 2015 -

I) g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=(x+2)e^x-2$.

1. حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^x-2=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)e^x-2=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x+2e^x-2=-2$

2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

ليكن x عددا حقيقيا: $g'(x)=e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x>0$

ومنه: $g'(x)<0$ معناه $x\in]-\infty;-3[$ ؛ $g'(x)>0$ معناه $x\in]-3;+\infty[$ و $g'(-3)=0$

الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;-3]$ ومتزايدة تماما على $[-3;+\infty[$.

- جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	

x	-2		$+\infty$
$g(x)$	↘	$-e^{-3}-2$	↗

3. حساب $g(0)$ ، واستنتاج إشارة $g(x)$: $g(0)=(0+2)e^0-2=0$.

حسب جدول تغيرات الدالة g لدينا:

$g(0)=0$ و $x\in]0;+\infty[$ معناه $g(x)>0$ ؛ $x\in]-\infty;0[$ معناه $g(x)<0$

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x+3-(x+1)e^x$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تبيان أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x+3-(x+1)e^x=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left(\frac{2x+3}{x+1}-e^x\right)=-\infty$$

ـ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2x+3-(x+1)e^x=\lim_{x\to-\infty} 2x+3-xe^x+e^x=-\infty$$

2.أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=-g(x)$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f'(x)=2-e^x-(x+1)e^x=2-(x+2)e^x=-g(x)$

ب ـ استنتاج إشارة $f'(x)$:

$f'(0)=0$ و $x\in]0;+\infty[$ معناه $f'(x)<0$ ؛ $x\in]-\infty;0[$ معناه $f'(x)>0$

ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		β		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		↗		↗	2	↘		↘	$-\infty$ $-\infty$

جـ ـ تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty} -xe^x+e^x=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$:
- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)-(2x+3)=-(x+1)e^x$

على $]-\infty;-1[$ ، $f(x)-(2x+3)>0$ ومنه (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ).

على $]-1;+\infty[$ ، $f(x)-(2x+3)<0$ ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) يقطع (C_f) في النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;1)$.

3.أ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $0,92<\alpha<0,93$ و $-1,55<\beta<-1,56$.

الدالة f مس

و $]0;+\infty[$ ولدينا $f(]-\infty;0[)=]-\infty;2[$ و $f(]0;+\infty[)=]-\infty;2[$ بما أن $0\in]-\infty;2[$ فإنه يوجد عدد حقيقي α ينتمي إلى $]0;+\infty[$ حيث $f(\alpha)=0$ ويوجد عدد حقيقي β ينتمي إلى $]-\infty;0[$ حيث $f(\beta)=0$

وبما أن الدالة f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ فإن الحل α يكون وحيد وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;0[$ فإن الحل β يكون وحيد.

لدينا: $f(0,92)\approx 0,02$ ؛ $f(0,93)\approx -0,03$ ومنه $f(0,93)<0<f(0,92)$

إذا $0,92<\alpha<0,93$

ولدينا: $f(-1,56)\approx -0,002$ ؛ $f(-1,55)\approx 0,01$ ومنه $f(-1,56)<0<f(-1,55)$

إذا $-1,56<\beta<-1,55$

ب-رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$:

الرسم في الشكل أدناه.

4.أ- تبيان أن الدالة $x\mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$:

ليكن x عددا حقيقيا: نضع $h(x)=xe^x$ ومنه

$$h'(x)=e^x+xe^x$$
$$=(x+1)e^x$$

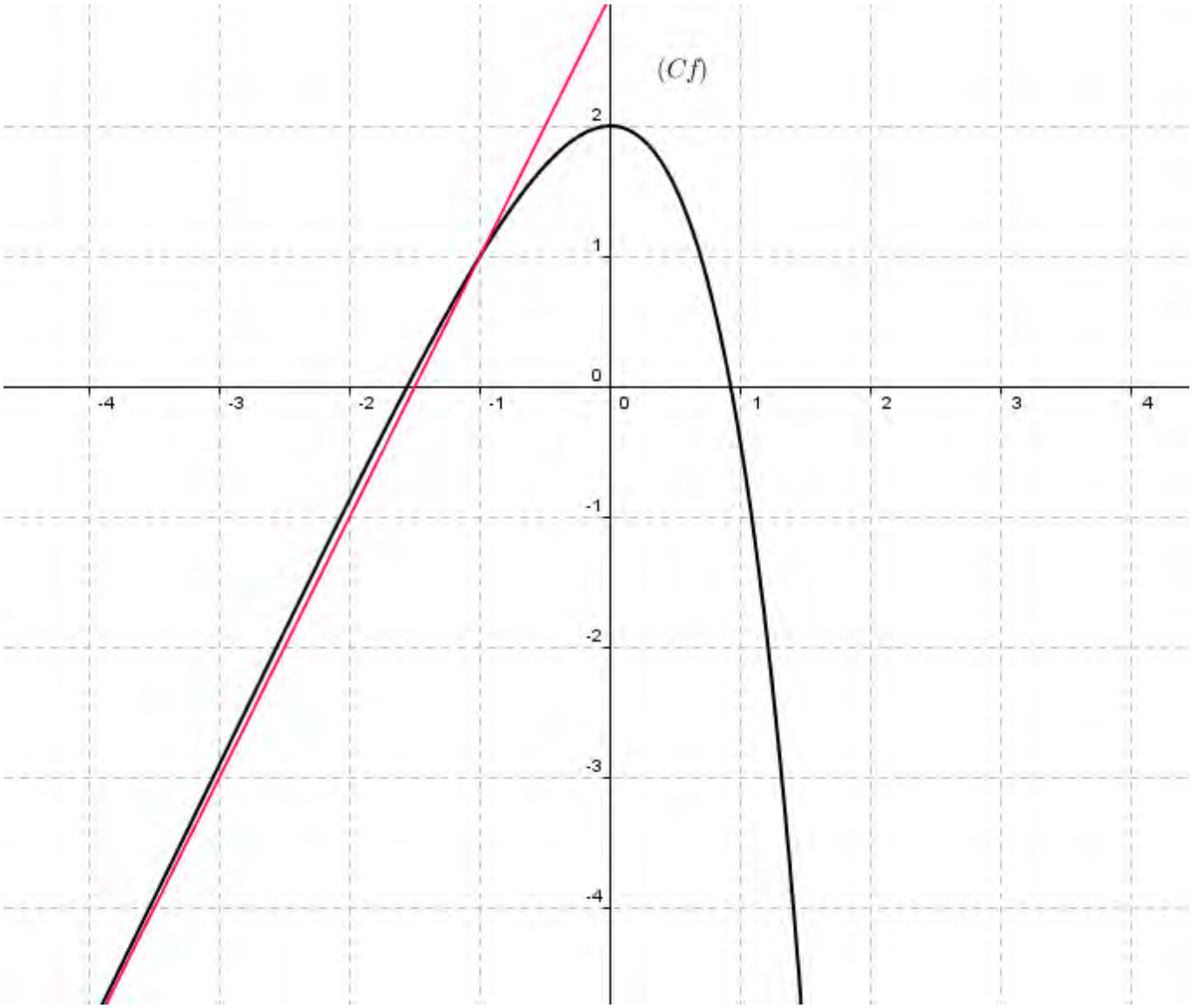
إذا الدالة: $x\mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب-حساب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$ (حيث α هي القيمة المعرفة في السؤال 3) أ)):

$$A=\int_0^{\alpha}\left[2x+3-f(x)\right]dx=\int_0^{\alpha}\left[(x+1)e^x\right]dx=\left[xe^x\right]_0^{\alpha}$$
$$A=\alpha e^{\alpha}-0e^0=\alpha e^{\alpha}\ ua$$

جـ- إيجاد حصرا للعدد A .

لدينا $0,92<\alpha<0,93$ ومنه $e^{0,92}<e^{\alpha}<e^{0,93}$ إذا $0,92e^{0,92}<\alpha e^{\alpha}<0,93e^{0,93}$ أي $2,30<A<2,36$.


(Cf)
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

التمرين 12 بالك 2019 م1 ن7

I) g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x+3)e^x-1$ ؛ و $(\mathcal{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ؛ كما هو مبيّن في الشكل.

بقراءة بيانية

أ) حدّد إشارة $g(-1)$ و $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

ب) استنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ بحيث $g(\alpha)=0$ ؛ ثمّ تحقق من أن $-0,8<\alpha<-0,7$.

جـ) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+2)(e^x-1)$ ؛ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

3. أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)$ ثمّ استنتج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ).

جـ) اكتب معادلة لـ (T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ الموازي للمستقيم (Δ).

4. ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty;1]$. (يعطى $f(\alpha)\approx-0,7$).

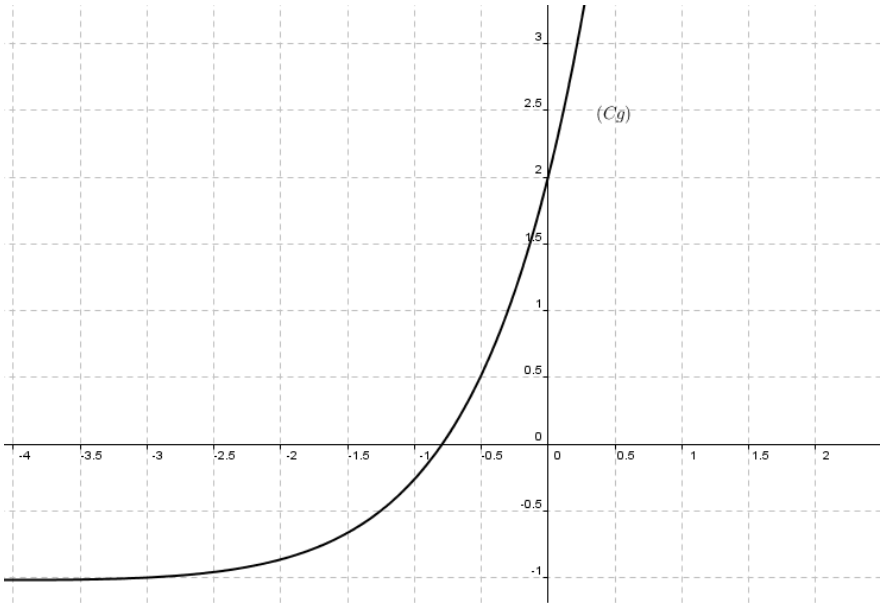
5. احسب $f(x)-g(x)$ ثمّ استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6. h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1$ ، و $(\mathcal{C}_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) بيّن أنّ الدالة h زوجية.

ب) تأكّد أنه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ فإن: $h(x)=f(x-2)+1$.

جـ) اشرح كيف يمكن رسم $(\mathcal{C}_h)$ انطلاقا من $(\mathcal{C}_f)$ ثمّ ارسم $(\mathcal{C}_h)$ على المجال $[-3;3]$.



حل مقترح للتمرين 12 باك 2019

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x+3)e^{x}-1$ ؛

و $(\mathcal{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ؛ كما هو مبيّن في الشكل.

بقراءة بيانية:

أ) تحديد إشارة $g(-1)$ و $g\left(-\frac{1}{2}\right)$: $g(-1)<0$ و $g\left(-\frac{1}{2}\right)>0$

ب) استنتاج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ حيث

$g(\alpha)=0$:

لدينا $(\mathcal{C}_g)$ مرسوم بدون تقطع ومنه الدالة g مستمرة على المجال $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$

ولدينا $g(-1)\times g\left(-\frac{1}{2}\right)<0$ إذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha)=0$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن α هو الحل الوحيد في $\mathbb{R}$ للمعادلة $g(x)=0$.

- التحقق من أن $-0,8<\alpha<-0,7$:

$g(-0,8)=(-0,8+3)e^{-0,8}-1$ و $g(-0,7)=(-0,7+3)e^{-0,7}-1$ أي $g(-0,8)\approx-0,0115$

و $g(-0,7)\approx 0,142$ إذا $g(-0,8)<g(\alpha)<g(-0,7)$ ومنه $-0,8<\alpha<-0,7$

ج) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $g(\alpha)=0$ ؛ ومن أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)<0$ ؛ ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+2)(e^{x}-1)$ ؛ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)(e^{x}-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}+2e^{x}-x-2$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}xe=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{x}=0$

إذا $\lim\limits_{x\to-\infty}-x-2=+\infty$ إذا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)(e^{x}-1)$ ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}-1)=+\infty$ إذا

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2. تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f'(x)=(e^{x}-1)+(x+2)e^{x}=(x+3)e^{x}-1=g(x)$

• جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)=g(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3. أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}(x+2)\left(e^x-1\right)+x=\lim_{x\to-\infty}xe^x+2e^x-x-2+x=-2$$

• استنتاج أنّ $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيين معادلة له:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=-2$ إذا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x-2)\right)=0$ ومنه المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=-x-2$ وهذا في $-\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ):

ليكن x عددا حقيقيا: $\left(e^x-1+1\right)+(x+2)=(x+2)\left(e^x-1\right)$ أي $f(x)-(-x-2)=(x+2)e^x$؛

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $e^x>0$

ومنه إشارة $f(x)-(-x-2)$ هي من إشارة العبارة $(x+2)$.

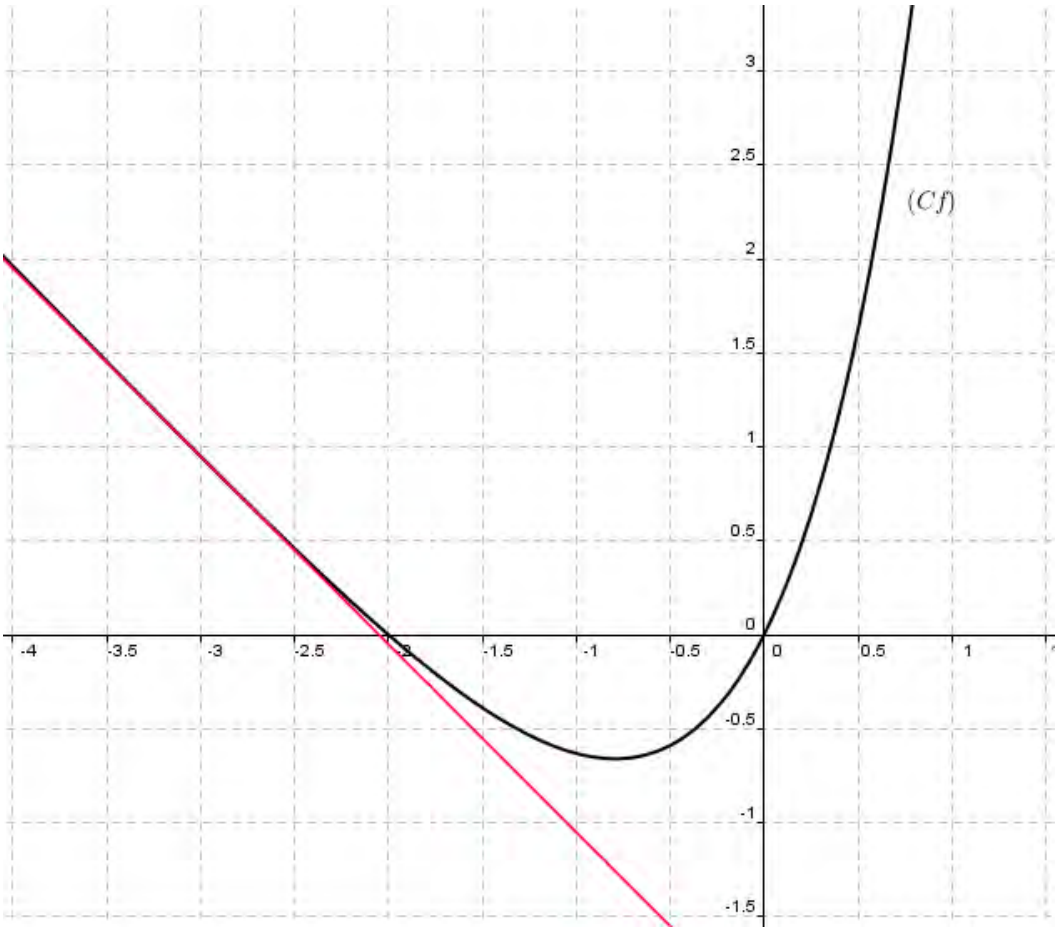
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)-(-x-2)$		$-$	$+$
الوضعية		$(\mathcal{C}_f)$ يقع تحت (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (Δ)

$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (Δ) في $A(-2;0)$

جـ) كتابة معادلة لـ (T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ الموازي للمستقيم (Δ):

(T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة x_0 إذا له معادلة من الشكل $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ولدينا (T) يوازي (Δ) إذا $f'(x_0)=-1$ أي $(x_0+3)e^{x_0}-1=-1$ وهذا يعني أن $(x_0+3)e^{x_0}=0$ ومعناه $x_0+3=0$ أي $x_0=-3$؛ ومنه معادلة (T) من الشكل $y=-(x+3)-\left(e^{-3}-1\right)$ أي $y=-x-2-e^{-3}$.

4. رسم المستقيم (Δ) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty;1]$. (يعطى $f(\alpha)\approx-0,7$):



5. حساب $f(x)-g(x)$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x)-g(x)=(x+2)(e^x-1)-(x+3)e^x+1$ أي

$$f(x)-g(x)=(x+2-x-3)e^x-x-2+1=-e^x-x-1$$

• استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x)-g(x)=-e^x-x-1$ معناه $f(x)=g(x)-e^x-x-1$ ومعناه

$f(x)=f'(x)-e^x-x-1$ ؛ نعتبر الدالة F المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=f(x)-e^x-\frac{1}{2}x^2-x$ لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $F'(x)=f(x)$ إذا F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6. h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1$ ، و $(\mathcal{C}_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) تبيين أن الدالة h زوجية:

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $-x\in\mathbb{R}$ لأن 0 يتوسط المجموعة $\mathbb{R}$.

$h(-x)=|-x|\left(e^{|-x|-2}-1\right)+1=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1=h(x)$ لأنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $|-x|=|x|$ ؛ وعليه فالدالة h زوجية.

ب) التأكد أنه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ فإن: $h(x)=f(x-2)+1$:

لدينا من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ، $|x|=x$ ومنه $h(x)=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1=x\left(e^{x-2}-1\right)+1$

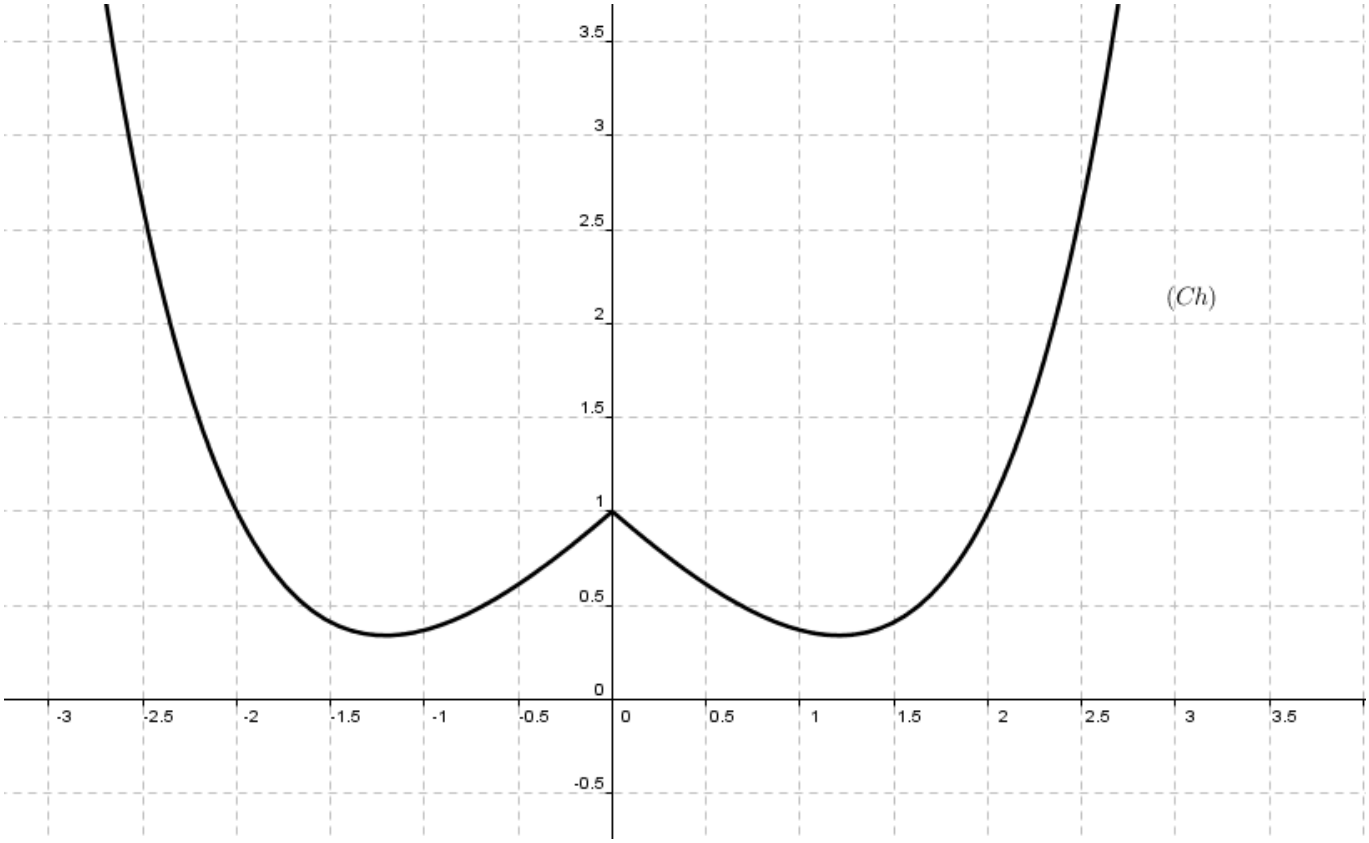
ولدينا $+1\left(-\quad^{x-2}-\quad+\quad=\quad-\quad+\quad^{x-2}-\quad+\quad=\quad-\right.$

إذا من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ ، $h(x)=f(x-2)+1$.

جـ) شرح كيف يمكن رسم $(\mathcal{C}_h)$ انطلاقا من $(\mathcal{C}_f)$ ثم رسم $(\mathcal{C}_h)$ على المجال $[-3;3]$:

لدينا من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ ، $h(x)=f(x-2)+1$

ولدينا من أجل $x \in [0;+\infty[$ ، $x-2 \in [-2;+\infty[$ ؛ إذا في المجال $[0;+\infty[$ ، يكون $(\mathcal{C}_h)$ صورة بالانسحاب، الذي شعاعه $\vec{u}(2;1)$، للجزء من $(\mathcal{C}_f)$ المرسوم على المجال $[-2;+\infty[$ ؛ وفي المجال $]-\infty;0[$ ، يُرسم $(\mathcal{C}_h)$ بالتناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب.



التمرين 13 بالك 2020 م1 ن7

الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1+\frac{1}{4}(2e^{-x}-1)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول 2 cm).

1) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=(1-e^{-x})(2e^{-x}+1)$.

ب. ادرس اشارة $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغيّر الدّالة f .

جـ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

2) أ . بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x-\frac{3}{4}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3) بيّن أنّ المنحنى البياني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

4) بيّن أنّ المنحنى البياني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها.

5) ارسم (Δ) ، (T) و المنحنى البياني (C_f) .

6) ليكن m وسيطا حقيقيا. عيّن مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة : $f(x)=x+m$ حلين مختلفين.

حل مقترح للتمرين 13 بالك 2020

$f(x)=x-1+\frac{1}{4}(2e^{-x}-1)^2$.

1. أ- حساب المشتقة: $f'(x)=1+\frac{1}{4}2(-2e^{-x})(2e^{-x}-1)$ أي $f'(x)=1-2e^{-2x}+e^{-x}$ و

$(1-e^{-x})(2e^{-x}+1)=2e^{-x}+1-2e^{-2x}-e^{-x}=1-2e^{-2x}+e^{-x}=f'(x)$ محققة .

ب-إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-e^{-x})$ و التي تنعدم عند 0

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة على المجال $[-1;0]$ و متناقصة على المجال $[0;+\infty[$.

ج- حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

جدول تغيرات :

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-2+\frac{1}{4}(2e-1)^2$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$

2. أ-إثبات أن (Δ) مقارب للمنحنى (C_f)

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(2e^x-1)^2\right]$ أي أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$ و منه محققة

ب-دراسة الوضعية : $[f(x)-y]=\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(2e^x-1)^2\right]$

$\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(2e^x-1)^2\right]=0$ يعني أن $(2e^{-x}-1)^2=1$ أي أن $\begin{cases}2e^{-x}-1=1\\2e^{-x}-1=-1\end{cases}$ أي أن $2e^{-x}=2$ و $2e^{-x}=0$ مستحيلة يعني أن $x=0$.

$\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(2e^x-1)^2\right]>0$ يعني أن $(2e^{-x}-1)^2>1$ يكافئ $(2e^{-x}-1)>1$ أي أن $2e^{-x}>2$ يعني أن $x<0$

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(Δ) يقع فوق (C_f)	(Δ) يقطع (C_f)		(Δ) يقع تحت (C_f)

3. إثبات وجد مماس (T) للمنحنى

موازي للمستقيم (Δ) : نحل المعادلة $f'(x)=1$ أي أن $1-2e^{-2x}+e^{-x}=1$ أي أن $-2e^{-2x}+e^{-x}=0$ يعني أن

$(-2e^{-x}+1)e^{-x}=0$ يكافئ أن $(-2e^{-x}+1)=0$ أي أن $e^{-x}=\frac{1}{2}$ إذن $-x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ أي أن $x=\ln(2)$

كتابة معادلة (T) : $y=(x-\ln 2)+f(\ln 2)$

و $f(\ln 2)=\ln 2-1+\frac{1}{4}(2e^{-\ln 2}-1)^2$ يعني أن $f(\ln 2)=\ln 2-1+\frac{1}{4}\left(2.\frac{1}{2}-1\right)^2=\ln 2-1$ و منه المعادلة هي

$(T): y=x-1$.

4. إثبات وجد نقطة انعطاف : $f'(x)=1-2e^{-2x}+e^{-x}$ و منه $f''(x)=4e^{-2x}-e^{-x}$

$f''(x)=0$ يعني أن $4e^{-2x}-e^{-x}=0$ يكافئ $(4e^{-x}-1)e^{-x}=0$ يعني أن $(4e^{-x}-1)=0$ أي أن $e^{-x}=\frac{1}{4}$ إذن

$-x=\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ أي أن $x=\ln(4)$ و هي تعدم المشتقة و تغير إشارتها و منه فاصلة نقطة الانعطاف هي $\ln(4)$

$A\left(\ln(4)\ ;\ \ln 4-\frac{15}{16}\right)$ هي نقطة الانعطاف .

5. إنشاء المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ).

6. المناقشة البيانية

$f(x)=x+m$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع

(C_f) و المستقيم ذو المعادلة $(\Delta_m): y=x+m$

لما $m\in\left]-1;-\frac{3}{4}\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حلين مختلفين

التمرين (14) باك 2021 م1 ن7

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2-5+e^{x-1}$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

2) أ . بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث: $1,71<\alpha<1,72$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب x إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+1+(-x^2-2x+3)e^{1-x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)e^{1-x}$

ب. استنتج أنّ الدّالة f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0;\alpha]$

جـ. بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

2) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C) ثمّ ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

3) بيّن أنّ (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في نقطة A يُطلب تعيين فاصلتها **(لا يطلب كتابة معادلة** (T)**)**

4) أ . بين أنّ (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة فاصلتها $(1+\sqrt{6})$

ب. ارسم (Δ) ، (T) و (C) (نأخذ: $f(\alpha)=1,1$ ، $f(\sqrt{5})=1,4$ و $f(1+\sqrt{6})=3,1$)

5) الدّالة العددية h معرّفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ: $h(x)=-x+1+(-x^2+2x+3)e^{1+x}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ . تحقّق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0]$: $h(x)=f(-x)$

ب. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) ثمّ ارسمه.

حل مقترح للتمرين (14) باك 2021

I - الدالة العددية g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(x)=x^2-5+e^{x-1}$.

1. إثبات أن g متزايدة على $[0;+\infty[$: $g'(x)=2x+e^{x-1}$ و هي موجبة على $[0;+\infty[$.

2. أ- لدينا $g(1,71)=-0,04$ و $g(1,72)=0,01$ و g مستمرة و متزايدة على $]0;+\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $1,71<\alpha<1,72$.

ب-إشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	$-$	0	$+$

II - الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x+1+(-x^2-2x+3)e^{1-x}$.

1. أ-إثبات عبارة المشتقة : $f'(x)=1+(-2x-2)e^{1-x}-(-x^2-2x+3)e^{1-x}$ يعني أن
$f'(x)=1-(-x^2+5)e^{1-x}$ يكافئ $f'(x)=\left[e^{x-1}-(-x^2+5)\right]e^{1-x}$ يعني أن
$f'(x)=\left[x^2-5+e^{x-1}\right].e^{1-x}$ إذن $f'(x)=g(x).e^{1-x}$ و هو المطلوب .

ب-إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ و منه f متزايدة على المجال $]\alpha;+\infty[$ و متناقصة على المجال $[0;\alpha]$

جـ-إثبات النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2-2x+3)e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-x^2.e^{1-x}=0$ بالتزايد المقارن .

جدول تغيرات

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	$1+3e$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

2. بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2-2x+3)e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-x^2.e^{1-x}=0$ بالتزايد المقارن .
و منه $(\Delta):y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) .
دراسة الوضعية $f(x)-(x+1)]=(-x^2-2x+3)e^{1-x}$ إشارة الفرق من إشارة $(-x^2-2x+3)$ جذريه هما 1 و -3

x	0	1	$+\infty$
إشارة $(-x^2-2x+3)$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان	(C_f) يقع تحت (Δ)

3. إثبات أن (C) يقبل مماساً (T) موازي للمستقيم (Δ) :المعادلة $f'(x)=1$ أي أن $g(x).e^{1-x}=1$ أي أن
$(x^2-5+e^{x-1})=e^{x-1}$ يكافئ $e^{1-x}(x^2-5+e^{x-1})=1$ يعني $x^2=5$ يكافئ $x=\sqrt{5}$ مقبول أو $x=-\sqrt{5}$ مرفوض فاصلة النقطة A هي $\sqrt{5}$

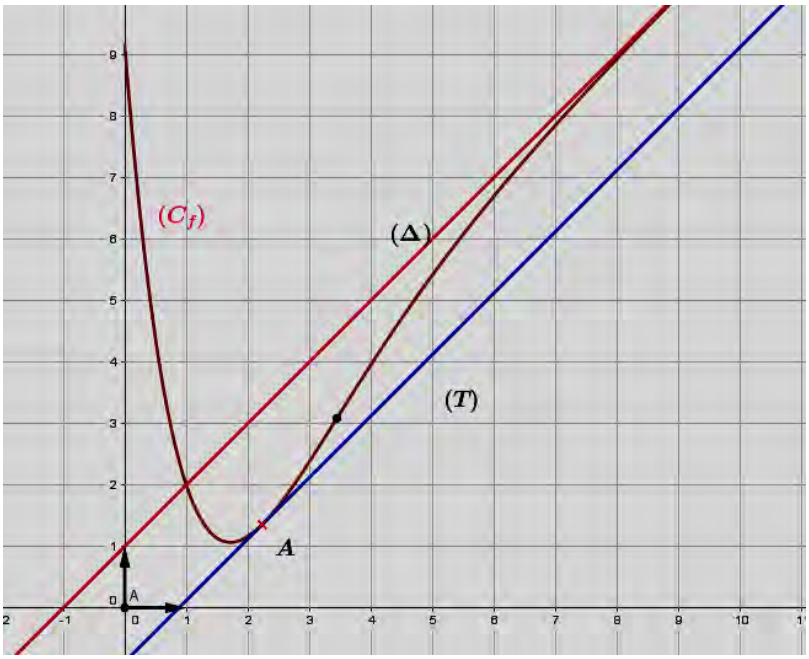
4. أ-إثبات أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف : $f'(x)=g(x).e^{1-x}$ و منه $f''(x)=g'(x).e^{1-x}-g(x).e^{1-x}$
يعني أن $f''(x)=[g'(x)-g(x)].e^{1-x}$ يكافئ $f''(x)=\left[2x+e^{x-1}-x^2+5-e^{x-1}\right].e^{1-x}$ و منه
$f''(x)=\left[-x^2+2x+5\right].e^{1-x}$ إشارتها من إشارة $\left[-x^2+2x+5\right]$

نحسب المميز $\Delta = 24$ جذري $\left[-x^2+2x+5\right]$ هما $x_1 = \frac{-2+2\sqrt{6}}{-2} = 1-\sqrt{6}$ مرفوض و

$x_2 = \frac{-2-2\sqrt{6}}{-2} = 1+\sqrt{6}$ مقبولة و هي فاصلة نقطة الانعطاف لأن $\left[-x^2+2x+5\right]$ تنعدم و تغير إشاراتها

عند $x_2 = 1+\sqrt{6}$

ب-رسم (Δ)و (T) و (C)

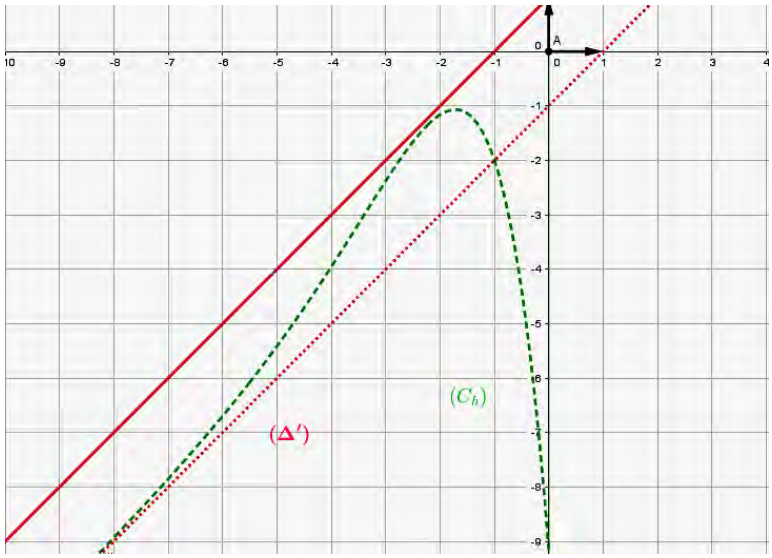


5. الدالة العددية h المعرفة على $]-\infty;0[$ بـــ $h(x) = -x+1+\left(-x^2+2x+3\right)e^{1+x}$.

أ - التحقق: من أجل كل عدد حقيقي $]-\infty;0[$ بـــ $f(-x) = -x+1+\left(-(-x)^2-2(-x)+3\right)e^{1-(-x)}$ أي أن

$f(-x) = -x+1+\left(-x^2+2x+3\right)e^{1+x} = h(x)$ محققة .

ب -من أجل كل عدد حقيقي $]-\infty;0[$ $f(-x) = h(x)$ يعني أن (C_h) و (C) متناظران بالنسبة الى O



الحمد لله الذي بنعمه تتم الصالحات

ثم هذا العمل بفضل من الله

ثمن هذه المجلة دعوة خير

الى مجلة اخرى ان شاء الله



تجدون صفحة Top Maths على المنصات التالية



النظام لا يحتاج إلى كثير من العلم ولكنه
يحتاج إلى الحكمة،الصبر،الأدب،الأخلاق

وفقكم الله لما يحب ويرضى

つづく

اللهم صل على محمد وعلى ال محمد كما صليت على ابراهيم وعلى ال ابراهيم

انك حميد مجيد

اللهم بارك على محمد وعلى ال محمد كما باركت على ابراهيم وعلى ال ابراهيم

انك حميد مجيد