SERIE ADEL NAIDJI

# MATHS BAC

# 3 A.S

- عروض نظرية للدروس
- جميع الأفكار الواردة في البكالوريات السابقة مدمجة في الدروس
- تجميعية لجميع تمارين البكالوريا موزعة حسب الوحدات

علوم تجريبية

رياضيات

تقني رياضي

تأليف : عادل نعيجي

# مقدمة

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ و الصلاة و السلام على أشرف الخلق سيد المرسلين نبينا محمد صلى الله عليه و سلم نور العالمين أما بعد فإنه قبل حوالي ثلاث سنوات و بعد تفوقي في شهادة البكالوريا دورة 2015 و احتلالي للمرتبة الأولى وطنيا في شعبة الرياضيات بمعدل 18.86 كنت قد وعدت كل من صادفته أني سأنشر وثائقي على شكل كتيبات لكن الأشغال لم تسنح لي بذلك و لكي لا يخلف الانسان وعده فإنه من دواعي السرور و الغبطة أن أضع بين أيديكم اليوم أول اصدار لسلسلة *SERIE ADEL NAIDJI* و التي تتوجه لطلاب البكالوريا بمجموعة من الكتيبات الالكترونية المجانية و التي نتمنى أن تكون لهم خير سند و معين، يشمل الجزء الأول من كتاب الرياضيات ما يضاهي حوالي 15 أسبوعا تعليميا من المنهج السنوي و يتناول جانب التحليل من البرنامج " الدوال "، و لقد عمدت لوضع مراجعة شاملة في بداية الكتاب لما يحتاجه طالب البكالوريا من معارف قبلية في السنتين السابقتين. إن هذا المؤلف ما هو إلا ثمرة جهد شخصي و عمل ذاتي بحت إذ تمت كتابته بخط اليد و لقد اعتمد على طريقة جديدة في القاء العروض النظرية إذ أن بناء الدروس استند إلى الأفكار المتداولة في تمارين الباك فهذه الدروس تشمل إلى حد بعيد جميع الأسئلة المطروحة في الأعوام السابقة إذ لا يخفى على أي طالب أن شهادة البكالوريا ما هي إلا رسكلة لأفكار مهضومة تعاد كل دورة، ثم يأتي في نهاية الكتاب تجميعية لكل المسائل الواردة في الشهادات السابقة إذ أنها أفضل معيار يمكننا أن نستند إليه من أجل التقييم الذاتي لقدرات المترشح، و في نهاية المطاف فما بوسعي إلا أن أتمنى لكل مقبل على شهادة البكالوريا النجاح و التفوق، و ما وفقت فيه فمن الله سبحانه و تعالى، و ما أخطئت فيه فمن نفسي و من الشيطان، و إنه لمن دواعي سروري أن أستقبل منكم كافة الاقتراحات و الآراء البناءة أو بعض الأخطاء التي يمكن أن تنبع من قلة التركيز أثناء الكتابة. https://www.facebook.com/adel.naidji.7

عيجي

# اهداء

نهدي هذا العمل المتواضع إلى:

- الوالدين الكريمين أطال الله في عمريهما و الاخوة الأعزاء
- الأسرة القريبة و البعيدة
- إلى كل من علمني حرفا من الأساتذة الكرام
- إلى كل الزملاء و الأساتذة و العمال بثانويتي الثانوية الوطنية للرياضيات بالقبة و كلية الطب بالجزائر العاصمة
- إلى كل الأصدقاء من العالم الحقيقي و الافتراضي الفايسبوك
- إلى كل طالب علم يعمل بتفان للرقي بالجزائر الحبيبة

# الفهرس


مراجعة عامة 1

كثيرات الحدود 8

المعادلات 10

دراسة اشارة عبارة 21

المتراجحات 23

عموميات على الدوال 27

النهايات 45

السلوك التقاربي لمنحن دالة 55

الاستمرارية 60

مبرهنة القيم المتوسطة 63

الاشتقاقية 66

الدوال الأسية 79

الدوال اللوغاريتمية 85

أسئلة نظرية حول الدوال الأسية و اللوغاريتمية93

الدوال الأصلية 98

المعادلات التفاضلية 102

الحساب التكاملي 105

تطبيقات التكامل 114

استنتاج منحنيات انطلاقا من منحنيات أخرى 120

تمارين حول الدوال العددية 126

# مراجعة عامة

ADEL NAIDJI

## 1/ خواص القوة الصحيحة:

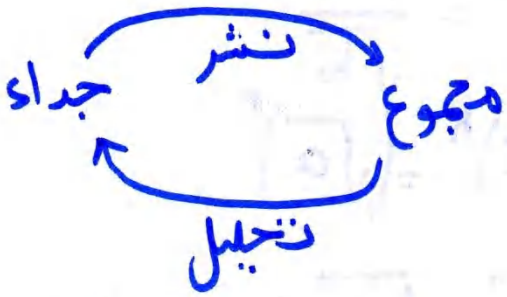
$a^n$ ← أس
$a$ ← أساس

$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ مرة}}$

$(a,b) \in \mathbb{R}^{*2}$
$(n,m) \in \mathbb{Z}^2$

* $a^m \times a^n = a^{m+n}$
* $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
* $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
* $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
* $(a^n)^m = a^{n \times m}$
* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
* $a^n \times a^{-n} = 1$
* $(+a)^n = +a^n$
* $(-a)^n \; (a \geq 0) \begin{cases} \to +a^n & ; n = 2k \\ \to -a^n & ; n = 2k+1 \end{cases}$
* $a^0 = 1$ | $0^0$ لا يوجد
* $a^1 = a$
* $1^n = 1$

## 2/ الجداءات الشهيرة:




$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$(a-b)(a+b)^2 = a^2 - b^2$

$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

### استنتاجات:

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$

$(-a-b)^2 = (a+b)^2$

$(-a+b)^2 = (b-a)^2$

## مراجعة عامة

مثال:

$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \times \frac{1}{2}} = \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}}$

$-1 = 1$ ؟؟؟

ADEL NADJI

## 3/ الجذور التربيعية:

* لا يمكن كتابة $\sqrt{A}$ إلا إذا كان $A \geq 0$

$(a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ ;

* $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
* $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
* $(\sqrt{a^n}) = (\sqrt{a})^n$
* $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$
* $\sqrt{a^2} = a$
* $\sqrt{(a+b)^2} = (a+b)$
* $\sqrt{a} = a^{1/2}$
* $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$
* $\sqrt{0} = 0$
* $\sqrt{1} = 1$

أخطاء شائعة

* $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
* $\sqrt{a^2+b^2} \neq a + b$

## تعميم:

* الاستلزام: إذا كان ... فإن ... ($\Leftarrow$) (اتجاه واحد)

* التكافؤ: .... يكافئ .... .... إذا وفقط إذا ....

دوما ←

* $\sqrt{A(x) \cdot B(x)} = \sqrt{A(x)} \cdot \sqrt{B(x)}$ ⊛

$A(x) \cdot B(x) \geq 0 \Leftarrow A(x) \geq 0$ و $B(x) \geq 0$

ليس دوما. ←

* $\sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}} = \frac{\sqrt{A(x)}}{\sqrt{B(x)}}$ ⊛

$A(x) \cdot B(x) \geq 0 \Leftarrow A(x) \geq 0$ و $B(x) \neq 0$ و $B(x) > 0$

* $\sqrt{A(x)^2} = |A(x)|$ ⊛

ADEL MADJI

## 4/ توحيد المقامات:

* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
* $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
* $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \neq \frac{a}{b+c}$

## 5/ الاختزال والمساواة:

### ① الاختزال الأفقي:

* $A(x) + \alpha = B(x) + \alpha$
* $A(x) \times \alpha = B(x) \times \alpha \; ; \alpha \neq 0$

### ② الاختزال العمودي

* $\frac{A(x) \times \alpha}{B(x) \times \alpha} = \frac{A(x)}{B(x)}$
* $\frac{A(x)+\alpha}{B(x)+\alpha} \neq \frac{A(x)}{B(x)}$

### ③ اختزال متغير:

← العمودي:

* $\frac{A(x) \times h(x)}{B(x) \times h(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}$

## 14 الكسور:

### ① ضرب الكسور:

* $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
* $\alpha \times \frac{a}{b} = \frac{\alpha a}{b} = \frac{\alpha}{b} \times a$
* $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

### ② قسمة الكسور:

* $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
* $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$
* $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$

يجب التمييز بين الكسور الفرعية والكسور الرئيسية.

### ③ الضرب والقسمة في وعلى عدد غير معدوم $\alpha$

* $\frac{a}{b} = \frac{\alpha a}{\alpha b}$

ADEL NAIDJI

## 6/ الاختزال والمتراجحات:

### 1/ الاختزال الأفقي:

+ $A(x) + \alpha > B(x) + \alpha$
+ $A(x) \times \alpha > B(x) \times \alpha$
  - $\alpha > 0$ : $A(x) > B(x)$
  - $\alpha < 0$ : $A(x) < B(x)$

### 2/ اختزال متغير:

+ $A(x) \times R(x) < B(x) \times R(x)$
+ $R(x)\left[A(x) - B(x)\right] < 0$
+ ثم ننشئ جدول الاشارة ونحل المتراجحة.
+ نستعمل هذه الطريقة دوما.

← الأفقي:

+ $A(x) \times R(x) = B(x) \times R(x)$
  - نتأكد هل $R(x) = 0$ لها حل
  - ليس لها حل ← نكتب $A(x) = B(x)$
  - لها حل ← نجعل المعادلة صفرية ثم نحللها

$$R(x)\left[A(x) - B(x)\right] = 0$$

أمثلة:

* $x^2(x^2+3) = 4(x^2+3)$

$$x^2 = 4$$

$x = -2$ أو $x = 2$

* $x^2(x+3) = 4(x+3)$

$$(x+3)(x^2-4) = 0$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = +2 \end{cases}$$

+ $x^2 - x^2 = x^2 - x^2$

$$(x-x)(x+x) = x(x-x)$$

$$x + x = x$$

$$2x = 1x$$

ADEL NAIDJI

## 7/ قواعد الحساب في $\mathbb{R}$:

### 1/ اضافة عدد حقيقي:

* $a=b \Leftrightarrow a+\alpha=b+\alpha$
* $a>b \Leftrightarrow a+\alpha>b+\alpha$

### 2/ الضرب في عدد حقيقي $\alpha \neq 0$

* $a=b \Leftrightarrow \alpha a=\alpha b$
* $a>b \Leftrightarrow \alpha a>\alpha b \; ; \alpha>0$
  $\alpha a<\alpha b \; ; \alpha<0$

### 3/ الجمع طرفا لطرف:

* $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \Rightarrow a+b=c+d$
* $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \Rightarrow a+c \leqslant b+d$
* $\begin{cases} a<b \\ c \leqslant d \end{cases} \Rightarrow a+c<b+d$

($<$ أو لـ $\leqslant$)

### 4/ الضرب طرفا لطرف:

* $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \Rightarrow ac=bd$
* $\begin{cases} a>b \\ c>d \end{cases} \Rightarrow ac>bd$
  $a,b,c,d$ موجبة
* $\begin{cases} a>b \\ c>d \end{cases} \Rightarrow ac<bd$
  $a,b,c,d$ سالبة.

### 5/ ضرب الطرفين والوسطين.

* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$

تعميم:

* $\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \Leftrightarrow A(x).\beta(x)=\alpha(x).\beta(x)$
  $B(x) \neq 0$
  $\beta(x) \neq 0$

مثال:

* $\frac{A(x)}{B(x)}<\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \not\Leftrightarrow A(x).\beta(x)<\alpha(x).B(x)$

بل نجعل المتراجحة صفرية.
- نوحد المقامات
- ننشر و نبسط.
- نحل المتراجحة باستعمال جدول الاشارة.

ABDELNAIDJI

## 6/ خاصية التعدي:

- $\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$
- $\begin{cases} a < b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a < c$

($<$ أولى من $\leq$)

## 7/ قواعد المساواة:

* إذا كان $A(x) = B(x)$ فإن $A(x)^2 = B(x)^2$
* العكس لا يصلح دائما للأعداد الموجبة
- $a = b \Leftarrow a^n = b^n$
- $a = b \Leftarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$
- $a = b \Leftarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$

## 8/ قواعد الترتيب:

- $a > b \iff \sqrt{a} > \sqrt{b}$ موجبان
- $a > b \iff a^2 > b^2$ موجبان
- $a > b \iff \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ من نفس الاشارة
- $a > b \Leftarrow a^3 > b^3$

## 9/ متى نقلب اشارة متراجحة؟

4 حالات

- تربيع عددين سالبين
- الضرب في عدد سالب
- المقلوب
- ضرب متراجحتين طرفا لطرف حيث $a, b, c, d$ سالبة.

## 8/ القيمة المطلقة:

### 1/ تذكير حول المجالات:

* أكبر من / أو تساوي / أصغر من ⇐ مجال مغلق
- أكبر تماما / أصغر تماما ⇐ مجال مفتوح
- عند $-\infty$ و $+\infty$ ⇐ مجال مفتوح
- الاتحاد = أو = $\cup$
- التقاطع = و = $\cap$

ADEL NAIDJI

عدي

## 2/ القيمة المطلقة:

* $|A(x)| = \begin{cases} +A(x) ; A(x) \geq 0 \\ -A(x) ; A(x) \leq 0 \end{cases}$

⊛ خواص:

* $|a \times b| = |a| \times |b|$
* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
* $|-a| = |a|$
* $|a-b| = |b-a|$
* $|A(x)| = 0 \Rightarrow A(x) = 0$
* $|a+b| \neq |a| + |b|$
* $\sqrt{A(x)^2} = |A(x)|$

* متراجحات بالقيمة المطلقة

$\alpha \geq 0$ ; $|A(x)| < \alpha$

$-\alpha < A(x) < +\alpha$

$\alpha \geq 0$ ; $|A(x)| > \alpha$

$\begin{cases} A(x) > \alpha \\ A(x) < -\alpha \end{cases}$ أو

* يمكن التخلص من القيمة المطلقة بالتربيع. $(|A|^2 = A^2)$

$|x+2| = |x-3|$

$(x+2)^2 = (x-3)^2$

$(x+2)^2 - (x-3)^2 = 0$

$(x+2-x+3)(x+2+x-3) = 0$

$(5)(2x-1) = 0$

$\boxed{x = 1/2}$

* التخلص من رمز القيمة المطلقة

- نشئ جدول الاشارة
- نطبق الخاصية

$|A(x)| =$

$A(x)$ ; $A(x) \geq 0$ — $-A(x)$ ; $A(x) \leq 0$

مثال: $f(x) = |-2x+3|$

اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

| $x$ | $-\infty$ | | $3/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| اشارة $-2x+3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| عبارة $f(x)$ | | $= A(x)$ $= -2x+3$ | | $= -A(x)$ $= 2x-3$ | |

$f(x) = -2x+3$ ; $x \in ]-\infty, 3/2]$

$f(x)$

ADEL NAIDJI

# كثيرات الحدود

ADEL NAIDJI

# كثيرات الحدود

## 1/ مفهوم كثير حدود:

بعد الاختزال و التبسيط، نجد دالة:

← معرفة على $\mathbb{R}$

← من الشكل

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ تسمى معاملات كثير الحدود $P(x)$

- $-2x^3+3x-5$ ; $\mathbb{R}$ ✓
- $-6x^2+7x+2$ ; $\mathbb{R}^*$ ✗
- $\frac{-x^2+1}{x+1}$ ; $\mathbb{R}-\{-1\}$ ✗
- $\frac{5x^3+10x}{x^2+2}$ ✓

## 2/ درجة كثير الحدود:

هي أعلى أس.

- $P(x)=2 \rightarrow$ الدرجة 0
- $P(x)=-3x+1 \rightarrow$ الدرجة 1
- $P(x)=5x^{100}+x^2+1 \rightarrow$ الدرجة 100

## 3/ تساوي كثيري حدود:

المعاملات متساوية

أوجد $a, b, c, d$ حتى يكون

$$P(x) = g(x)$$

حيث:

$$P(x) = ax^3+bx^2-x+d$$

$$g(x) = 2x^3+cx+3$$

$$\begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=-1 \\ d=3 \end{cases}$$

ADEL NADJI

## 4/ كثير الحدود المعدوم (دوما):

جميع المعاملات معدومة.

اوجد $m, n, l$ حتى يكون $P(x)=0$ دوما من اجل أي قيمة لـ $x$:

$P(x)=(-3m+n)x^2+(m+2n+l)x+1+3m=0$

$$\begin{cases} -3m+n=0 \Rightarrow n=-1 \\ m+2n+l=0 \Rightarrow l=+7/3 \\ 1+3m=0 \Rightarrow m=-1/3 \end{cases}$$

## 5/ عمليات على كثيرات الحدود:

* مجموع كثيري حدود هو كثير حدود درجته أعلى درجة
* جداء كثيري حدود هو كثير حدود درجته $n+m$

$P(x)=2x^2+2x+3$

$g(x)=3x^{40}+5+6x^2$

$P(x)+g(x)=3x^{40}+8x^2+2x+8$

الدرجة 40

$P(x).g(x)=(2x^2+2x+3)\times(3x^{40}+5+6x^2)$

الدرجة $40+2=42$

## 6/ جذر كثير حدود: (جذر ≠ جذر هنا ≠ حل)

* $\alpha$ جذر لـ $P(x)$ معناه:

$P(\alpha)=0$

* و يمكن كتابة $P(x)$ كمايلي:

$P(x)=(x-\alpha).g(x)$

$P(x)=2x^3-x^2-14x+16$

تأكد أن 2 جذر لـ $P(x)$

نحسب $P(2)$:

$P(2)=2(2)^3-2^2-14(2)+16$

$P(2)=0$

اذن 2 جذر لـ $P(x)$

$P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$ درجة 2.

ADEL NADJI

# المعادلات

ADEL NAIDJI

# المعادلات

## ملاحظة مهمة:

* قبل حل أي معادلة أو متراجحة، يجب تعيين مجموعة تعريفها

تقاطع عدة شروط (1)

$$\sqrt{A(x)} \quad ; \quad A(x) \geq 0$$
$$\text{و}$$
$$\frac{1}{A(x)} \quad ; \quad A(x) \neq 0$$

$\frac{\text{عدد}}{0}$ = لا يمكن

$\frac{0}{\text{عدد}} = 0$

## 1/ المعادلات من الدرجة 1

$$ax+b=0 \quad ; \quad a \neq 0$$

للمعادلة حل وحيد $x = -\frac{b}{a}$

مثال:

$$-2x-3=0$$
$$x = \frac{-3}{2}$$

## 2/ المعادلات من الدرجة 2

$$ax^2+bx+c=0 \quad ; \quad a \neq 0$$

$$\Delta = b^2-4ac$$

**$\Delta > 0$:** للمعادلة حلان متمايزان

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

* يمكن تحليل العبارة كمايلي:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

**$\Delta = 0$:** للمعادلة حل مضاعف

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

والعبارة تحلل كمايلي:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$$

**$\Delta < 0$:**

* ليس للمعادلة حلول
* لا يمكن تحليل العبارة.

مثال:

حل المعادلة: $5x^2+6x+1=0$

$$\Delta = b^2-4ac = 36-4(5) = 16 > 0$$

للمعادلة حلان:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+4}{10} = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-4}{10} = -1$$

ADEL NAIBI

## * حالات خاصة:

**c=0 :** $ax^2+bx=0$

$x(ax+b)=0$

المعادلة حلان دوما:

$$\begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

**b=0 :** $ax^2+c=0$

$x^2=-\frac{c}{a}$

$x^2=\alpha$

$\alpha<0$ : لا يوجد حلول

$\alpha=0$ : حل مضاعف $x=0$

$\alpha>0$ : حلين متمايزان

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{\alpha} \\ x_2=-\sqrt{\alpha} \end{cases}$$

## أمثلة:

$-x^2+5x=0$

$x(-x+5)=0$

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=5 \end{cases}$$

$2x^2-4=0$

$x^2=2$

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{2} \\ x_2=-\sqrt{2} \end{cases}$$

## * مجموع وجداء $x_1$ و $x_2$:

إذا قبلت معادلة من الدرجة 2 حلين فإن:

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$P=x_1\times x_2=\frac{c}{a}$$

**الاستعمال**

- التأكد من صحة الحل
- ايجاد الحل الثاني بمعلومية الأول

## * تعيين اشارة الحلين دون حسابهما:

* إذا قبلت معادلة من الدرجة 2 حلين، يمكن معرفة اشارتهما دون حسابهما.

**P**

- **P>0** : حلين من نفس الاشارة
  - **S**
    - S<0 : حلين سالبين
    - S>0 : حلين موجبين
- **P<0** : حل سالب + حل موجب

ADEL NAIDJI

## * تعيين عددين علم مجموعهما وجداؤهما:

$a$ و $b$ يحققان $\begin{cases} S = a+b \\ P = a \times b \end{cases}$

⇓

$a$ و $b$ هما حلا المعادلة:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثال:

اوجد العددان $a$ و $b$ اللذان يحققان:

$a+b=-2$

$ab=-3$

$a$ و $b$ هما حلا المعادلة:

$x^2+2x-3=0$

$a=1$ $\quad b=-3$

أو

$b=1$ $\quad a=-3$

## * معرفة هل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلولا دون حساب $\Delta$

← إذا كان $a.c<0$: فإن للمعادلة حتما حلول و $\Delta$ حتما موجب

← إذا كان $a.c>0$: $\Delta$ يمكن الحكم مسبقا

## * الحل الظاهر:

في بعض الأحيان يمكن حل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ دون حساب $\Delta$ و ذلك كما يلي:

← $a+b+c=0$ (مجموع المعاملات 0)

* فإن 1 حل ظاهر
* والحل الآخر هو $\frac{c}{a}$

← $a-b+c=0$:

* $(-1)$ حل ظاهر
* والحل الآخر هو $\frac{-c}{a}$.

## 3/ المعادلات من الدرجة III

$ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a \neq 0$

### ① طريقة التحليل مرتين:

$2x^3-3x^2+4x-6=0$

$x^2(2x-3)+2(2x-3)=0$

$(2x-3)(x^2+2)=0$

$\begin{cases} 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ x^2+2=0 \Rightarrow S=\phi=\{\} \end{cases}$

المعادلة حل وحيد هو $x=\frac{3}{2}$

N.B ($\Delta$ يوجد $\{\phi\}$)

ADEL NAIDJI

## ② طريقة الحل الظاهر:

1* لحل المعادلة، يجب أن نظهر أحد حلولها الظاهرة $x=\alpha$ (يعطى في التمرين أو بلاحظ) (نجرب 1 ثم -1 ثم 2)

2* تحليل العبارة على الشكل التالي:
$(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$
ثم تعيين a, b, c باحدى الطرق الثلاث:
← القسمة الاقليدية
← المطابقة
← خوارزمية هورنر

3* حل المعادلة.

مثال:
$2x^3-x^2-14x+16=0$

### 1/ الحل الظاهر:
• نتأكد أن 2 حل ظاهر.
• نعوض بـ 2

$2(2)^3-2^2-14(2)+16$
$=16-4-28+16$
$=0$

اذن 2 حل للمعادلة.

### 2/ تحليل العبارة:
$2x^3-x^2-14x+16$
$=(x-2)(ax^2+bx+c)$

#### a/ القسمة الاقليدية:

| | |
|---|---|
| $2x^3-x^2-14x+16$ | $x-2$ |
| $-2x^3-4x^2$ | $2x^2+3x-8$ |
| $3x^2-14x+16$ | |
| $-3x^2-6x$ | |
| $-8x+16$ | |
| $-8x+16$ | |
| $0$ | |

$P(x)=(x-2)(2x^2+3x-8)$

#### b/ المطابقة:
$(x-2)(ax^2+bx+c)$
$=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$
$=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

اذن:
$2x^3-x^2-14x+16$
$=$
$ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

بالمطابقة
$\begin{cases} a=2 & \text{---①} \\ b-2a=-1 & \text{---③} \\ c- & \\ -2 & \end{cases}$

ADEL NAIDJI

من ① : $a = 2$

من ② : $c = -8$

من ③ : $b = 2a - 1 = 3$

نتأكد في ④ :

$c - 2b = -8 - 2(3) = -14$

محققة

اذن :

$p(x) = (x-2)(2x^2+3x-8)$

### c/ خوارزمية هورنر:

| معاملات $p(x)$ | 2 | -1 | -14 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| الحل الظاهر (2) | 0 | 4 | 6 | -16 |
| المعاملات a, b, c | 2 | 3 | -8 | 0 |

a b c

اذن:

$p(x) = (x-2)(2x^2+3x-8)$

### 3/ حل المعادلة:

$2x^3 - x^2 - 14x + 16 = 0$

معناه:

$(x-2)(2x^2+3x-8) = 0$

$\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 2x^2 + 3x - 8 = 0 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 73 > 0$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{73}}{4}$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{73}}{4}$

اذن : للمعادلة المعطاة 3 حلول هي:

$\left\{ 2 ; \frac{-3+\sqrt{73}}{4} ; \frac{-3-\sqrt{73}}{4} \right\}$

### 4/ المعادلات من الدرجة IV

① طريقة التحليل مرتين:

② طريقة الحل الظاهر:

③ طريقة تحويل المتغير:

حل في IR المعادلة :

$(x^2-3x)^2 - 2(x^2-3x) - 8 = 0$

* نضع $y = x^2 - 3x$

* نحل المعادلة ذات المجهول y

* نستنتج قيم x.

المعادلة تصبح:

$y^2 - 2y - 8 = 0$

$\begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 4 \end{cases} \Leftarrow \Delta = 36$

ADEL NADJI

* حالة $y=-2$:

$$y = x^2 - 3x$$
$$-2 = x^2 - 3x$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

* حالة $y=4$:

$$y = x^2 - 3x$$
$$4 = x^2 - 3x$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\begin{cases} x_3 = -1 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

اذن للمعادلة المعطاة 4 حلول هي:

$$S = \{-1; 1; 2; 4\}$$

## ④ المعادلات مضاعفة التربيع:

من الشكل: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ; $a \neq 0$

* نضع $y = x^2$
* نبحث عن قيم $y$
* نستنتج قيم $x$

مثال: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

نضع $y = x^2$، المعادلة تصبح

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \; ; \; y \geq 0$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

* حالة $y=1$ $\quad y = x^2$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

* حالة $y=4$ $\quad y = x^2$

$$\begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

المعادلة المعطاة 4 حلول:

$$S = \{-2; -1; 1; 2\}$$

## ⑤ المعادلات التناظرية:

من الشكل:

$$\underline{a}x^4 + \underline{b}x^3 + cx^2 + \underline{b}x + \underline{a} = 0$$

$a \neq 0$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة

$$3x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 0$$

* نقسم على الحد الأوسط $(x^2)$

$$3x^2 - 7x + 8 - 7\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

ABDELMAIDJ

* نضع الحدود التي لها نفس المعاملات جنبا الى جنب

$$3x^2+3\left(\frac{1}{x^2}\right)-7x-7\left(\frac{1}{x}\right)+8=0$$

$$3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$$

* نظهر المتغير الجديد:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

المعادلة تصبح

$$3\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$$

$$3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$

* نضع $y=x+\frac{1}{x}$ ثم نحل المعادلة

$$3y^2-7y+2=0$$

$$\begin{cases} y_1=2 \\ y_2=\frac{1}{3} \end{cases}$$

لما $y=2$

$$x+\frac{1}{x}=2$$

$$x^2-2x+1=0$$

حل مضاعف 1

لما $y=\frac{1}{3}$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$$

$$3x^2-x+3=0$$

$\Delta<0$

لا يوجد حل

## 5/ معادلات أخرى:

$$A(x)\cdot B(x)=0$$ معناه:

$$\begin{cases} A(x)=0 \\ B(x)=0 \end{cases}$$ أو

مثال:

$$(2x+1)(x^2+3x-4)=0$$

$$\begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2+3x-4=0 \end{cases}$$ أو

$$S=\left\{-4;-\frac{1}{2};1\right\}$$

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0$$ *

← نعين D $(B(x)\neq 0)$

← نحل المعادلة $A(x)=0$

← نتحقق هل الحلول تنتمي لـ D

مثال:

$$\frac{x^2+3x-4}{x-1}=0$$

$D=\mathbb{R}-\{1\}$ ; $x\neq 1$ ; $x-1\neq 0$ *

* المعادلة المعطاة تكافئ:

$$x^2+3x-4=0$$

$$\begin{cases} x_1=1 \rightarrow \text{مرفوض} \\ x_2=-4 \end{cases}$$

اذن المعادلة حل وحيد $S=\{-4\}$

ADEL MAIDJ

## $\sqrt{A(x)} = 0$ ✦

✦ نعين D $A(x) \geq 0$

✦ نحل المعادلة $A(x) = 0$

✦ نتحقق هل الحلول من D

مثال:

$D = [1; +\infty[$ $\sqrt{x-1} = 0$

المعادلة تكافئ $x - 1 = 0$

$x = 1 \in D$

اذن للمعادلة حل وحيد

$S = \{1\}$

## $|A(x)| = 0$ / $A(x)^n = 0$ ✦

نحل المعادلة $A(x) = 0$

مثال:

$(2x+1)^3 = 0$

$2x + 1 = 0$

$x = -1/2$

$|x^2+3x-4| = 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

## $\sqrt{A(x)} = B(x)$ ✦

✦ نعين D .

✦ نحل المعادلة $A(x) = B(x)^2$

✦ نتأكد هل الحلول من D

مثال:

$\sqrt{x^2-4} - x - 1 = 0$

$x^2 - 4 \geq 0$

$D = ]-\infty, -2] \cup [2; +\infty[$

$\sqrt{x^2-4} = x + 1$

$x^2 - 4 = (x+1)^2$

$x^2 - 4 = x^2 + 2x + 1$

$2x + 1 + 4 = 0$

$2x + 5 = 0$

$x = -\frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2} \in D$

اذن للمعادلة حل وحيد $S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

## $|A| = -|B|$, $|A| = |B|$, $|A(x)| = B(x)$ ✦

$(A-B)(A+B) = 0 \iff A^2 = B^2$

مثال:

$2|x-1| = 3|2x+4|$

$|x-1| = \frac{3}{2}|2x+4|$

$|x-1| = \left|\frac{3}{2} \times 2x + 4 \times \frac{3}{2}\right|$

$|x-1| = |3x+6|$

$(x-1)^2 = (3x+6)^2$

$(x - 1 - 3x - 6)(x - 1 + 3x + 6) = 0$

$(-2x-7)(4x+5) = 0$

$\begin{cases} -2x - 7 = 0 \\ 4x + 5 = 0 \end{cases}$

$S = \left\{-\frac{7}{2}; -\frac{5}{4}\right\}$

ABDELNAIDJI

* $A(x)^n = B(x)$

مثال: $x^3 = 8$

$x^3 - 8 = 0$

$x^3 - 2^3 = 0$

$(x-2)(x^2+4+2x) = 0$

$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+2x+4=0 \quad \Delta<0 \end{cases}$

المعادلة حل وحيد $S=\{2\}$

* $\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$

$\sqrt{4x+7} = 2+\sqrt{2x}$

$2x \geq 0 \iff x \in [0,+\infty[ = I$

$4x+7 \geq 0 \iff x \in \left[-\frac{7}{4};+\infty\right[ = J$

$D = I \cap J = [0,+\infty[$

المعادلة تصبح:

$\sqrt{4x+7} - \sqrt{2x} = 2$

$\left(\sqrt{4x+7} - \sqrt{2x}\right)^2 = 4$

$4x+7+2x-2\sqrt{2x(4x+7)} = 4$

$6x+3 = 2\sqrt{2x(4x+7)}$

$(6x+3)^2 = 4\left[2x(4x+7)\right]$

$36x^2+9+36x = 32x^2+56x$

$4x^2-20x+9=0$

* $|A|+B=C \quad |A|+|B|=C$ ...

يجب أن نتخلص من رمز القيمة المطلقة بالاستعانة بجدول الاشارة.

مثال ①:

$|x+3|+|x-5|=6$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x+3\rvert$ | $-x-3$ | $0$ | $x+3$ | | $x+3$ | | |
| $\lvert x-5\rvert$ | $-x+5$ | | $-x+5$ | $0$ | $x-5$ | | |
| $\lvert x+3\rvert+\lvert x-5\rvert$ | $-2x-2$ | $\searrow$ | $8$ | $\rightarrow$ | $8$ | $\nearrow$ | $2x-2$ |

تكافئ: $|x+3|+|x-5|=6$

$-2x-2=6 \quad x \in ]-\infty;-3]$ *

$x=-2$

$-2 \notin ]-\infty;-3]$ مرفوض لأن

$8=6 \quad x \in ]-3;5[$ *

مستحيل

$2x-2=6 \quad x \in ]5;+\infty[$ .

$x=4$

$4 \in ]5;+\infty[$ مرفوض لأن

$8=6$ : $x=-3$ أو $x=5$ .

مستحيل

اذن المعادلة المعطاة ليس لها حلول

ADEL NAIDJI

## * المعادلات الوسيطية:

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ ، عدد و اشارة حلول المعادلة التالية.

$$\underbrace{2m}_{a}x^2+\underbrace{m}_{b}x+\underbrace{3-m}_{c}=0$$

### ① $a=0$ $(m=0)$

المعادلة تصبح $3=0$ (مستحيل)

$S=\{\}$

### ② $a\neq 0$ $(m\neq 0)$

المعادلة $2mx^2+mx+3-m=0$ من الدرجة II :

$\Delta = b^2-4ac = m^2-4(2m)(3-m)$

$$\boxed{\Delta = 9m^2-24m}$$

### دراسة اشارة $\Delta$:

$\Delta' = (-24)^2-4(9)(0) = 24^2 > 0$

للمعادلة حلان :

$m=0$

$m=8/3$

$m=0$ مرفوض (لأننا فرضنا أن $m\neq 0$)

| $m$ | $-\infty$ | | $0$ | | $8/3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta=9m^2-24m$ | | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $-$ | |
| عدد الحلول | | حلان متمايزان $x=\frac{-m\pm\sqrt{9m^2-24m}}{4m}$ | $\|\|$ | $\phi$ | حل مضاعف $x=\frac{-1}{4}$ | حلان متمايزان $x=\frac{-m\pm\sqrt{9m^2-24m}}{4m}$ | |

## استنتاج الحلول:

## اشارة الحلان:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{3-m}{2m}$$

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-m}{2m}=-\frac{1}{2}$$

### ندرس اشارة P و S:

| $m$ | $-\infty$ | | $0$ | | $8/3$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الحلول | حلان | | $\|\|$ | $\phi$ | $-\frac{1}{4}$ | حلان | | | حلان |
| $P$ | $-$ | | $\|\|$ | | $+$ | | $0$ | $-$ | |
| | | | $\|\|$ | | $S=-\frac{1}{2}$ | | | | |
| اشارة الحلان | مختلفان | | $\|\|$ $\phi$ | $\phi$ | $-\frac{1}{4}$ | مالبان | $x=0$ $x=-\frac{1}{2}$ | مختلفان | |

ABDELNAIDJI

## * حل المعادلات التالية :

$$x^4 + 4|x^2-1| + 3|x+2| + 1 = 0$$

$x^4 + 4|x^2-1| + 3|x+2| = -1$

⊕ ⊖

مستحيل $\Leftarrow S = \emptyset$

$$x - 5\sqrt{x} - 6 = 0$$

$x \in [0, +\infty[$ ; $x \geq 0$

نضع $Y = \sqrt{x}$ ; $Y \geq 0$

$Y^2 - 5Y - 6 = 0$

$\begin{cases} Y = -1 & \text{مرفوض} \\ Y = 6 \end{cases}$

$\sqrt{x} = 6$ أي $Y = 6$

أي $x = 6^2$

$\boxed{x = 36}$

$$x|x| = -3$$

نفصل الحالات :

$x \geq 0$ : $x^2 = -3$ مستحيل

$x \leq 0$ : $-x^2 = -3$

$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3} & \text{مرفوض} \nearrow \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases}$

## تذكير حول أنماط البرهان "6"

* الاستلزام
* التكافؤ
* الخلف : نفرض أن الخاصية خاطئة ثم نبسط حتى نصل إلى تناقض ، منه فرضيتنا خاطئة $\Leftarrow$ الخاصية صحيحة
* العكس النقيض للاستلزام :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

* التراجع .
* فصل الحالات .

ADEL NADJI

# دراسة اشارة عبارة

ADEL NAIDJI

# دراسة اشارة عبارة

* اشارة $ax+b$ $a\neq 0$

| $x$ | $-\infty$ | $-b/a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ax+b$ | عكس اشارة $a$ | $0$ | نفس اشارة $a$ |

* اشارة $ax^2+bx+c$ : $a\neq 0$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta>0$ : حلان $x_1$ و $x_2$ $x_1 < x_2$

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $ax^2+bx+c$ | نفس اشارة $a$ | $0$ | عكس اشارة $a$ | $0$ نفس اشارة $a$ |

$\Delta=0$ : حل مضاعف $x_1$

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ax^2+bx+c$ | نفس اشارة $a$ | $0$ | نفس اشارة $a$ |

$\Delta<0$ : $S=\emptyset$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $ax^2+bx+c$ | نفس اشارة $a$. | |

* اشارة $A(x)\cdot B(x)$

ننجز جدول الاشارة.

مثال: $\theta(x)=(2x+1)(x^2+4x-5)$

| $x$ | $-\infty$ | $-5$ | $-1/2$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | $-$ | $-$ | $0$ $+$ | $+$ | |
| $x^2+4x-5$ | $+$ | $0$ $-$ | $-$ | $0$ $+$ | |
| $\theta(x)$ | $-$ | $0$ $+$ | $0$ $-$ | $0$ $+$ | |

* اشارة $\frac{A(x)}{B(x)}$ :

ننجز جدول الاشارة مع $B(x)\neq 0$

| $x$ | $-\infty$ | $-5$ | $-1/2$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | $-$ | $-$ | $0$ $+$ | $+$ | |
| $x^2+4x-5$ | $+$ | $0$ $-$ | $-$ | $0$ $+$ | |
| $\theta(x)$ | $-$ | $\|\|$ $+$ | $0$ $-$ | $\|\|$ $+$ | |

$$\theta(x)=\frac{2x+1}{x^2+4x-5}$$

* اشارة $A(x)^n$ :

$n=2k$ : $A(x)^n \geqslant 0$ دوما

$n=2k+1$ : اشارة $A(x)^n$ من اشارة $A(x)$.

مثال: $\theta(x)=(x^2+4x-5)^{15}$

| $x$ | $-\infty$ | $-5$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\theta(x)$ | | | | |

ADEL NADJI

لكن $(x^2+4x-5)^{10}$ دوما موجب

* اشارة $\frac{1}{A(x)}$ :

نفسها اشارة $A(x)$ مع $A(x)\neq 0$

مثال:

$$\theta(x)=\frac{1}{x^2+4x-5}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta(x)$ | $+$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $+$ | | |

$\uparrow$ قيمة ممنوعة.

* اشارة $S=C+B+A$

← $A$ ، $B$ ، $C$ سالبة دوما: $S\leqslant 0$

← $A$ ، $B$ ، $C$ موجبة دوما: $S\geqslant 0$

← $A$ ، $B$ ، $C$ من اشارات مختلفة، نحلل المجموع الى جداء ثم ننجز جدول الاشارة.

* ملاحظة:

$|a|$ / $\sqrt{a}$ / $a^{n=2k}$ / $a^2$ أو مجموعها

موجب دوما.

مثال: حل المتراجحة

$3x^{2008}+11x^{1962}+1964\geqslant 0$

⊕ ⊕ ⊕

محققة دوما

* اشارة عبارة بدلالة اشارة عبارة أخرى

مثال:

$$f(x)=\frac{g(x)\times(x^2+3)}{x^4+5x^2}$$

* اشارة $f(x)$ من اشارة $g(x)$.

مثال:

$$f(x)=\frac{g(x)+x^2+3}{x^4+5x^2}$$

* اشارة $f(x)$ من اشارة $g(x)+x^2+3$

* لا يمكن القول ان اشارة $f(x)$ من اشارة $g(x)$.

← لا يصح تجاهل مقدار عند دراسة اشارة عبارة بالاداة الحان

* مضروب في ⊕

* مقسوم على ⊕

اشارة عبارة ← الاشتقاق

نفوض نقعد مثال

ADEL NADJI

# المتراجحات

ADEL NAIDJI

# حل متراجحات

| $\leqslant$ | $\geqslant$ | $>$ | $<$ |
|---|---|---|---|
| مجال مغلوق | | مجال مفتوح | |

* نعين $D$ مجموعة التعريف
* نحل المتراجحة ونكتب الحل على شكل مجال $I$
* حل المتراجحة هو $S = I \cap D$

$\Leftarrow$ لحل متراجحة:

← نجعلها صفرية
← نحلل العبارة
← ننجز جدول الاشارة
← نستنتج الحلول.

**$ax+b>0$ :**

$-2x+4>0$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2x+4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$S = ]-\infty, 2[$

**$ax^2+bx+c>0$ :**

$x^2+4x-5 \leqslant 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+4x-5$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S = [-5, 1]$

**$A(x) \cdot B(x) > 0$**

$(2x+1)(x^2+4x-5) \geqslant 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S = \left[-5; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty[$

**$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ :**

$\frac{2x+1}{x^2+4x-5} \leqslant 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta(x)$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |

$S = ]-\infty, -5[ \cup \left[-\frac{1}{2}; 1\right[$

**$A(x)^n > 0$**

* $(x^2+4x-5)^{10} < 0$ ليس لها حل
* $(x^2+4x-5)^{10} \geqslant 0$ محققة دوما
* $(x^2+4x-5)^{10} \leqslant 0$ تكافئ:

$x^2+4x-5=0$

$S = \{-5; 1\}$

$S = \mathbb{R} - \{-5$

ADEL NADJI

مثال:

$|2x-3|<5$

$-5<2x-3<5$

$-5+3<2x<5+3$

$-2<2x<8$

$-1<x<4$

$S=]-1;4[$

## $|A(x)|\geq\alpha$

$\alpha<0$: مجموعة $\mathbb{R}$

$\alpha=0$: $|A(x)|\geq 0$ معناه $S=\mathbb{R}$

$|A(x)|>0$

$S=\mathbb{R}-\{$القيم التي تعدم $A(x)\}$

$\alpha>0$:

$\begin{cases} A(x)\geq\alpha \\ A(x)\leq-\alpha \end{cases}$ أو $f(U)$

مثال:

$|2x-3|\geq 5$

$\begin{cases} 2x-3\geq 5 \\ 2x-3\leq -5 \end{cases}$ أو

$\begin{cases} 2x-8\geq 0 \\ 2x+2\geq 0 \end{cases}$ أو

$\begin{cases} x\geq 4 \\ x\geq -1 \end{cases}$ أو

$S=[4;+\infty[\cup[-1;+\infty[$

$S=[-1;+\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x^2+4x-5)^{10}$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

$(x^2+4x-5)^{13}<0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x^2+4x-5)^{13}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S=]-5;1[$

$\frac{1}{A(x)}\geq\alpha$ :

$\frac{1}{(x^2+4x-5)}\geq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x^2+4x-5}$ | | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |

$S=]-\infty;-5[\cup]1;+\infty[$

## $|A(x)|\leq\alpha$

$\alpha<0$: لا يوجد حلول

$\alpha=0$: $|A(x)|\leq 0$ معناه $A(x)=0$

$|A(x)|<0$ لا يوجد حلول

$\alpha>0$: $-\alpha\leq A(x)\leq\alpha$

ADEL NAIDJI

## حل متراجحات صماء:

### $\sqrt{A(x)} > B(x)$

$$\sqrt{3x+12} > x+3$$

* تعيين D:

$$D = [-4; +\infty[$$

* إشارة $x+3$ على المجال D:

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | ////// | | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

$x \in [-4; -3[$ *

$\sqrt{3x+12} > x+3$

$\oplus$ $\quad$ $\ominus$

محققة

$S_1 = [-4; -3[$

$x = -3$ *

$\sqrt{3} > 0$

محققة

$S_2 = \{-3\}$

$x \in ]-3; +\infty[$ *

$\sqrt{3x+12} > x+3$

$\oplus$ $\quad$ $\oplus$

$3x+12 > x^2+6x+9$

$x^2+3x-3 < 0$

$x_1 = \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \approx -3,79$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+3x-3$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

$I = ]x_1; x_2[$

$I = \left]\frac{-3-\sqrt{21}}{2}; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right[$

$S_3 = ]-3; +\infty[ \cap I$

$S_3 = \left]-3; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right[$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$S = \left[-4; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right[$

### $\sqrt{A(x)} \leqslant B(x)$

$$\sqrt{x-2} \leqslant -2x+6$$

* تعيين D

$D = [2; +\infty[$

* إشارة $-2x+6$ على D

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x+2$ | ////// | | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

$x \in [2; 3[$ : $\sqrt{x-2} < -2x+6$

$\oplus$ $\quad$ $\oplus$

$(x-2) < (-2x+6)^2$

$4x^2 - x + 14 > 0$

و لدينا $\Delta < 0$ : [illegible]

ABDELNADJI

$S_1 = [2;3[$

: $x = 3$

$1 < 0$

مستحيل

$S_2 = \phi$

: $x \in ]3;+\infty[$

$\sqrt{x-2} < -2x+6$

$\oplus$ $\ominus$

مستحيل

$S_3 = 0$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$S = [2;3[$

ADEL NAIDJI

# عموميات على الدوال

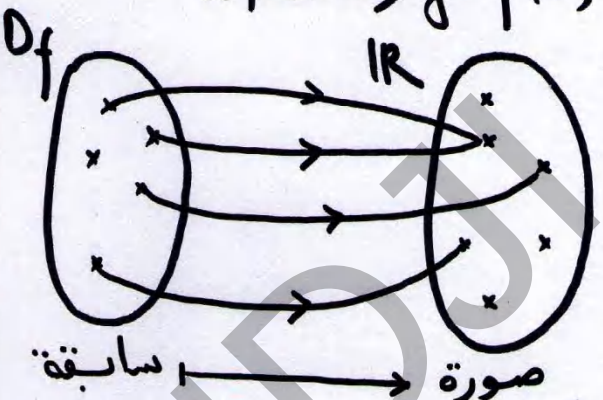
ADEL NAIDJI

# الدوال العددية

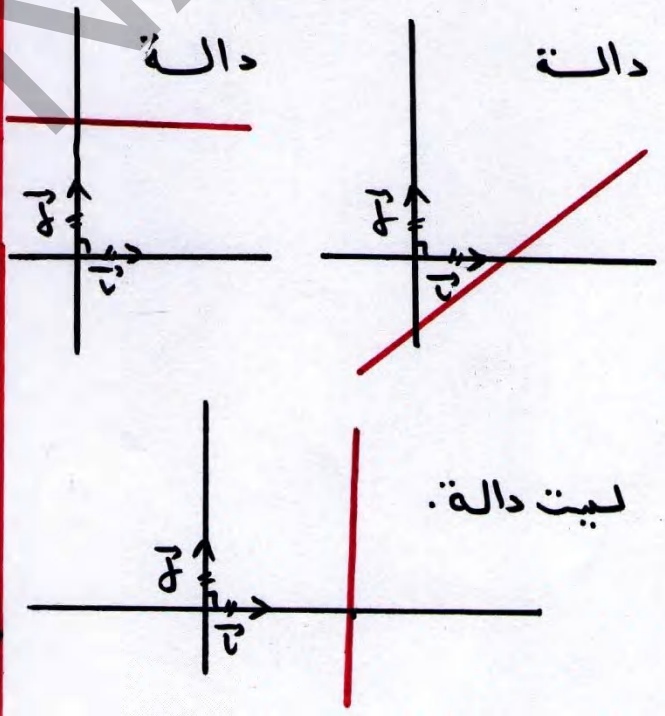
## 1/ مفهوم دالة

$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = f(x)$




* لكل $x$ من $D_f$ : صورة **وحيدة**.
* كل عدد $y$ ، يمكن أن يكون له سابقة، اثنتان، ...، أو لا شيء.




* كل دالة $f$ معرفة بـ:
  * مجموعة تعريفها $D_f$
  * دستور الدالة : $f(x) = \ldots$

## 2/ مجموعة تعريف دالة:

| |
|---|
| $\frac{1}{A}$ ; $A \neq 0$ |
| $\sqrt{A}$ ; $A \geqslant 0$ |

تقاطع عدة شروط

* $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ , $B(x) \neq 0$
* $f(x) = \sqrt{B(x)}$ ; $B(x) \geqslant 0$
* $f(x) = \frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$ , $B(x) > 0$
* $f(x) = \sqrt{|B(x)|}$ ; لا يوجد شرط
* $f(x) = \frac{A(x)}{\sqrt{|B(x)|}}$ ; $B(x) \neq 0$
* $f(x) = \sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}}$ ; $\begin{cases} A(x) \cdot B(x) \geqslant 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$
* $f(x) = \sqrt{A(x) \cdot B(x)}$ ; $A(x) \cdot B(x) \geqslant 0$

* $D_f$ يكتب على شكل مجموعة ← اتحاد مجالات

$D_f = \mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty ; 1[ \cup ]1,2[ \cup ]2 ; +\infty[ = \mathbb{R} - \{1;2\}$

← هذا الشكل يساعد على حساب النهايات.

**أمثلة:**

* $f(x) = 2x + 1$
* $f(x) = \frac{3x+6}{x-1}$
* $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$
* $f(x) = \sqrt{|-8x+2|}$
* $f(x) = \sqrt{}$

ADEL NADJI

- $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x^2+4x-5}$
- $f(x)=\dfrac{x^3+8}{\sqrt{x^2+4x-5}}$
- $f(x)=\dfrac{x^3+8}{\sqrt{x^2+4x-5}}$
- $f(x)=\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}$
- $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2-\sqrt{x+3}}$

## 3/ حساب صورة أو سوابق عدد :

### حساب صورة عدد a:

- نتأكد أن $a\in D_f$
- نحسب $f(a)$
- $f(a)=b$

مثال: $f(x)=2x+1 ; D_f=\mathbb{R}$

$f(0)=1$

### حساب سوابق عدد b:

- نحل المعادلة $f(x)=b$
- نحتفظ بالحلول التي تنتمي لـ $D_f$

مثال: $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

جد سوابق العدد 0.

$f(x)=0 \Rightarrow x^2+4x-5=0$

$\begin{cases} x=1 \Rightarrow \text{مرفوض} \\ x=-5 \end{cases}$

إذن $f(-5)=0$

## 4/ تساوي دالتين:

$\begin{cases} D_f=D_g \\ f(x)=g(x) \end{cases}$ معناه $f=g$

أمثلة:

$f(x)=x+2 ; D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\sqrt{(x+2)^2} ; D_g=\mathbb{R}, g(x)=|x+2|$

$f(x)\neq g(x)$ لأن $f\neq g$

---

$f=g$ : على المجال $[-2,+\infty[$

---

$f(x)=x+2 ; D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2} ; D_g=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

$g(x)=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=x+2$

- على المجال $\mathbb{R}$ : $f\neq g$
- على المجال $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ : $f=g$

ABDELNADJI

**الاستعمال: إيجاد شكل آخر مبسط لدالة f.**

* مثال: $f(x)=\dfrac{x^3+9}{x^2-1}$

اثبت أنه من أجل كل x من $D_f$:

$f(x)=g(x)$

حيث: $g(x)=x+\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{4}{x+1}$

**الحل:**

$D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

$D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

$D_f=D_g$

نبين الآن أن: $f(x)=g(x)$

← ننطلق من $f(x)$ إلى $g(x)$

← ننطلق من $g(x)$ إلى $f(x)$

← نبين أن $f(x)-g(x)=0$

## أشكال مهمة لدوال معروفة:

1. $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

2. $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\alpha+\dfrac{\beta}{cx+d}$

3. $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{dx+e}$

4. $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+kx+\ell}=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma x+\gamma}{ex^2+kx+\ell}$

* $\alpha, \beta,$

① تسمى دالة كثير حدود

②، ③، ④ تسمى دوال ناطقة

$\dfrac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$.

الدالة $f(x)=\sqrt{x+1}-5x^2+2$.

تسمى دالة صماء (جذرية)

الدالة $f(x)=\dfrac{x^2+5x-\sqrt{x}}{2x+1}$. تسمى دالة كسرية.

## 5/ عمليات على الدوال:

* حذار مجموعة التعريف:

* $(f+k)(x)=f(x)+k$ ; $D_f$
* $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $D_f\cap D_g$
* $(k.f)(x)=k.f(x)$ ; $D_f$
* $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$; $D_f\cap D_g$
* $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ; $D_f\cap D_g\cap(g(x)\neq 0)$
* $(g\circ f)(x)=g[f(x)]$ تركيب دوال
$(x\in D_f)\cap(f(x)\in D_g)$

مثال: $D_f=[0;+\infty[$, $f(x)=2x^2-1$

$D_g=[-1;+\infty[$ $g(x)=\sqrt{x+1}$

* عين الدوال التالية:

$f\times g$ , $-2g$, $2f-3g$ , $f+g$ ; $f+1$

$g\circ f$ , $f\circ g$ , $\dfrac{g}{f}$

؟ $f\circ g$

ADEL NADJI

## 6/ اتجاه تغير دالة:

← نختار الشكل المناسب للدالة
← نعين مجالات الدراسة (قد تعطى)
← نختار الطريقة المناسبة.

### أ/ باستعمال قواعد الحساب في $\mathbb{R}$:

$x_1$ و $x_2$ عددان حقيقيان من مجال $I$ ($I \in D_f$)، من أجل كل $x_1$ و $x_2$:

* $f$ متزايدة تماما على $I$:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

* $f$ متناقصة تماما على $I$:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

* $f$ متزايدة على $I$:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

* $f$ متناقصة على $I$:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

* $f$ ثابتة على $I$:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ دوما.

**N.B:**
- $f$ رتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما)
- $f$ رتيبة (متزايدة أو متناقصة)

**مثال:**
* $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -x^2 - 4x + 1$
* $g$ معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $g(x) = \frac{3x-5}{x-2}$

ادرس اتجاه تغير $f$ و $g$، ثم شكل جدولي تغيراتهما.

**الدالة $f$:**

$f(x) = -x^2 - 4x + 1$
$f(x) = -(x+2)^2 + 5$

على المجال $]-\infty, -2]$:

$x_1 < x_2 \leq -2$
$(x_1+2) < (x_2+2) \leq 0$
$(x_1+2)^2 > (x_2+2)^2$
$-(x_1+2)^2 < -(x_2+2)^2$
$-(x_1+2)^2 + 5 < -(x_2+2)^2 + 5$
$f(x_1) < f(x_2)$

$f$ متزايدة تماما على $]-\infty, -2]$

على المجال $[-2, +\infty[$ بنفس الطريقة نجد: $f$ متناقصة تماما على $[-2; +\infty[$

**جدول تغيرات $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ? | ↗ | $f(-2) = 5$ | ↘ | ? |

* يمكن القول أن 5 قيمة حدية عظمى لـ $(f)$ تبلغها من أجل $x = -2$
* $(D): x = -2$ معادلة محور تناظر لـ $(C_f)$
* ? / ? تمثل نهايات الدالة $f$.

ADEL NAIDJI

الدالة g:

$g(x)=\frac{3x-5}{x-2}$ ; $D_g=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

باستعمال القسمة الاقليدية أو المطابقة

$g(x)=\frac{1}{x-2}+3$

| على المجال $]-\infty,2[$ | على المجال $]2,+\infty[$ |
|---|---|
| $x_1<x_2<2$ | لنفس الطريقة نبرهن أن g متناقصة تماما على $]2,+\infty[$ |
| $x_1-2<x_2-2<0$ | |
| $\frac{1}{x_1-2}>\frac{1}{x_2-2}$ | |
| $\frac{1}{x_1-2}+3>\frac{1}{x_2-2}+3$ | |
| $g(x_1)>g(x_2)$ | |
| g متناقصة تماما على $]-\infty,2[$ | |

| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | ‖ | ↘ | ‖ | ↘ | |

- النقطة $\Omega(2;3)$ مركز تناظر لـ $(C_g)$

ب/ باستعمال النسبة $A=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

من أجل كل $x_1, x_2$ من I :

- $A>0 \Leftarrow$ f متزايدة تماما على I
- $A<0 \Leftarrow$ f متناقصة تماما على I
- $A=0$ من أجل كل x من I $\Leftarrow$ f ثابتة على I

مثال:

- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$f(x)=x^3$

- تحقق انه من أجل كل $x_1, x_2$ من $\mathbb{R}$

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}$

فإن

- استنتج اتجاه تغير الدالة مكعب.

الحل:

- باستعمال المتطابقة الشهيرة لتحليل $a^3-b^3$ نبين العبارة

- $A>0$ دوما اذن الدالة مكعب متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ج/ قواعد عامة:

- اتجاه تغير $f+k$ نفسه اتجاه تغير الدالة f.
- اتجاه تغير $k.f$
  - $k>0$ ← : نفس اتجاه تغير f
  - $k<0$ ← : عكس اتجاه تغير f.
- f و g متزايدتان معناه الدالة $f+g$ متزايدة.
- f و g متناقصتان معناه الدالة $f+g$ متناقصة.
- f و g لا يمكن الحكم

ADEL NAIDJI

## اتجاه تغير fog

- g رتيبة تماما على المجال $I=[a;b]$
- f رتيبة تماما على المجال $g(I)$

g متزايدة تماما $\Leftarrow g(I)=[g(a);g(b)]$

g متناقصة تماما $\Leftarrow g(I)=[g(b);g(a)]$

- اتجاه تغير fog

f و g لهما نفس اتجاه التغير $\leftarrow$ fog متزايدة تماما

f و g مختلفان في اتجاه التغير $\leftarrow$ fog متناقصة تماما.

### أمثلة:

① ادرس اتجاه تغير الدالة f:

$f(x)=-\frac{3}{x}+2$

② ادرس اتجاه تغير f+g:

$f(x)=3x+1$ ; $g(x)=+2x+3$

③ ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]1,5;+\infty[$ بـ $g(x)=(-2x+3)^2$

④ ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty,3]$ بـ $g(x)=\sqrt{-x+3}$

### الحل:

① $f(x)=-\frac{3}{x}+2$ / $D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

| $]-\infty,0[$ | $]0,+\infty[$ |
|---|---|
| $\frac{1}{x}$ متناقصة تماما | kif kif |
| $-\frac{3}{x}$ متزايدة تماما | |
| $-\frac{3}{x}+2$ متزايدة تماما | |
| f متزايدة تماما | f متزايدة تماما |

② $f(x)=3x+1$

$3>0$ اذن f متزايدة تماما

$g(x)=2x+3$

$2>0$ اذن g متزايدة تماما

منه f+g دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

③ $g(x)=(-2x+3)^2$ :

$D_g=[1,5;+\infty[$

$g=u\circ v$ $\begin{cases} u(x)=x^2 \\ v(x)=-2x+3 \end{cases}$

- v متناقصة تماما على $[1,5;+\infty[$
- اتجاه تغير u على المجال

$v\left([\frac{3}{2};+\infty[\right)=]v(+\infty);v(\frac{3}{2})]=]-\infty,0]$

u : متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$

$[1,5;+\infty[$

ADEL NAIDJI

④ $g(x)=\sqrt{-x+3}$ ; $D_g=]-\infty;3]$

$g=u\circ v$ $\begin{cases} u(x)=\sqrt{x} \\ v(x)=-x+3 \end{cases}$

- $v$ متناقصة تماما على $]-\infty;3]$
- اتجاه تغير $u$ على المجال

$v(]-\infty;3]) = [v(3);v(-\infty)[ = [0,+\infty[$

على المجال $[0,+\infty[$ : $u$ متزايدة تماما

- اذن $g$ متناقصة تماما على $]-\infty;3]$

## د/ بدراسة اشارة الدالة المشتقة:

N.B : قبل دراسة اتجاه التغير، ندرس (Voir Apres)

### 7/ القيم الحدية لدالة:

تشفعية دورية محور مركز...

$f$ دالة معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$.

- اذا كان من اجل كل $x$ من $I$ : $f(x)\leq f(a)$، نقول ان $f$ تقبل قيمة حدية عظمى $f(a)=\dots$ تبلغها من اجل $x=a$
- اذا كان من اجل كل $x$ من $I$ : $f(x)\geq f(a)$، نقول ان $f$ تقبل قيمة حدية صغرى $f(a)=\dots$ .

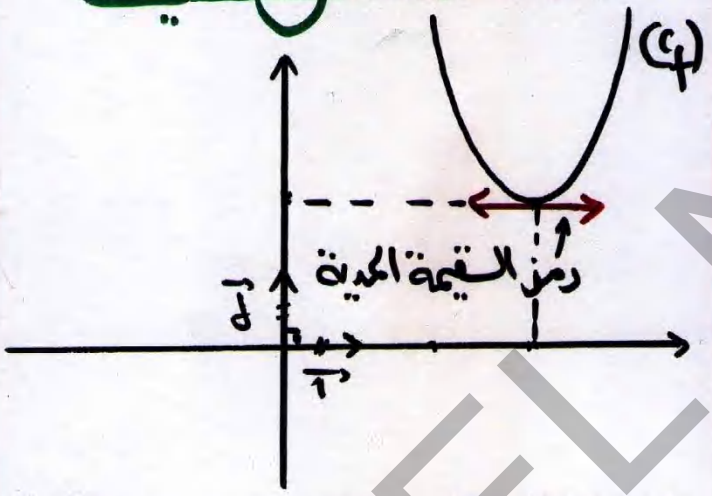
## أ/ بملاحظة جدول التغيرات

$f(x)=x^2+2$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | $2$ | ↗ |

$f$ تقبل قيمة حدية صغرى هي 2 تبلغها من اجل $x=0$

## ب/ باستعمال التمثيل البياني:




$f$ تقبل قيمة حدية صغرى 2 تبلغها من اجل $x=3$

## ج/ باستعمال قواعد الحساب في $\mathbb{R}$:

وذلك بعد اختيار الشكل المناسب لـ $f$.

مثال: اثبت ان $f(x)=-x^2-4x+1$ تقبل قيمة حدية يطلب تعيينها.

$f(x)=-x^2-4x+1$

$f(x)=-(x^2+4x+4)+5$

ADEL MAIDJ

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$:

$(x+2)^2 \geq 0$

$-(x+2)^2 \leq 0$

$-(x+2)^2 + 5 \leq 5$

$f(x) \leq 5$

اذن $f$ تقبل قيمة حدية عظمى 5 تبلغها من أجل $x = -2$

## د/ باستعمال الدالة المشتقة

## 8/ دراسة شفعية دالة:

* $f$ دالة معرفة على $D_f$

① $D_f$ متناظرة بالنسبة والى الصفر
(لكل $x \in D_f$، يوجد $-x \in D_f$)

② نحسب $f(-x)$

=

$f(x)$

* $f$ دالة زوجية
* $(C_f)$ متناظر بالنسبة لمحور التراتيب
* نقتصر مجال الدراسة على المجال $[0; +\infty[$

$-f(x)$

* $f$ دالة فردية
* $(C_f)$ متناظر بالنسبة للمبدأ O
* نقتصر مجال الدراسة على

## أمثلة:

① $f(x) = x^2$ ; $D_f = \mathbb{R}$

② $f(x) = \frac{1}{x}$ ; $D_f = \mathbb{R}^*$

③ $f(x) = |x| + 2$ ; $D_f = \mathbb{R}$

④ $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ ; $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

⑤ $f(x) = \sqrt{2 - |x|}$ ; $D_f = [-2; 2]$

⑥ $f(x) = x^2$ ; $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

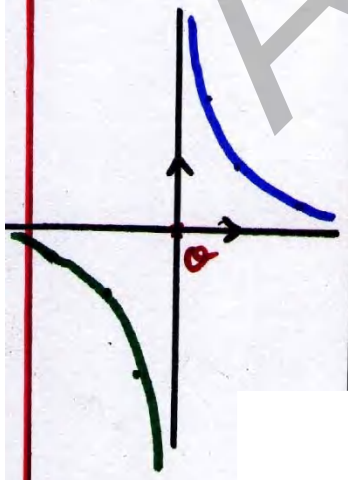
### طبيعة الأمثلة:

* ادرس شفعية $f$
* بين أن $f$ زوجية / فردية
* بين أن $f(-x) + f(x) = 0$، ماذا تستنتج؟ ← فردية.
* بين أن $f(-x) - f(x) = 0$، ماذا تستنتج؟ ← زوجية

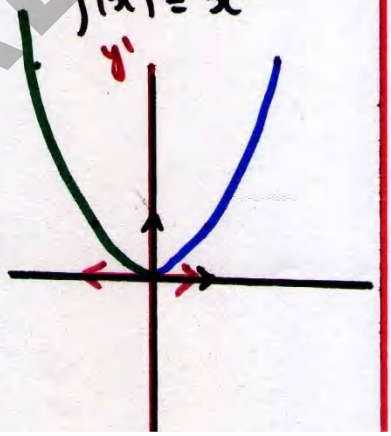
### الحل:

① زوجية
② فردية
③ زوجية
④ زوجية
⑤ زوجية
⑥ / (لا توجد)

$f(x) = \frac{1}{x}$




$f(x) = x^2$




ADEL NADJI

## 9/ الدالة الدورية:

• $f$ دالة معرفة على $D_f$

• لاثبات ان الدالة $f$ دورية ودورها $T$ يكفي اثبات ان:

← من أجل كل $x$ من $D_f$ فإن $x+T$ ينتمي إلى $D_f$

← $f(x+T)=f(x)$

• $T$ يسمى دور الدالة $f$: أصغر عدد موجب يحقق الشروط السابقة.

• **الاستعمال:** نقتصر دراسة الدالة $f$ على مجال طوله $T$ ثم نشئ $(C_f)$ وذلك بالقيام بانسحابات أشعتها $\vec{i}\left(\frac{T}{0}\right)$ يمينا وشمالا.

**مثال:**

لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x)=\cos x$

• اثبت أن $f$ دالة دورية دورها $2\pi$

• ادرس اتجاه تغير $f$ على المجال $[-\pi;\pi]$

• انشئ $(C_f)$ مع التوضيح.

**الحل:**

**اثبات ان $f$ دالة دورية:**

$D_f=\mathbb{R}$

$f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)$

$=\cos x$

$=f(x)$

$f(x+2\pi)=f(x)$

اذن $f$ دالة دورية دورها $2\pi$.

يمكن دراسة $f$ على مجال طوله $2\pi$ ولكن $[-\pi;\pi]$

**دراسة شفعية $f$:**

• $D_f$ متناظر بالنسبة لـ $0$

$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$

$f$ دالة زوجية.

اذن يمكن اقتصار المجال $[-\pi,\pi]$ بالمجال $[0,\pi]$

**دراسة اتجاه تغير $f$ على المجال $[0,\pi]$**

$x_1<x_2 \Leftarrow \cos x_1>\cos x_2$

$\Leftarrow f(x_1)>f(x_2)$

$f$ متناقصة تماما على $[0,\pi]$

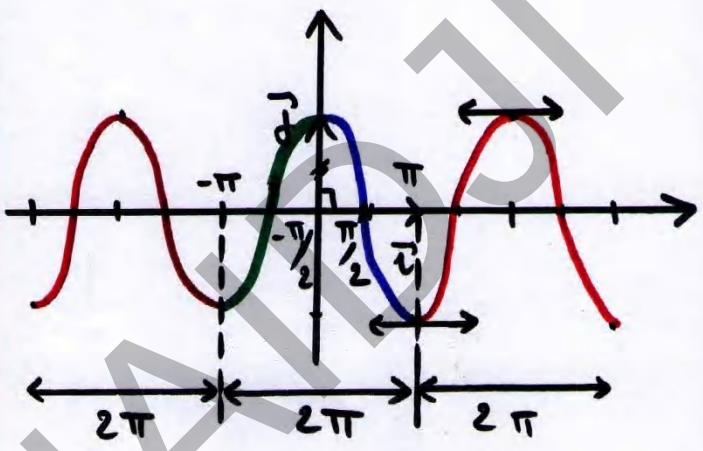
**جدول تغيرات $f$:**

| $x$ | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | ↗ $1$ | | ↘ $-1$ | |

ADEL MAIDJI

## إنشاء $(C_f)$:

- باستعمال جدول التغيرات، ننشئ $(C_f)$ على المجال $[0;\pi]$
- نناظر بالنسبة لمحور التراتيب
- نسحب $(C_f)$ يمينا وشمالا بالشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}2\pi\\0\end{pmatrix}$




## ٨٥/ محور التناظر:

اثبت أن $x=\alpha$ : $(\Delta)$ محور تناظر لـ $(C_f)$ $\Leftarrow$ 3 طرق.

### طريقة ①:

- لكل $x$ من $D_f$ فإن $(2\alpha-x)\in D_f$
- $f(2\alpha-x)=f(x)$

### طريقة ②:

- لكل $\alpha-x$ من $D_f$ فإن $(\alpha+x)\in D_f$
- $f(\alpha-x)=f(\alpha+x)$

## طريقة 3 "دساتير تغيير المعلم"

- نغير المعلم من $(x;y)$ إلى $(X;Y)$ كمايلي

$$\begin{cases} x = X+\alpha \\ y = Y \end{cases}$$

- انطلاقا من عبارة $y=f(x)$ و بتعويض $x$ بقيمة و $y$ بقيمة نجد عبارة $Y$ بدلالة $X$

$$Y=g(X)$$

- نبين أن $g$ دالة زوجية.

### مثال:

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$f(x)=x^2+4x+3$$

اثبت أن $(C_f)$ يقبل محور تناظر $(\Delta): x=-2$

### طريقة ①:

$D_f=\mathbb{R}$، لكل $x$ من $D_f$ فإن $(2\alpha-x)\in D_f$

قبل اجراء الحسابات، نغير شكل $f(x)$

$$f(x)=(x+2)^2-1$$

$$f(2\alpha-x)=f(-4-x)$$
$$=[-4-x+2]^2-1$$
$$=(-x-2)^2-1$$

ADEL-NAIDJI

## طريقة ②:

* $D_f = \mathbb{R}$ بمعنى لكل $x$ من $D_f$ $-2+x$
فإن $-2-x$ ينتمي لـ $D_f$

* اثبات أن $f(-2+x) = f(-2-x)$

$f(-2+x) = (-2+x+2)^2 - 1$

$= x^2 - 1$

$f(-2-x) = (-2-x+2)^2 - 1$

$= (-x)^2 - 1$

$= x^2 - 1$

إذن $f(-2+x) = f(-2-x)$

و $(\Delta): y = 2$ محور تناظر لـ $(C_f)$.

## طريقة ③:

* تغيير المعلم

$$\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y \end{cases}$$

$y = x^2 + 4x + 3$

$Y = (X-2)^2 + 4(X-2) + 3$

$Y = X^2 + 4 - 4X + 4X - 8 + 3$

$Y = X^2 - 1$

$g(X) = X^2 - 1$

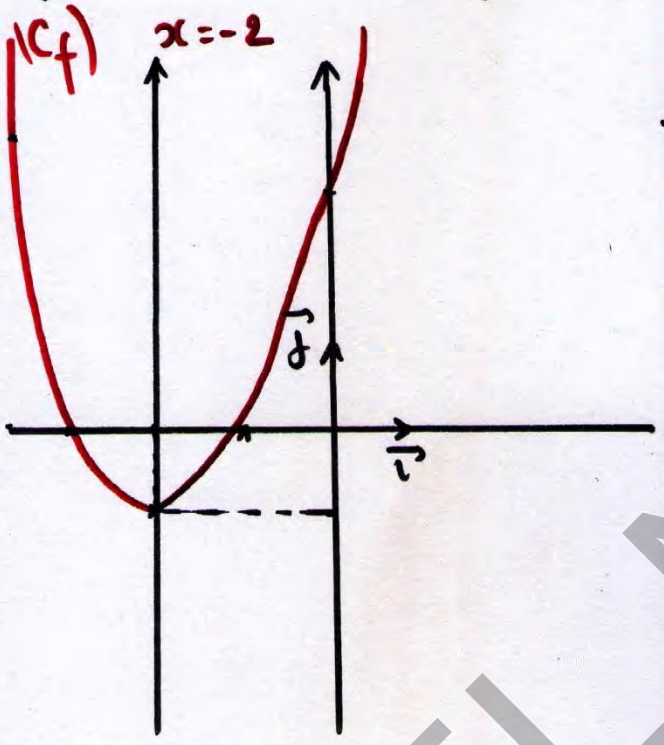
نبين أن $g$ زوجية

$D_g = \mathbb{R}$ متناظر بالنسبة لـ $0$

$g(-X) = (-X)^2 - 1 = X^2 - 1 = g(X)$

$g$ دالة زوجية

* إذن $(\Delta): y = -2$ محور تناظر لـ $(C_f)$.




**ملاحظة:**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ تحقق

$f(4-x) = f(x)$ 2a

ماذا نستنتج؟

نستنتج أن المستقيم $(\Delta): x = 2$
محور تناظر لـ $(C_f)$

ADEL NADJI

## 11/ مركز التناظر:

اثبت أن النقطة $\omega(\alpha,\beta)$ مركز تناظر لـ $(C_f)$ $\Leftarrow$ 3 طرق

**طريقة ①:**

لكل $x$ من $D_f$ فإن $(2\alpha-x)\in D_f$

$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

**طريقة ②:**

لكل $\alpha-x$ من $D_f$ فإن $(\alpha+x)\in D_f$

$f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$

**طريقة ③ "دساتير تغيير المعلم"**

نغير المعلم من $(x,y)$ الى $(X,Y)$ كما يلي

$$\begin{cases} x = X+\alpha \\ y = Y+\beta \end{cases}$$

انطلاقا من عبارة $y=f(x)$، نعوض $x$ و $y$ بقيمتيهما

نجد عبارة $Y$ بدلالة $X$ ثم نبين أن $g$ حيث $g(X)=Y$ هي دالة فردية

**مثال:**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x+2}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$$

اثبت أن $\omega(-1,1)$ مركز تناظر لـ $(C_f)$

**طريقة ①:**

لاثبات انه من اجل كل $x$ من $D_f$ فإن $-2-x$ ينتمي لـ $D_f$.

نستعمل البرهان بالعكس النقيض للاستلزام

$\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ معناه $P\Rightarrow Q$

لكل $P$ و $Q$ حيث.

$P: -2-x\notin D_f$

$Q: x\notin D_f$

$P$ محققة، معناه $-2+x\notin D_f$

$(-2-x)+1=0 \Leftarrow$

$-x-1=0 \Leftarrow$

$x=-1 \Leftarrow$

$x\notin D_f \Leftarrow$

$Q$ محققة $\Leftarrow$

$\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ معناه $P\Rightarrow Q$

أي

$x\in D_f$ يستلزم $-2-x\in D_f$

وهذا هو المطلوب.

ADEL MADJI

نثبت الآن أن:

$f(-2-x)+f(x)=2$ ??

$f(-2-x)+f(x)=$

$=1+\frac{1}{-2-x+1}+1+\frac{1}{x+1}$

$=2+\frac{1}{-x-1}+\frac{1}{x+1}$

$=2-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=2$

$f(-2-x)+f(x)=2$

اذن $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ $(C_f)$

**طريقة ②:**

. لكل $x$ من $D_f$ فان $-2-x$ من $D_f$

. نبين أن $f(-2-x)+f(-1+x)=2$

$f(-1-x)+f(-1+x)=$

$=1+\frac{1}{-1-x+1}+1+\frac{1}{-1+x+1}$

$=1-\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x}=2$

$f(-1-x)+f(-1+x)=2$

اذن $\omega(-1;1)$ مركز تناظر لـ $(C_f)$

**طريقة ③:**

تغيير المعلم

$\begin{cases} x=X-1 \\ y=Y+1 \end{cases}$

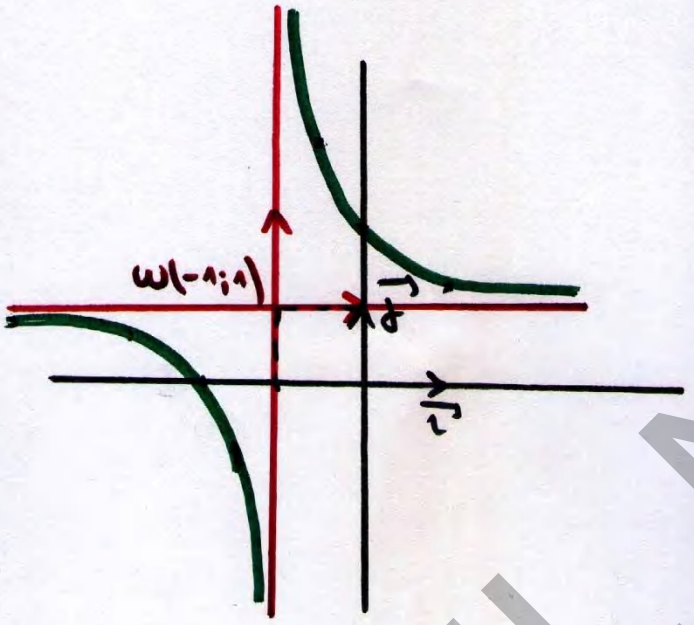
$Y+1=1+\frac{1}{X-1+1}$

$Y=\frac{1}{X}$

$g(X)=\frac{1}{X}$

g دالة فردية

اذن $\omega(-1;1)$ مركز تناظر $(C_f)$




**ملاحظة:**

f تحقق

$f(\underbrace{-1-x}_{\alpha})+f(\underbrace{-1+x}_{\alpha})=\underbrace{2}_{2\beta}$

أو $f(\underbrace{-2-x}_{2\alpha})+f(x)=\underbrace{2}_{2\beta}$

ماذا نستنتج؟

النقطة $\omega(\frac{-2}{2};\frac{2}{2})$ أي $\omega(-1;1)$

مركز تناظر لـ $(C_f)$

ABDELMAIDJI

## 12/ نقط التقاطع مع $(xx')$ و$(yy')$:

### أ/ تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل

* نحل المعادلة $f(x)=0$ ثم نتأكد هل الحلول تنتمي إلى $D_f$

مثال:

$D_f=\mathbb{R}$ , $f(x)=x^2-2$

$f(x)=0$ معناه $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{cases}$

$(C_f)$ يقطع $(xx')$ في نقطتين

$(\sqrt{2};0)$ / $(-\sqrt{2};0)$

* باستعمال نظرية القيم المتوسطة
(Voir Apres)

### ب/ تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب:

* نقطة واحدة على الأكثر $(0;f(0))$

مثال:

$D_f=\mathbb{R}$ ; $f(x)=x^2-2$

$f(0)=-2$

$(C_f)$ يقطع $(yy')$ في النقطة:

$(0;-2)$

### ج/ تقاطع $(C_f)$ مع $(C_g)$:

* نحل المعادلة $f(x)=g(x)$
* نجد قيم $x$ الممكنة
* لإيجاد $y$ نعوض في أسهل العبارتين

### د/ تقاطع $(C_f)$ مع $(D): y=ax+b$

* نحل المعادلة $f(x)=ax+b$
* نجد قيم $x$ الممكنة
* لإيجاد $y$ نعوض في أسهل العبارتين.

## 13/ إشارة دالة:

### أ/ حسابيا:

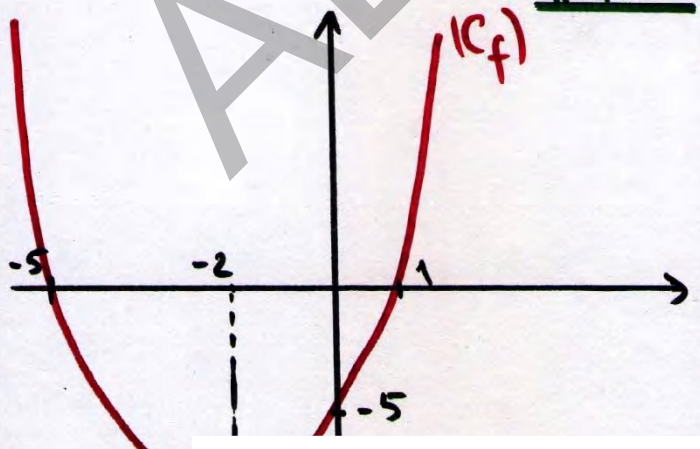
حل متراجحات $f(x)<0$ / $f(x)>0$

مثال:

$f(x)=x^2+4x-5$

| $x$ | $-\infty$ | $-5$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

### ب/ بيانيا:




ADEL NIADJI

$f(x) > 0 \Leftrightarrow (C_f)$ فوق $(x'x)$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow (C_f)$ تحت $(x'x)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقطع $(x'x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | |

## ج/ باستعمال جدول التغيرات :

جدول تغيرات f:

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-9$ | $+$ | $0$ | $-$ | $+\infty$ |

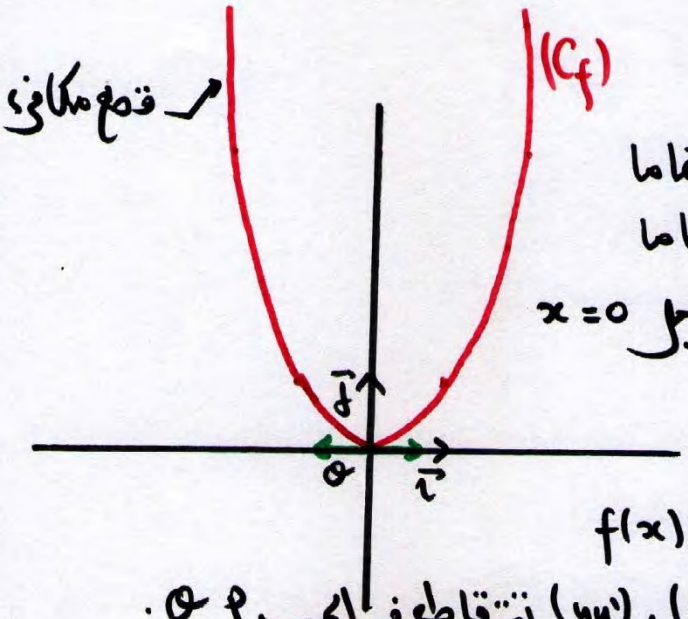
استنتاج جدول اشارة f

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | |

ADEL NAIDJI

# الدوال المرجعية

## 1/ الدالة مربع: $f(x)=x^2$




← مجموعة التعريف: $D_f=\mathbb{R}$

← اتجاه التغير: $]-\infty,0[$ : متناقصة تماما

$]0,+\infty[$ : متزايدة تماما

← قيمة حدية معنى: 0 تبلغها f من أجل $x=0$

← شفعية الدالة: زوجية:

← محور التناظر: محور التراتيب

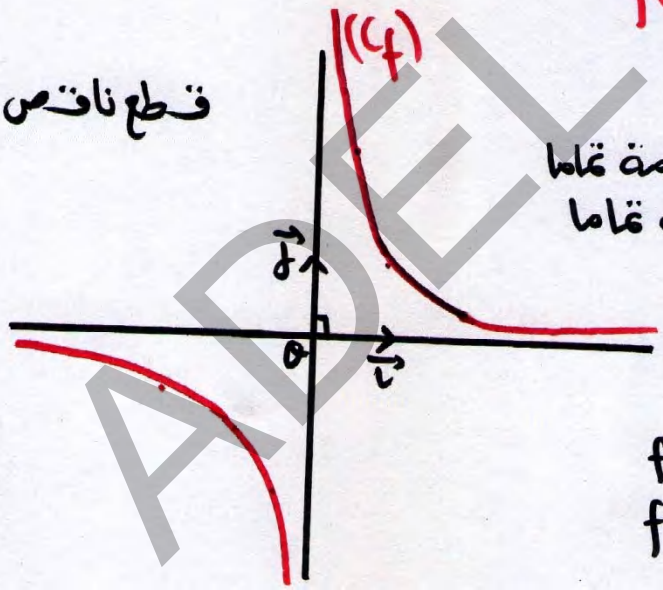
← إشارة الدالة: $\forall x\in\mathbb{R}$ : $f(x)\geqslant 0$

← التقاطع مع المحاور: $(C_f)$, $(xx')$, $(yy')$ تتقاطع في المبدأ O.

← جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

## 2/ الدالة مقلوب $f(x)=\frac{1}{x}$




← مجموعة التعريف $D_f=\mathbb{R}^*$

← اتجاه التغير: $]-\infty,0[$ : متناقصة تماما

$]0,+\infty[$ : متناقصة تماما

← شفعية الدالة: فردية

← مركز التناظر: المبدأ $O(0,0)$

← إشارة الدالة: $x<0$ : $f(x)<0$

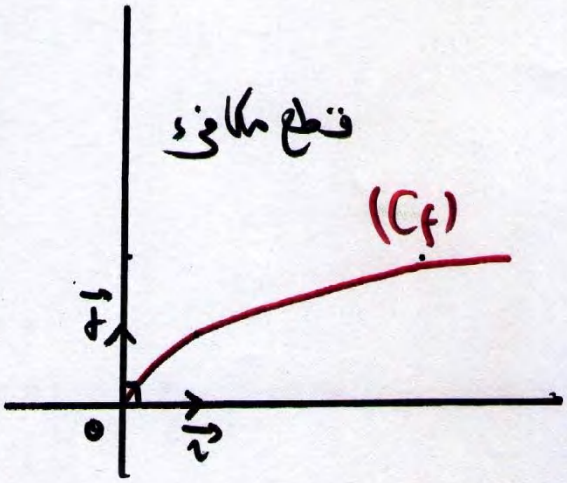
$x>0$ : $f(x)>0$

← جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $\|\|$ | ↘ | |

ABDELNAIDJI

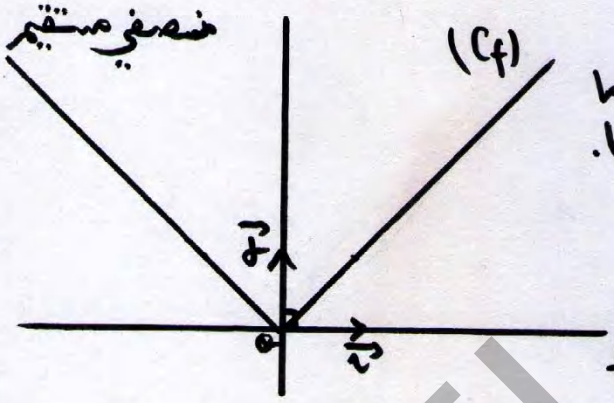
## 3/ الدالة الجذر التربيعي $f(x)=\sqrt{x}$




- مجموعة التعريف $D_f=[0,+\infty[$
- اتجاه التغير: متزايدة تماما
- اشارة الدالة: $\forall x \geq 0 : f(x) \geq 0$
- التقاطع مع المحاور: $(C_f)$, $(xx')$, $(yy')$ تتقاطع في $O$.
- جدول التغيرات:

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

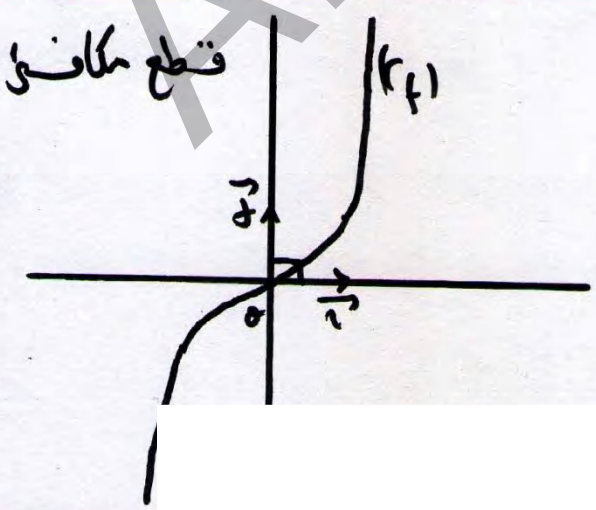
## 4/ الدالة قيمة مطلقة: $f(x)=|x|$




- مجموعة التعريف: $D_f=\mathbb{R}$
- اتجاه التغير: $]-\infty,0]$ : متناقصة تماما
  $[0,+\infty[$ : متزايدة تماما.
- شفعية الدالة: زوجية.
- محور التناظر: محور التراتيب
- اشارة الدالة: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$
- التقاطع مع المحاور: $(C_f)$, $(xx')$, $(yy')$ تتقاطع في $O$.
- جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ | ↗ $+\infty$ |

## 5/ الدالة مكعب $f(x)=x^3$




- مجموعة التعريف $D_f=\mathbb{R}$
- اتجاه التغير: متزايدة تماما.
- نقطة انعطاف: المبدأ $O(0,0)$
- شفعية الدالة: فردية
- محور التناظر: المبدأ $O(0,0)$

ADEL NADJI

← التقاطع مع المحاور : $(C_f)$ , $(xx')$ , $(yy')$ تتقاطع في المبدأ O.

← جدول التغيرات:

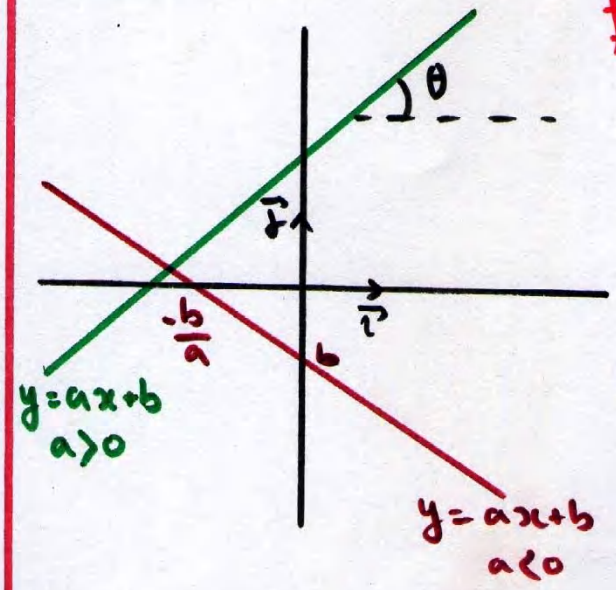
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f(x) | $-\infty$ ↗ | 0 | ↗ $+\infty$ |

## 6/ الدالة التآلفية $f(x) = y = ax+b$

← مجموعة التعريف $D_f = \mathbb{R}$

← اتجاه التغير: $a = tg\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

- $a>0$: دالة متزايدة تماما
- $a<0$: دالة متناقصة تماما
- $a=0$: دالة ثابتة

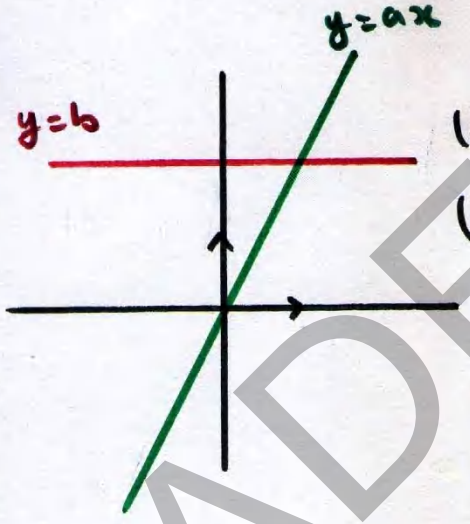



← اشارة الدالة:

- $a\neq 0$:

| x | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f(x) | عكس اشارة a | 0 | نفس اشارة a |

- $a=0$: $f(x)=b$ بما ⊕ دوما أو ⊖ دوما




← التقاطع مع المحاور:

$(C_f) \cap (xx') = \left\{\left(-\frac{b}{a};0\right)\right\}$

$(C_f) \cap (yy') = \{(0;b)\}$

← حالات خاصة:

- $b=0$: $(C_f)$ يمر بالمبدأ O.
- $a=0$: $(C_f)$ مستقيم يوازي محور الفواصل

**ملاحظة:**

- كل دالة تآلفية تمثل بمستقيم لكن ليس كل مستقيم هو تمثيل بياني لدالة.
- $(D): x=a$ مستقيم يوازي محور الفواصل لا يمكن أن يمثل دالة




ADEL-MAIDJI

# النهايات

ADEL NAIDJI

# "النهايات"

## 1/ مفهوم النهاية:

* $x$ يؤول الى 2 ( $x$ ينتهي عند 2 ) معناه $x$ يأخذ قيم مجاورة جدا للعدد 2

$$\begin{cases} x = 2 + \varepsilon \\ x = 2 - \varepsilon \end{cases} \quad , \varepsilon \to 0^+$$

* نكتب $x \to 2$ ونميز حالتين

$x \to 2$ ← $x \to 2^+$ (اليمين) أي $x = 2 + \varepsilon$

$x \to 2$ ← $x \to 2^-$ (اليسار) أي $x = 2 - \varepsilon$

* مثال: $f(x) = \frac{x+4}{x+2}$

لما $x \to 2$ فإن $f(x) \to \frac{3}{2}$

نكتب $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{3}{2}$

$x$ ← $+\infty$ ، $-\infty$ ، $a$ ، $0$

## 2/ عمليات على النهايات:

### نهاية مجموع دالتين:

| $f$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $+\infty$ | $a$ | $-\infty$ | $a$ | $a'$ | $-\infty$ |
| $f+g$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $a+a'$ | ح.ع.ت |

### نهاية جداء دالتين:

| $f$ | $\infty$ | $\infty$ | $a$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $g$ | $\infty$ | $a \neq 0$ | $a'$ | $0$ |
| $f \times g$ | $\infty$ (الاشارة) | $\infty$ (الاشارة) | $a \cdot a'$ | ح.ع.ت |

### نهاية حاصل قسمة:

| $f$ | $\infty$ | $a \neq 0$ | $a \neq 0$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $g$ | $a \neq 0$ | $\infty$ | $a' \neq 0$ | $\infty$ |
| $f/g$ | $\infty$ (الاشارة) | $0$ (الاشارة) | $\frac{a}{a'}$ | ح.ع.ت |

| $f$ | $\infty$ | $0$ | $a \neq 0$ | $0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $0$ | $\infty$ | $0$ | $a \neq 0$ | $0$ |
| $f/g$ | $\infty$ الاشارة | $0$ | $\infty$ | $0$ | ح.ع.ت |

ADEL NAIDJI

$(+\infty)^n \to +\infty$ $\quad (-\infty)^n$

$\sqrt{+\infty} \to +\infty$ $\quad n=2k+1 \quad (-\infty)$ $\quad n=2k \quad (+\infty)$

$\sqrt{-\infty}$ X

## 3/ قواعد هامة:

1● $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty \\ x \to a}} (k) = k$

2● $\lim k \cdot f(x) = k \cdot \lim f(x)$

3● $\lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim f(x)}$

4● $\lim |f(x)| =$ يجب التخلص من رمز (||) ثم فصل الحالات

5● $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

* a لا يمثل حدا من حدود $D_f$ المفتوحة
* f لا تغير عبارتها عند a

6● أثناء دراسة دالة، نحسب النهايات بصفة عامة عند حدود $D_f$ المفتوحة

مثال $D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

يجب حساب 4 نهايات

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim f(x)$ $\quad \lim f(x)$

7● في نهاية حاصل قسمة، 0 قد يكون $0^+$ أو $0^-$ لذا يجب تحديد إشارته أثناء الدراسة.

8● إذا قبلت دالة نهاية فهي وحيدة

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

9● في بعض الأحيان f لا تقبل نهاية:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ←

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ / $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$ ←

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-1)^x$ ←

### أمثلة:

احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x \to 0} (2x+3) = 3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-4x+\sqrt{2}) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-4x+\sqrt{2}) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{3} = \sqrt{3}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2(x+3)^2 = 2\lim\limits_{x \to -\infty} (x+3)^2 = +\infty$

ADEL NADJI

## 4/ متى نلجأ إلى دراسة $\lim_{x \to a} f(x)$ و $\lim_{x \to a} f(x)$

- $a$ يمثل حدا من حدود $D_f$ المفتوحة
- $f$ تغير عبارتها عند $a$
- في حالة وجود قيمة مطلقة ونريد التخلص منها.

* نحسب $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = l'$

← إذا كان $l = l'$ فإن $f$ تقبل نهاية عند $a$ ونكتب

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

← إذا كان $l \neq l'$ فإن $f$ لا تقبل نهاية عند $a$، بل تقبل نهاية على يمين $a$ ونهاية أخرى على يساره ونكتب

$$\begin{cases} \lim_{x \to a^+} f(x) = l \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = l' \end{cases}$$

**ملاحظة:**

* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ندرس فقط $D = ]a; +\infty[$
* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ ندرس فقط $D = ]-\infty; a[$

**مثال:**

$$f(x) = \frac{1}{-x+2}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = +\infty$$

إشارة المقام $(0)$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x+2$ | | $+$ | $0^+$ | $-$ | |

**ملاحظة:**

* قيما صغيرة لا تعني $0^-$
* قيما كبيرة لا تعني $0^+$
* يجب وضع جدول الإشارة لمعرفة إشارة $0$

ABDELNAIDJI

## مثال ②:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x} & ]-\infty,0[ \\ f(x)=2x & [0,+\infty[ \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{1}{-0}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

## مثال 3:

$$f(x)=|2x+2|$$

$$\begin{cases} f(x)=-2x-2 & ]-\infty;-1] \\ f(x)=2x+2 & [-1;+\infty[ \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ عبارة ①

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ عبارة ②

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=0$ عبارة ①

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=0$ عبارة ②

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=2$ عبارة ②

## 5/ طرق ازالة ح.غ.ت:

### 4 حالات غ.ت

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{\infty}{\infty}$ | $\frac{0}{0}$ | $0^0$ $1^\infty$ |
| $0\times\infty$ | $+\infty-\infty$ | |

نعوض

- نتيجة.
- ح.غ.ت ← ازالة ح.غ.ت

### أ/ دالة كثير حدود

$f(x)=2x^2-x+3$

$g(x)=(2x+3)(x^2-1)$

احسب نهايات f و g عند $-\infty, +\infty, 2$

**عند عدد:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=9$

$\lim\limits_{x\to 2} g(x)=21$

**عند ∞:**

* نهاية دالة كثير حدود عند ∞ هي نهاية الحد الأعلى درجة عند ∞ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim(2x^2)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f($

ADEL NAIDJI

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x^3) = -\infty$$

## ب/ دالة ناطقة

$$f(x) = \frac{x^2+4x+1}{-x+2}$$

$$g(x) = \frac{x^2+x-2}{x^3-4x^2+3}$$

احسب نهاية f و g عند $-\infty, +\infty$

$$\lim_{x\to1} g(x) \quad , \quad \lim_{x\to2} f(x)$$

**عند $\infty$:**

* نهاية دالة ناطقة عند $\infty$ هي نهاية الحد الأعلى درجة على الحد الأعلى درجة (بعد الاختزال) عند $\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{-x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

**عند 2:**

$$\lim_{x\to2} f(x) = \frac{9}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty \quad \frac{9|3}{0^+}$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty \quad \frac{9|3}{0^-}$$

$$\lim_{x\to1} g(x) \quad \text{ح ع ت} \quad \frac{0}{0}$$

* يجب اظهار $(x-1)$ في كل من البسط و المقام بتحليلهما باحدى الطرق الثلاث ثم الاختزال

$$\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2-3x-3)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{x+2}{x^2-3x-3} = \frac{-3}{5}$$

## ج/ دالة مماثلة خطية

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} + 2x - 3$$

$$g(x) = \sqrt{4x^2-4} - 2x + 3$$

احسب

* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
* $\lim_{x\to+\infty} g(x)$
* $\lim_{x\to0} f(x)$
* $\lim_{x\to0} g(x)$

ADEL NAIDJI

• عند a :

نعوض

$\lim_{x \to 0} f(x) = \sqrt{2} - 3$

$\lim_{x \to 2} g(x) = 2\sqrt{3} - 1$

• عند $\infty$:

الحدين الأكثر تأثيرا ⇓ مجموعهما يساوي 0 ⇓ التحليل

الحدين الأكثر تأثيرا ⇓ مجموعهما ≠ 0 ⇓ المرافق

* طريقة التحليل:

$f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} + 2x - 3$

$(x \to -\infty)\ \sqrt{x^2} = |x| = -x \quad 2x$

$-x + 2x \neq 0$

← نشتغل التحليل كما يلي

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2x+2} + 2x - 3$

$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + x\left(2 - \frac{3}{x}\right)$

$= \lim_{x \to -\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x\left(2 - \frac{3}{x}\right)$

$= \lim_{x \to -\infty} -x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x\left(2 - \frac{3}{x}\right)$

$= \lim_{x \to -\infty} x\left(2 - \frac{3}{x} - \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)$

$2 - 1 = 1$

$= -\infty$

* طريقة المرافق:

$g(x) = \sqrt{4x^2-4} - 2x + 3$

$(x \to +\infty)\ \sqrt{4x^2} = 2x \quad -2x$

$2x - 2x = 0$

← نشتغل طريقة المرافق كما يلي

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2-4} - (2x-3)$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-4} - 2x + 3\right)\left(\sqrt{4x^2-4} + 2x - 3\right)}{\sqrt{4x^2-4} + 2x - 3}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 4 - (2x-3)^2}{\sqrt{4x^2-4} + 2x - 3}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{12x - 13}{\sqrt{4x^2-4} + 2x - 3}$

ثم نطبق طريقة التحليل والاختزال

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(12 - \frac{13}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4 - \frac{4}{x^2}} + 2 - \frac{3}{x}\right)}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{12 - \frac{13}{x} \to 12}{\sqrt{4 - \frac{4}{x^2} \to 0} - \frac{3}{x} \to 0 + 2} = \frac{12}{4}$

$2 + 2 = 4$

$= 3$

ADEL NAIDJI

## د/ دالة كسرية

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

$$g(x)=\frac{2x-2}{\sqrt{x^2+3x+4}-2}$$

احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$

$\lim_{x\to +\infty} g(x)$

**عند a:**

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0}$ ح ع ت

يجب اظهار $(x-a)$ في كل من البسط والمقام ثم الاختزال.

- المرافق
- العدد المشتق

### طريقة المرافق:

$\sqrt{A}+B$ مرافقه $\sqrt{A}-B$

$\sqrt{A}+\sqrt{B}$ مرافقه $\sqrt{A}+\sqrt{B}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)}{x} \times \frac{(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

نختزل $x-a$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

### طريقة العدد المشتق:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = h'(0)$$

حيث $h(x)=\sqrt{x+4}$

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{0+4}} = \frac{1}{4}$$ ومنه

**عند ∞:**

### طريقة التحليل

نستخرج الحد الأكثر تأثير في البسط كعامل مشترك وكذلك في المقام ثم نختزل

NB: $x\to+\infty$ $|x|=x$

$x\to-\infty$ $|x|=-x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty}$$

$$=0$$

ABDELNAIDJI

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{\sqrt{x^2+3x-4}-2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}-\frac{2}{x}\right)} \quad 1 \quad 2$$

$$= 2$$

* **طريقة المرافق:**

تصلح أحيانا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = 0$$

## هـ / دالة مثلثية:

* **برهنات الحصر والمقارنة:**

① إذا كان $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

$$\lim_{x\to \begin{matrix}+\infty\\-\infty\\a\end{matrix}} g(x) = \lim_{x\to \begin{matrix}+\infty\\-\infty\\a\end{matrix}} h(x) = \ell$$

فإن $\lim\limits_{x\to \begin{matrix}+\infty\\-\infty\\a\end{matrix}} f(x) = \ell$

② $\lim f(x) = +\infty \Leftarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim g(x) = +\infty \end{cases}$

③ $\lim f(x) = -\infty \Leftarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim g(x) = -\infty \end{cases}$

مثال: احسب

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$x \to +\infty$ أي $x > 0$ أي $\frac{1}{x} > 0$

نضرب في $\frac{1}{x}$ ونحافظ على اتجاه المتراجحة

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$x \to +\infty$ $\quad -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

* **باستعمال العدد المشتق:**

احسب $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 0}{x-0} = (\sin x)'\Big|_{x=0}$$

$$= \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

* **نهايات شهيرة:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{} = \frac{1}{}$$

$1-$

ADEL NAIDJI

## * تبديل المتغير:

* تبديل المتغير وارجاعه ليؤول إلى 0
* الضرب والقسمة في أعداد لاظهار نهايات شهيرة.

أمثلة:

① احسب $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}{\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \times \left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)} \times \frac{2x}{\frac{x}{4}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

② احسب $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\tan x$

نضع $t = x - \frac{\pi}{2}$ $\quad (x = t + \frac{\pi}{2})$ $\quad t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} (\pi - 2t - \pi)\tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} -2t \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} -2t \frac{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0} -2t \frac{\cos t}{-\sin t}$$

$$= \lim_{t\to 0} 2\cos t \cdot \frac{1}{\frac{\sin t}{t}}$$

$$= 2$$

## * باستعمال العدد المشتق مرتين:

احسب $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1}$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{(\sin 3x) - 0}{x - \pi/3}}{\frac{(2\cos x - 1)}{x - \frac{\pi}{3}}}$$

$$= \frac{(\sin 3x)'}{(2\cos x - 1)'}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{3\cos 3x}{-2\sin x}$$

$$= \frac{3x - 1}{-x\frac{\sqrt{3}}{x}} = \sqrt{3}$$

## * ملاحظة:

في النهايات بصفة عامة باستعمال [illegible] يمكن تخمين النهاية

ABDELNADJI

# 4/ طريقة لوبيتال

hors programme

C'est pour verifier...

* إذا كان $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

ح.غ.ت $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

بتطبيق طريقة لوبيتال نجد

$$\lim_{x\to a} f(x)=\frac{g'(a)}{h'(a)}$$

* تصلح في جميع ح.غ.ت سواء دالة ناطقة، كسرية، مثلثية...

مثال:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-4x^2+3}=\left(\frac{2x+1}{3x^2-8x}\right)_{x=1}$$

$$=\frac{-3}{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right)_{x=0}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

ADEL NAIDJI

# السلوك التقاربي لمنحن دالة

ADEL NADJI

# "السلوك التقاربي لمنحنى دالة" "التفسير البياني للنهايات"

## أ/ المستقيمات المقاربة:

- عين م م لـ $(C_f)$ !
- تأكد أن $(D)$ م م لـ $(C_f)$ !
- احسب النهاية ثم فسر بيانيا النتيجة!

### ب/ المستقيم المقارب العمودي:

* عين، تأكد: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

$\Updownarrow$

* $(C_f)$ يقبل م م يوازي محور التراتيب معادلته $x = a$ وذلك عند $+\infty$ (أو $-\infty$)

• $a$ غالبا هي القيمة الممنوعة.

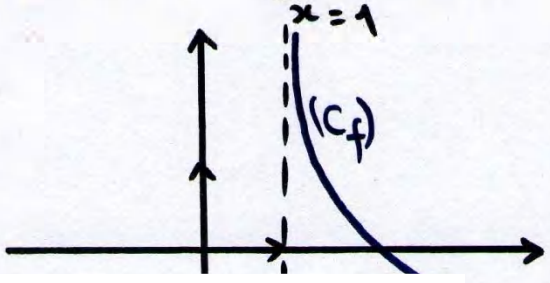
### ب/ المستقيم المقارب الأفقي:

* عين: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$

* تأكد: $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - a] = 0$ أو

$\Updownarrow$

* $(C_f)$ يقبل م م عند $+\infty$ ($-\infty$) يوازي محور الفواصل، معادلته $y = a$




### ج/ المستقيم المقارب المائل:

* تأكد أن $(D): y = ax + b$ م م مائل لـ $(C_f)$ عند $\pm\infty$

← نبين أن $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

---

* يمكن للطالب ملاحظة المرم بقوة الملاحظة، إذا كانت الدالة $f$ من الشكل

$f(x) = ax + b + g(x)$

نخمن أن $(D)$ $y = ax + b$ م م لـ $(C_f)$ عند $\pm\infty$ ثم نتأكد من ذلك.

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = \lim_{x \to \pm\infty} g(x)$$

$=$

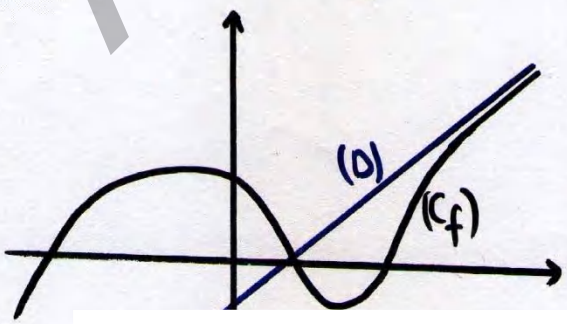
$\infty$ | $c$ | $0$

X | $(D): y = ax + b + c$ | $(D): y = ax + b$

---

* إذا كان $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = \infty$

$\Leftarrow$ احتمال وجود مستقيم م مائل.




ADEL NADJI

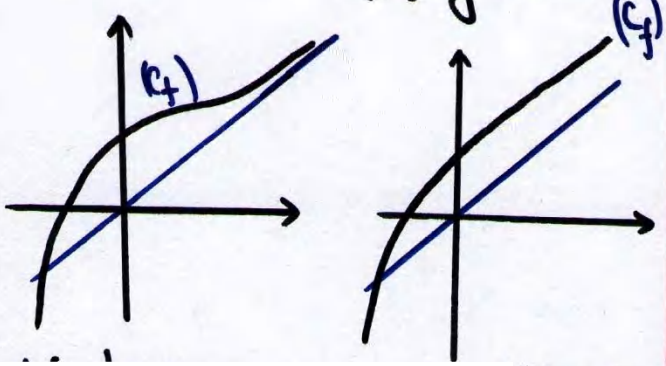
## البحث عن مم م باستعمال الفروع اللانهائية

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

احتمال وجود مم م

نحسب $\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x}\right]$

- $0$: $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا باتجاه $(D): y=0$ (محور الفواصل) — $f(x)=\sqrt{x}$
- $a \neq 0$: نحسب $\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax]$
  - $b$: $(C_f)$ يقبل مم م $(D): y=ax+b$
  - $\infty$: $(C_f)$ يقبل فرعا لانهائيا باتجاه المستقيم $(D): y=ax$
- $\infty$: $(C_f)$ يقبل فرعا لانهائيا باتجاه $(D): x=0$ (محور التراتيب) — $f(x)=x^2$




فرع لا

## د/ الوضع النسبي:

* المستقيم المقارب العمودي لا يقطع أبدا $(C_f)$
* المستقيم المقارب الأفقي و المائل يمكن أن يقطعا $(C_f)$ ← وضع نسبي
* لدراسة الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(D)$ حيث $(D): y=ax+b$، ندرس اشارة الفرق

$\theta(x) = f(x) - y$

$\theta(x) = f(x) - (ax+b)$

- $\theta(x) > 0$: $(C_f)$ فوق $(D)$
- $\theta(x) < 0$: $(C_f)$ تحت $(D)$
- $\theta(x) = 0$: $(D)$ يقطع $(C_f)$

ثم نلخص الدراسة في جدول

## هـ/ أمثلة:

* احسب النهايات، فسر بيانيا، ادرس $(C_f)$ والمستقيمات المقاربة في كل حالة:

$f(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$ / $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

الوضع النسبي + $f(x) = 2x+3 + \frac{1}{x}$

الوضع النسبي +، $f(x) = \frac{-2x^2+3x+2}{2x-1}$

$f(x) = \sqrt{x}$ / $f(x) = x^2$

ADEL NADJI

## مثال ① $f(x)=2+\frac{1}{x}$

$f(x)=2+\frac{1}{x}$

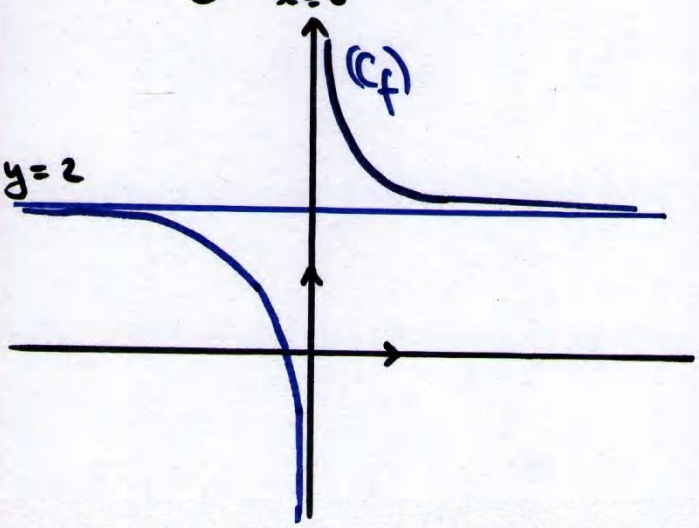
$D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ يقبل $(C_f)$ مم يوازي محور الفواصل عند $-\infty$ معادلته $y=2$

② $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ يقبل $(C_f)$ مم يوازي محور الفواصل عند $+\infty$ معادلته $y=2$

③ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ يقبل $(C_f)$ مم يوازي محور الفواصل عند $-\infty$ معادلته $x=0$

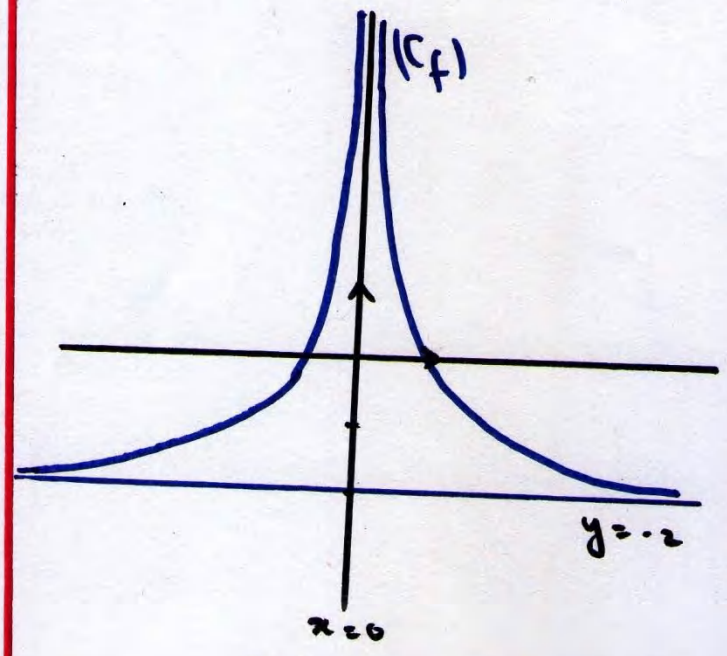
④ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ يقبل $(C_f)$ مم يوازي محور الفواصل عند $+\infty$ معادلته $x=0$ (حامل محور الفواصل)




## مثال ② $f(x)=-2+\frac{1}{x^2}$

المستقيمات المقاربة معادلاتها

$y=-2$ / $x=0$




## مثال ③ $f(x)=2x+1+\frac{1}{x}$

$x=0$

$(C_f)$ مم لـ $(D):y=ax+b$ نتحقق أن

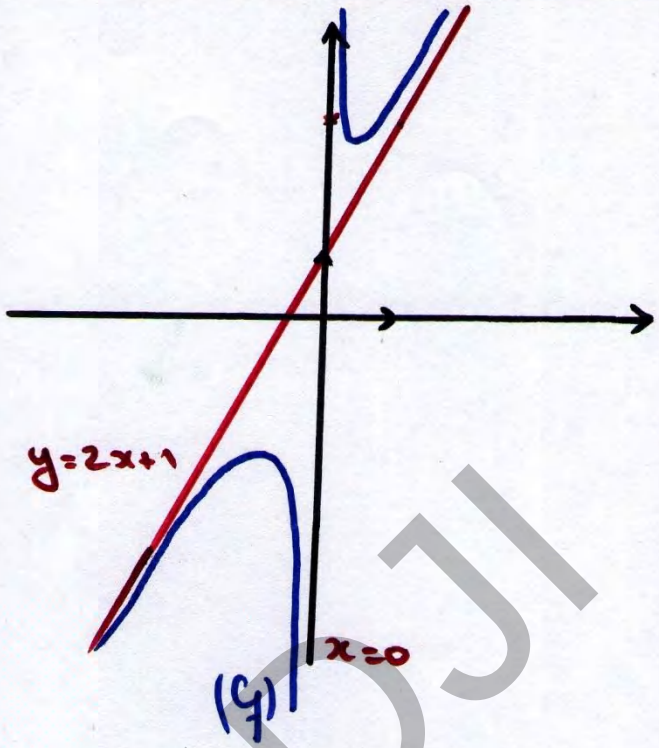
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(2x+1)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$

الوضع النسبي:

$\theta(x)=f(x)-y=\frac{1}{x}$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\theta(x)$ | $-$ | ‖ | $+$ |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | ‖ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |

ADEL NAIDJI




مثال ③ $f(x)=\frac{-2x^2+3x+2}{2x-1}$

$D_f=]-\infty,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$

$x=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

احتمال وجود فرع

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=-1$

$\lim_{x\to\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2x-1}$

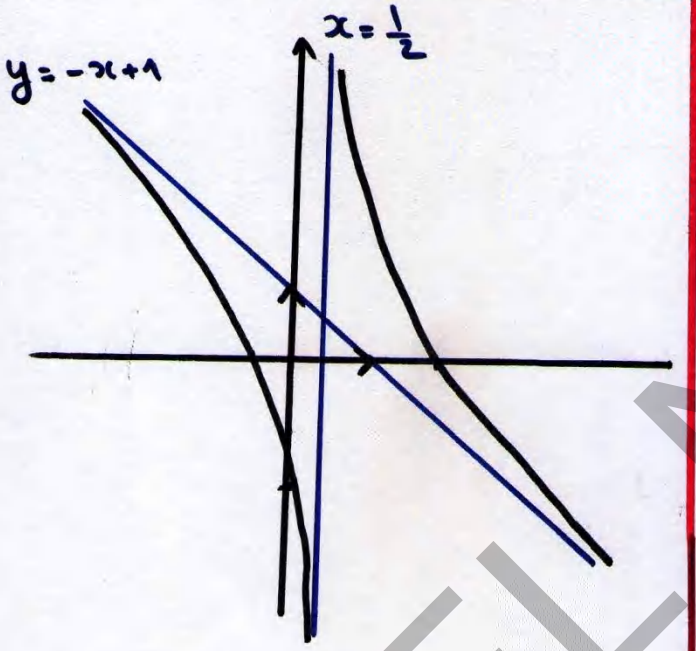
$=1$

اذن $(D):y=-x+1$ مقارب لـ $(C_f)$ عند $+\infty$ و $-\infty$

الوضع النسبي

$\theta(x)=f(x)-(-x+1)=\frac{3}{2x-1}$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\theta(x)$ | $-$ | $+$ | |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ تحت $(D)$ | | $(C_f)$ فوق $(D)$ |




مثال ④ $f(x)=x^2$

$D_f=]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

احتمال وجود فرع

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=\infty$

$(C_f)$ يقبل فرعا كافئيا عند $\infty+$ باتجاه $x=0$



مثال ⑤ $f(x)=\sqrt{x}$

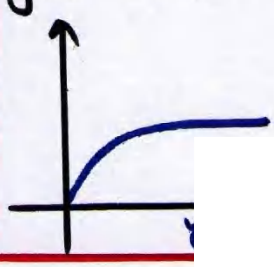
$D_f=[0;+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

احتمال وجود فرع

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$

$(C_f)$ يقبل فرعا كافئيا عند $\infty+$ باتجاه $y=0$



ADEL NAIDJI

## هـ/ استنتاج مستقيم مقارب مائل آخر باستعمال شفعية دالة

$$f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) ; D_f=\mathbb{R}$$

1. تأكد أن $(d):y=x+1$ مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ عند $+\infty$

2. استنتج دون حساب أن $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب $(d')$ عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته.

الحل:

1/ نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$

2/ استنتاج $(d')$

نلاحظ أن $f$ دالة فردية

نضع $t=-x$ ($x\to+\infty$ معناه $t\to-\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x-1\right]=0$

بما أن $f$ فردية $f(x)=-f(-x)$

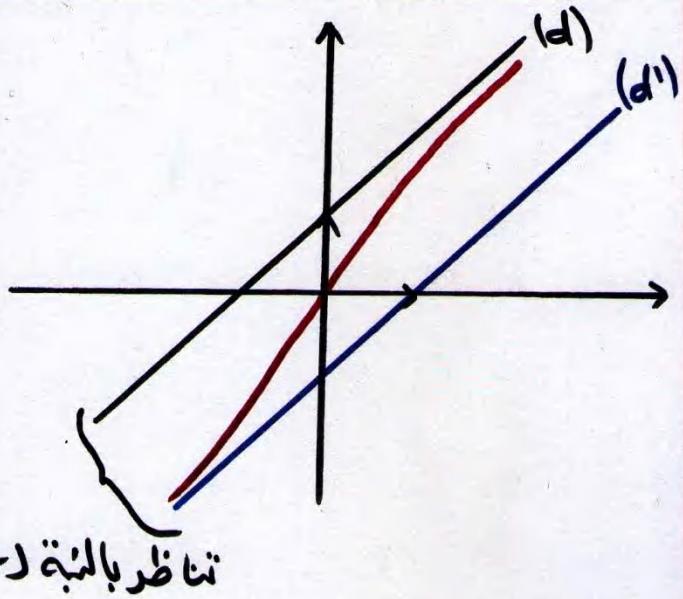
أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-f(-x)-x-1\right]=0$

$\lim\limits_{t\to-\infty}\left[-f(t)+t-1\right]=0$

$\lim\limits_{t\to-\infty}\left[f(t)-t+1\right]=0$

$\lim\limits_{t\to-\infty}\left[f(t)-(t-1)\right]=0$

إذن $(d'):y=x-1$




تناظر بالنسبة لـ $(\Delta)$

## 4/ المنحنيات المتقاربة:

- يبين أن منحنى الدالة $g$ منحنى مقارب لـ $(C_f)$ عند $\infty$!

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=0$$

$\Updownarrow$ تفسير بياني:

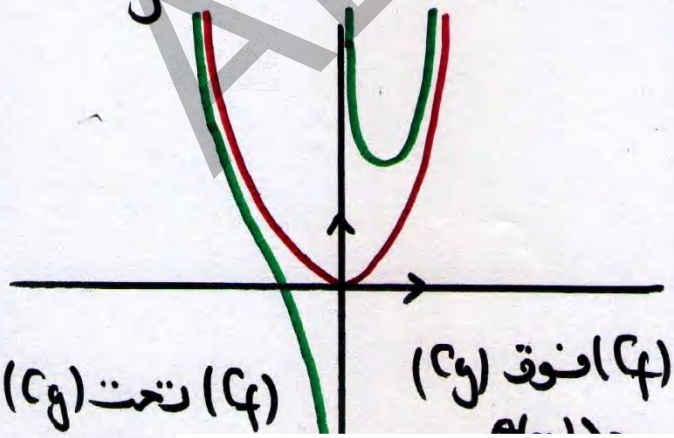
$(C_g)$ منحنى مقارب لـ $(C_f)$ عند $\infty$!

مثال: $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-x^2\right]=0$

$(C_g)$ منحنى مقارب لـ $(C_f)$ عند $\infty$!

بحيث $g(x)=x^2$



$(C_f)$ تحت $(C_g)$ $\theta(x)$

$(C_f)$ فوق $(C_g)$

ADEL NAIDJI

# الاستمرارية

ADEL NADJI

# الاستمرارية

## I/ استمرارية الدالة f عند عدد a:

* f دالة معرفة على $D_f$
* a عدد ينتمي إلى $D_f$ (غير معزول، له جوار)

$D_f$ يتمل a ($D_f$ ليس حالة a) ← 1
$[a;+\infty[$ ← 2
$]-\infty,a]$ ← 3
$]-\infty,a] \cup [a,+\infty[$ ← 4

f تغير عبارتها عند العدد a

سؤال: ادرس استمرارية الدالة f عند a.

**1/ $D_f$ يتمل a ($D_f$ ليس حالة a)**

f مستمرة عند العدد a

$\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

**2/ $D_f = [a,+\infty[$**

* f ليست مستمرة عند a.

* دراسة استمرارية f على يمين a:

f مستمرة على يمين العدد a

$\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

**3/ $D_f = ]-\infty,a]$**

* f ليست مستمرة عند العدد a.

* دراسة استمرارية f على يسار العدد a:

f مستمرة على يسار العدد a

$\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

**4/ f ($D_f = ]-\infty,a] \cup [a,+\infty[$) تغير عبارتها عند العدد a**

* دراسة استمرارية f على يمين a:

f مستمرة على يمين a

$\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

* دراسة استمرارية f على يسار a:

f مستمرة على يسار a

$\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

* دراسة استمرارية f عند العدد a:

f مستمرة عند العدد a

$\Leftrightarrow$

f مستمرة على يمين a ← 1
f مستمرة على يسار a. ← 2
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ ← 3

ADEL-NADJI

مثال:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & ]-\infty,0[ \\ x & [0;+\infty[ \end{cases}$$

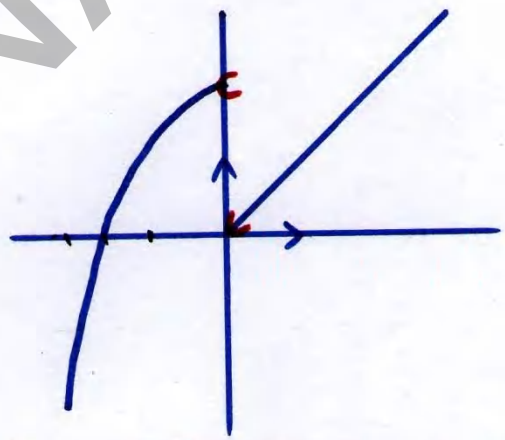
* هل الدالة f مستمرة عند 0 ؟

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (-x^2+2) = 2$

$f(0)=0$

* f ليست مستمرة على يساره
* f مستمرة على يمين 0
* f ليست مستمرة عند 0



## 2/ استمرارية الدالة f على مجال I:

بين أن الدالة f مستمرة على المجال I!

### 1* I مجال مفتوح $]a,b[$ أو $]-\infty,+\infty[$

f عبارة عن مجموع، جداء، تركيب، عدة دوال مرجعية مستمرة على I، إذن فالدالة f مستمرة على المجال I

N.B:

f قابلة للاشتقاق $\Rightarrow$ f دالة مستمرة

$\not\Leftarrow$

### 2* $I=[a,b]$

← نبين أن f مستمرة على $]a,b[$ كما سبق

← نبين أن f مستمرة على يمين a

← نبين أن f مستمرة على يسار b

### 3. $I=[a,+\infty[$

← نبين أن f مستمرة على $]a,+\infty[$ كما سبق

← نبين أن f مستمرة على يمين a.

### 4. $I=]-\infty,a]$

← نبين أن f مستمرة على $]-\infty,a[$ كما سبق

← نبين أن f مستمرة على يسار a.

## 3/ التفسير الهندسي للاستمرارية:

f دالة مستمرة على مجال I

⇕

يمكن رسم $(C_f)$ على المجال I دون رفع القلم

## 4/ أمثلة:

### 1* دوال مستمرة على مجال نعرفها:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$f(x)=\begin{cases} -x & ]-\infty,0] \\ x^2 & ]0;+\infty[ \end{cases}$$

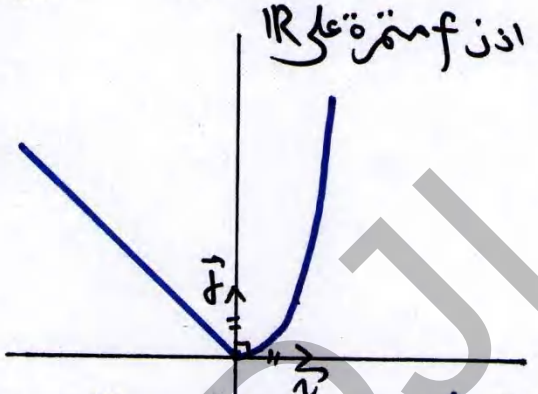
ABDELNAIDJI

* $f$ مستمرة على $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

* استمرارية $f$ عند $0$: $f$ مستمرة

$$\lim_{x<0} f(x) = \lim_{x>0} f(x) = f(0) = 0$$

* اذن $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$



## 2- دوال غير مستمرة على مجال تعريفها:

### مثال: الدالة الجزء الصحيح

* تعريف

$$E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \longrightarrow n = E(x) = [x]$$
حيث $n \leq x < n+1$

* أمثلة:

$E(2,3) = 2$
$E(3) = 3$
$[\pi] = 3$
$E(-4,12) = -5$

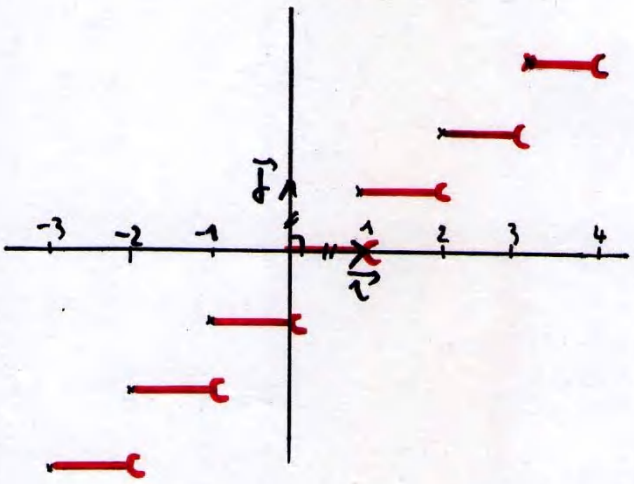
* عبارة $E(x)$

$$E(x) = \begin{cases} -1 & [-1,0[ \\ 0 & [0,1[ \\ 1 & [1,2[ \\ 2 & [2,3[ \end{cases}$$

* تعليق:

الدالة $E$ مستمرة على كل من المجالات
$\ldots [3,4[\ , [2,3[\ , \ldots \ldots [-2,-1[\ , [-3;-2[$
الكتابة

* التمثيل البياني: fonction en escaliers



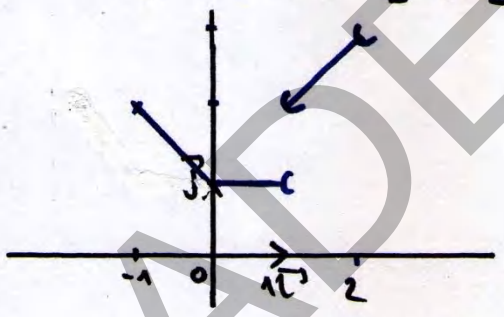
* دوال مرتبطة بالدالة الجزء الصحيح

لتكن $f$ الدالة المعرفة على $[-1;2[$ بالعبارة

$$f(x) = x\,E(x) + 1$$

عين عبارة $f$ في كل مجال من $D_f$، ارسم $(C_f)$، هل $f$ دالة مستمرة؟.

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & [-1,0[ \\ 1 & [0,1[ \\ x+1 & [1;2[ \end{cases}$$



* $f$ مستمرة على $[-1;1[$, $[0,1[$, $[-1,0[$ و $[1,2[$

* $f$ ليست مستمرة على $[-1;2[$

**مثال 2** (Voir page precedente)

$$f(x) = \{$$

# مبرهنة القيم المتوسطة

ADEL NADJI

# مبرهنة القيم المتوسطة

**الهدف:**

1* اثبات أن معادلة ما تقبل حلا α في مجال معين باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة

2* تعيين حصر سعته m لهذا الحل بطريقة التنصيف.

## ① $f(x)=c$

### 1* اثبت أن المعادلة تقبل على الأقل حلا في المجال $[a,b]$ (مفتوح، مغلوق، $-\infty$، $+\infty$)

← $f$ مستمرة على $[a,b]$

← $c$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

في حالة مجال مفتوح: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to b} f(x)$

نقول أن $f(x)=c$ تقبل على الأقل حلا $\alpha$ محصور بين $a$ و $b$: $a<\alpha<b$

$\alpha \in ]a,b[$

### 2* اثبات أن الحل وحيد:

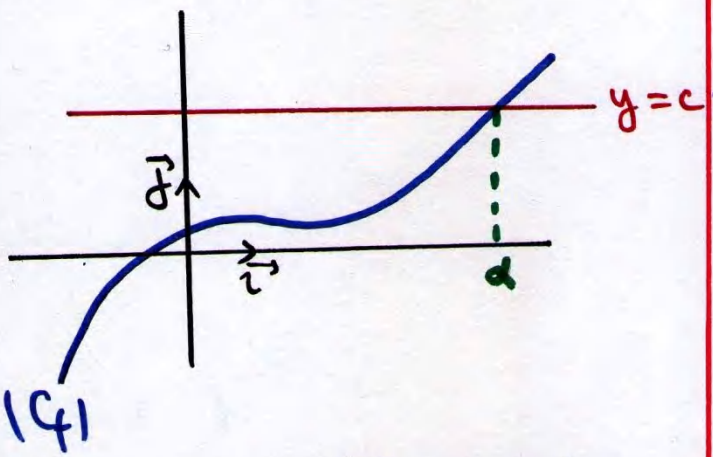
← $f$ دالة رتيبة تماما

### 3* اثبات أن $\alpha$ محصور بين 1 و 3 مثلا:

← نثبت أن العدد $c$ محصور بين $f(1)$ و $f(3)$.

### 4* التفسير البياني:

$f(x)=c$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ معناه $(C_f)$ يقطع المستقيم الذي معادلته $y=c$ في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$




### 5* مثال + طريقة التنصيف:

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1/ ادرس تغيرات الدالة $f$.

2/ بين أن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2;1]$

أو

بين أن $(C_f)$ يقطع $(D): y=8$ في نقطة وحيدة

3/ جد حصرا للحل $\alpha$ سعته $10^{-2}$

أو

جد حصرا لفاصلة نقطة التقاطع.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | $\alpha$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | 21 | ↘ | 8 | ↗ | $+\infty$ |

ADEL NADJI

## اثبات أن $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا على $[-2,1]$

- $f$ دالة مستمرة على $[-2;1]$ (مجال حيزي من $\mathbb{R}$)
- $f(-2)<8<f(1)$ حيث

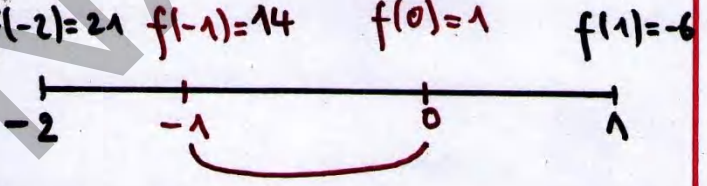
$$\begin{cases} f(-2)=21 \\ f(1)=-6 \end{cases}$$

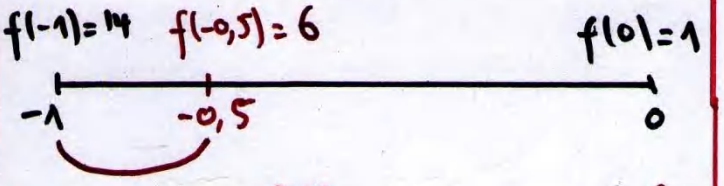
- الدالة $f$ متناقصة تماما على $[-2;1]$

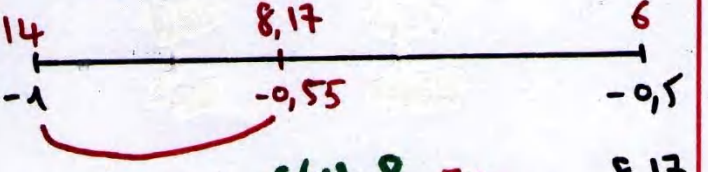
مما سبق وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-2<\alpha<1$

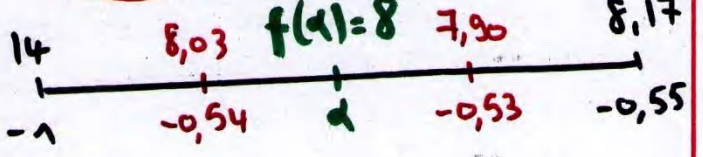
### ايجاد حصر لـ $\alpha$ بطريقة التنصيف:

$a<\alpha<b$ هذا الحصر سعته $m$ معناه $m=b-a$




اذن $-0,54<\alpha<-0,53$ $(10^{-2})$

بيانيا: $(C_f)$ يقطع $(D): y=8$ في النقطة الوحيدة ذات الفاصلة $\alpha$

## ② $f(x)=0$

### • اثبات أن المعادلة تقبل حلا في المجال $[a,b]$ (مفتوح، مغلوق، $\infty$، عدد)

← $f$ مستمرة على $[a,b]$

← $f$ غيرت اشارتها.

نقول أن $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا $\alpha$ حيث $a<\alpha<b$ $\alpha\in]a,b[$

### • اثبات ان الحل وحيد:

← $f$ دالة رتيبة تماما.

### - اثبات أن $\alpha$ محصور بين 1 و3 مثلا:

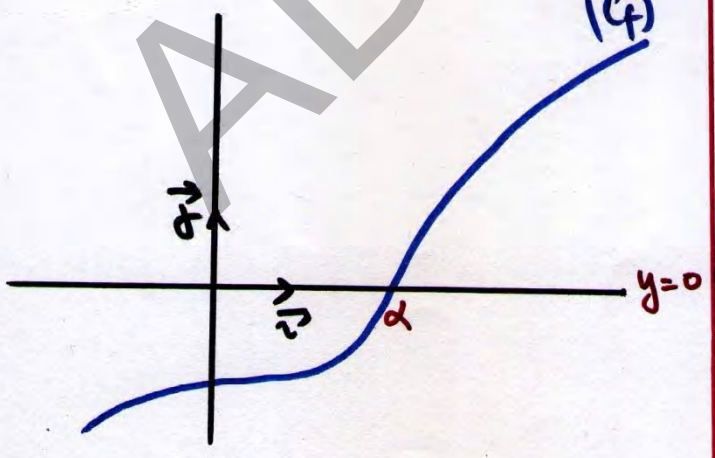
← نحسب $f(1)$ و $f(3)$ ونثبت أن $f(1)\times f(3)<0$

### * التفسير البياني:

$f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$

$\Leftrightarrow$

$(C_f)$ يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $\alpha$ أي النقطة $A(\alpha,0)$




ADEL NADJI

## • مثال + طريقة التنصيف :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -x^3 - 2x + 5$

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ بين أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$

3/ حدد حصرا لـ $\alpha$ سعته $10^{-1}$

و

بين أن $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ ، ثم جد حصرا لـ $\alpha$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

• f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$

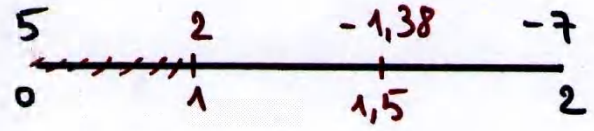
• f غيرت اشارتها من $+\infty$ إلى $-\infty$

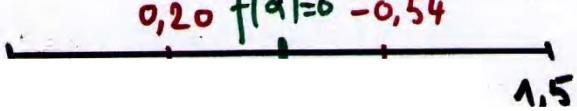
• f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

مما سبق وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$

### ايجاد حصر لـ $\alpha$:




### ملاحظة:

سؤال: بين أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1,3 < \alpha < 1,4$

في هذه الحالة لا نحتاج لطريقة التنصيف فقط نصيف اثناء الاجابة مايلي

$f(1,3) \times f(1,4) < 0$ $\begin{cases} f(1,3) = 0,20 \\ f(1,4) = -0,54 \end{cases}$

## ③ $f(x) = h(x)$

* لحل هذه المعادلة نجعلها صفرية ونقتبس الدالة $g(x) = f(x) - h(x)$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = h(x)$ *

ثم نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة g كما في الحالة ② .

## 4/ عزل $f(\alpha)$ حصر $\ln\alpha$ و $e^\alpha$

مثال: Bac 2012 $S_2$

$g(x) = 1 - xe^x$ (I)

* بين أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-1; +\infty[$ ثم تحقق أن $0,5 < \alpha < 0,6$

$\begin{cases} g(\alpha) = 0 \\ e^\alpha = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$

$f(x) = (x-1)e^x - x - 1$ (II)

* بين أن $f(\alpha) = \frac{-\alpha^2 + 1}{\alpha}$ ← عزل $e^\alpha$ بـ $\frac{1}{\alpha}$ ثم عوض $\ln\alpha$ بـ $-\alpha$

* جد حصرا لـ $f(\alpha)$ ← متزايدة تماما $h^\alpha$

$h(0,5) < f(\alpha) < h(0,6)$

متناقصة تماما

$h(0,6) < f(\alpha) < h$

Sin قواعد العا

في IR

ADEL NAIDJI

# الاشتقاقية



ADEL NAIDJI

# الاشتقاقية

## I/ قابلية اشتقاق الدالة f عند عدد a

* f دالة معرفة على $D_f$
* a عدد ينتمي إلى $D_f$.

$D_f$ يشمل a (ليس حدا لـ $D_f$) ← 1

$[a ; +\infty[$ ← 2

$]-\infty, a]$ ← 3

$]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$ ← 4

f تغير عبارتها عند a.

* **سؤال:** ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند a واستنتج العدد المشتق إذ وجد.

**$D_f$ يشمل a (ليس حدا لـ $D_f$)**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ و

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



عدد b:
* f قابلة للاشتقاق عند العدد a
* عددها المشتق هو $f'(a)$ حيث $= b$

$\infty$
* f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد a

**أمثلة:**

* $f(x)=x^2$ لما $a=2$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(h+2)^2-4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2+4h+4-4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h+4) = 4$$

اذن الدالة مربع قابلة للاشتقاق عند 2

و $f'(2)=4$

* $f(x)=\sqrt{x}$ لما $a=-1$ :

f غير قابلة للاشتقاق عند 1- لأن

$-1 \notin D_f$

* $f(x)=\sqrt{x}$ لما $a=4$ :

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

اذن f قابلة للاشتقاق عند 4

و $f'(4)=\frac{1}{4}$

a يشمل $D_f$ وله جوار من اليمين a+h∈I

$f(x)=\sqrt{-|x|}$

ADEL MADJI

## $D_f=[a;+\infty[$ /2

• f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد a

### دراسة قابلية اشتقاق f على يمين a:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

أو

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

- عدد ط: • f قابلة للاشتقاق على يمين العدد a
  • $f'_d(a)=$ ط و
- $\infty$: • f ليست قابلة للاشتقاق على يمين a

**مثال:**

$a=2$ ; $f(x)=\sqrt{x-2}$

• f ليست قابلة للاشتقاق عند 2.

• قابلية اشتقاق f على يمين 2:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$$

اذن f ليست قابلة للاشتقاق على يمين 2

## $D_f=]-\infty;a]$ /3

• f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد a.

### دراسة قابلية اشتقاق f على يسار a:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

أو

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

- عدد ط: • f قابلة للاشتقاق على يسار العدد a
  و $f'_g(a)=$ ط
- $\infty$: • f ليست قابلة للاشتقاق على يسار a

**مثال**

$a=0$ ; $D_f=]-\infty,0]$ ; $f(x)=\sqrt{-x+3}$

• f ليست قابلة للاشتقاق عند 0

• قابلية اشتقاق f على 0 من اليسار:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{3-h}-\sqrt{3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h(\sqrt{3-h}+\sqrt{3})}=\frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

اذن f قابلة للاشتقاق على يسار 0

و $f'_g(0)=\frac{-1}{2\sqrt{3}}$

ADEL NAIDJI

14 ] $-\infty, a]$ و $[a, +\infty[$ على f تغير عبارتها عند a

## • دراسة قابلية اشتقاق f على يمين a

- قابلة للاشتقاق: $f'_d(a) = \alpha$
- ليست قابلة للاشتقاق على يمين a

## • دراسة قابلية اشتقاق f على يسار a:

- قابلة للاشتقاق: $f'_g(a) = \beta$
- ليست قابلة للاشتقاق على يسار a

## • دراسة قابلية اشتقاق f عند العدد a:

* تكون f قابلة للاشتقاق عند العدد a إذا وفقط إذا كانت:

← f قابلة للاشتقاق على يمين a

← f قابلة للاشتقاق على يسار a.

← $f'_d(a) = f'_g(a) = \alpha$

* العدد المشتق لـ f عند a هو $\alpha$ $f'(a) = \alpha$

**مثال**

$f(x) = |x-5|$ $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = -x+5 & ]-\infty, 5] \\ f(x) = x-5 & [5; +\infty[ \end{cases}$$

ادرس قابلية اشتقاق f عند العدد 5.

## • دراسة قابلية اشتقاق f على يمين 5:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{+5+h-5}{h} = +1$$

f قابلة للاشتقاق على يمين 5

و $f'_d(5) = +1$

## • دراسة قابلية اشتقاق f على يسار 5:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-5-h+5}{h} = -1$$

f قابلة للاشتقاق على يسار 5

و $f'_g(5) = -1$

## • دراسة قابلية اشتقاق f عند 5:

f قابلة للاشتقاق على يمين ويسار 5

لكن $f'_d(5) \neq f'_g(5)$

إذن f ليست قابلة للاشتقاق عند العدد 5.

ADEL NAIDJI

## 2/ الدالة المشتقة لـ f:

### 1/ مجالات قابلية اشتقاق f: (ليس مجموعة)

**• f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I:**

• معناه f قابلة للاشتقاق من أجل كل عدد a من I

• كيف نجيب على السؤال؟: f عبارة عن مجموع، جداء، تركيب عدة دوال من بينها قابلة للاشتقاق على كل مجال من $D_f$ إذن f قابلة للاشتقاق على كل مجال مفتوح)

**• f قابلة للاشتقاق على [a,b]:**

نبين أن

• f قابلة للاشتقاق على ]a,b[ كما سبق

• نبين أن f قابلة للاشتقاق على يمين a وعلى يسار b.

**• f قابلة للاشتقاق على [a,+∞[:**

• f قابلة للاشتقاق على ]a,+∞[ كما سبق

• f قابلة للاشتقاق على يمين a.

**• f قابلة للاشتقاق على ]-∞,a]:**

• f قابلة للاشتقاق على ]-∞,a[ كما سبق

• f قابلة للاشتقاق على يسار a.

## 2/ مشتقات الدوال المألوفة:

| f(x) | f'(x) | مجال الاشتقاق |
|---|---|---|
| a | 0 | $\mathbb{R}$ |
| ax+b | a | $\mathbb{R}$ |
| $x^2$ | 2x | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0,+\infty[$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $]-\infty,0[ \cup ]0,+\infty[$ |
| cos x | -sin x | $\mathbb{R}$ |
| sin x | cos x | $\mathbb{R}$ |

## 3/ عمليات على الدوال المشتقة:

| f | f' |
|---|---|
| k·u | k·u' |
| u+v-w | u'+v'-w' |
| u·v | u'v+u·v' |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ |
| $\frac{1}{u}$ | $\frac{-u'}{u^2}$ |

ADEL MADJI

## 4/ مشتقة مركب دالتين:

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $u[v(x)]$ | $v'(x) \times u'[v(x)]$ |
| $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $u^n$ | $n u' u^{n-1}$ |
| $\frac{1}{u^n}$ | $\frac{-n u'}{u^{n+1}}$ |

## 5/ تطبيقات:

* بين أن f قابلة للاشتقاق على مجال معين واحسب $f'(x)$

$f(x) = 2x+3$

$f(x) = x^3$

$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

$f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

$f(x) = x^3(2x^2+1)$

$f(x) = \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}$

$f(x) = \frac{2x^2+2}{2x+1}$

$f(x) = (2x+1)^3$

$f(x) = \sqrt{6x^2+3x+10}$

$f(x) = \frac{1}{(x+3)^4}$

$f(x) = \cos(-4x+3)$

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

$f(x) = (x^3+x+1)\sqrt{x}$

$f(x) = 10(x+2)^2$

* استنتج دون حساب النهاية التالية

$$A = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$$

$$A = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} = f'(2)$$

حيث $f(x) = \sqrt{x+2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$A = f'(2) = \frac{1}{4}$$

## 6/ المشتقات المتعاقبة:

* f دالة قابلة للاشتقاق n مرة على مجال I

* $f^{(n)}$ تسمى المشتقة ذات الرتبة n للدالة f.

**مثال**

① احسب $f'(x)$، $f(x) = (3x+4)e^x$

تحقق أن $f''(x)$، $f^{(3)}(x)$

البرهان بالتراجع $\Leftarrow$ $f^{(n)}(x) = (3x+3n+4)e^x$

② احسب $f'(x)$، $f(x) = \frac{1}{x}$

تحقق أن $f''(x)$، $f^{(3)}(x)$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$$

**n! عاملي:**

$0! = 1$ / $1! = 1$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$n! = 1$

$n! = (n$

ADEL NAIDJI

## 3/ التفسير الهندسي للعدد المشتق:

**1/ $D_f$ يشمل a ($f$ ليس مجال $C_f$)**

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

**1* $f'(a) = b$: يقبل $(C_f)$ عند النقطة** $A(a, f(a))$ مماسا معادلته

$$(\Delta): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

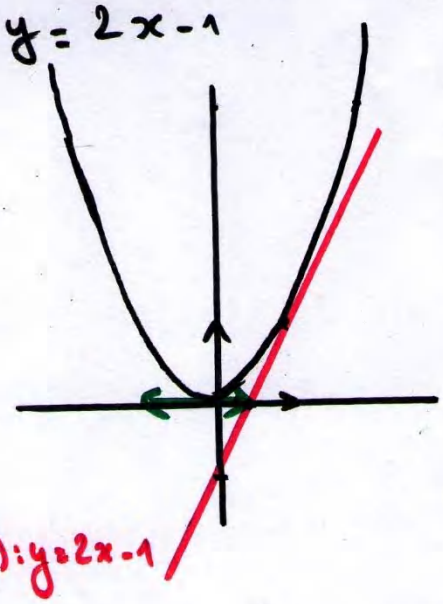
مثال: $f(x) = x^2$ , $a = 1$

$f$ قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1) = 2$

اذن $(C_f)$ يقبل مماسا $(\Delta)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 معادلته

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$y = 2x - 1$




**2* $f'(a) = 0$: يقبل $(C_f)$** عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا أفقيا

مثال: $f(x) = x^2$ , $a = 0$

**3* $f$ غير قابلة للاشتقاق (نجد $\infty$)**

$(C_f)$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا عموديا معادلته $x = a$

### طبيعة الأسئلة:

**① عين معادلة المماس لـ $(C_f)$**

**← عند النقطة ذات الفاصلة a:**

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

**← عند النقطة ذات الترتيبة b:**

- نحل المعادلة $f(x) = b$
- نعين الفواصل a الممكنة (عدد الحلول يمثل عدد المماسات الممكنة).

+ بعد تعيين a نكتب

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

مثال: $f(x) = x^2$

عين مماسات $(C_f)$ عند النقط ذات الترتيبة 4.

$f(x) = 4$ معناه $x = 2$ أو $x = -2$

| $a = 2$ | $a = -2$ |
|---|---|
| $f(2) = 4 / f'(2) = 4$ | $f(-2) = 4 / f'(-2) = -4$ |
| $y = 4(x-2) + 4$ | $y = -4(x+2) + 4$ |
| $y = 4x - 4$ | $y = -4x - 4$ |

ADEL NAIDJI

## ← الذي معامل توجيهه $\alpha$ :

- نحل المعادلة $f'(x)=\alpha$
- نعين الفواصل $a$ الممكنة (عدد الحلول يمثل عدد المماسات الممكنة)
- بعد تعيين $a$ نكتب

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

مثال: $f(x)=x^2$

عين مماسات $(C_f)$ التي معامل توجيهها 8.

$f'(x)=2x$

$f'(x)=2x=8$ معناه $x=4$

أي عند النقطة ذات الفاصلة 4.

$y=f'(4)(x-4)+f(4)$

$y=8(x-4)+16$

$y=8x-16$

## ← الذي يوازي المستقيم $y=\alpha x+\beta$

نحل المعادلة $f'(x)=\alpha$ لتعيين الفواصل الممكنة ثم نكمل الحل

## ← الذي يعامد المستقيم $y=\alpha x+\beta$

نحل المعادلة $f'(x)=-\frac{1}{\alpha}$

لتعيين الفواصل الممكنة ثم نكمل الحل

## ← الذي يشمل النقطة $A(\alpha,\beta)$

نعين الفواصل الممكنة كمايلي

$(\Delta): y=f'(a)(x-a)+f(a)$

- نعوض $f(a)$ و $f'(a)$ بدلالة $a$
- نعوض $x$ و $y$ بالاحداثيات $\alpha$ و $\beta$
- نتحصل على معادلة بدلالة $a$ ، نحلها لايجاد $a$.

مثال: $f(x)=x^2$

عين مماسات $(C_f)$ التي تشمل النقطة $A(0,-1)$

$(\Delta): y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$$\begin{cases} f'(a)=2a \\ f(a)=a^2 \\ x=0 \ / \ y=-1 \end{cases}$$

$-1=2a(0-a)+a^2$

$-1=-a^2$

| $a=+1$ | $a=-1$ |
|---|---|
| $y=2x-1$ | $y=-2x-1$ |

② عين النقطة A بحيث عندها فان $(C_f)$ و $(C_g)$ يقبلان نفس المماس ثم عين معادلته

نعين $a$ حل جملة المعادلتين

$$\begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases} \Rightarrow \text{النقطة } A(a,f(a))$$

$y=f'(a)(x-$

ADEL NAIDJI

مثال:
عين النقطة A التي تقبل فيها منحنى الدالة مربع ومنحنى الدالة مكعب مماسا مشتركا ثم عين معادلة هذا المماس:

$$\begin{cases} a^3 = a^2 \\ 3a^2 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a^2-1)=0 \\ a(3a-2)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \quad a=-1 \quad a=1 \\ a=0 \quad a=\frac{2}{3} \end{cases}$$

اذن $a=0$ $f(a)=0$
النقطة A هي المبدأ $O(0,0)$

$$y = f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$\boxed{(\Delta): y=0}$$

## 2/ a حدد $D_f$ (يمين a أو يسار a)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

أو

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

⇓

## نصف مماس بدل مماس

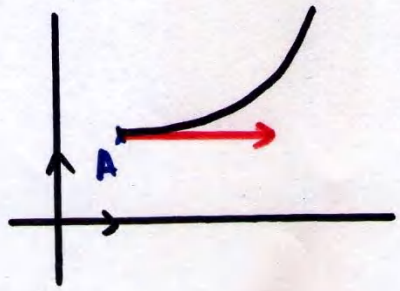
1. $f'_d(a)=b$ :

$$(\Delta): \begin{cases} y = f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

نصف مماس من اليمين مواز لمحور الفواصل

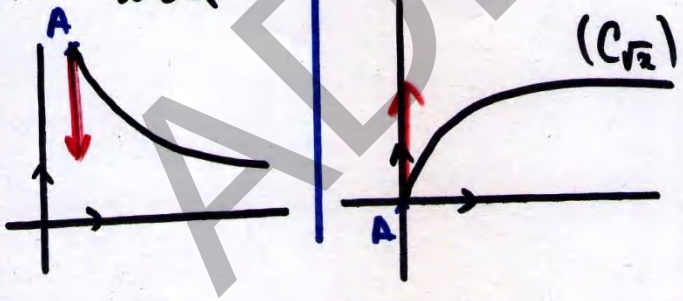
2. $f'_d(a)=0$

$$(\Delta): \begin{cases} y = f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$




3. نجد $+\infty$ أو $-\infty$

| $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|
| نصف مماس مواز لمحور الترانيب موجه نحو الأعلى معادلته $x=a$ | نصف مماس مواز لمحور الترانيب موجه نحو الأسفل معادلته $x=a$ |




N.B* : في هذه الحالة النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة توقف.

ADEL NADJI

**3/ $f$ تغير عبارتها عند $a$: $]-\infty,a] \cup [a,+\infty[$**

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \quad \text{و} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$$

**⇐ عددان $l$ و $l'$ حيث $l = l'$**

نرجع للحالة الأولى

⇓

$(C_f)$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة $a$ مماسا

- مائلا
- أفقيا
- عموديا.

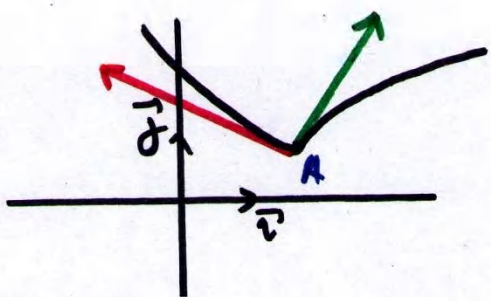
**⇐ نتيجتين مختلفتين**

**① $l$ و $l'$ ($l \neq l'$)**

$(C_f)$ يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة $a$ معادلتهما:

$$(\Delta_1) \begin{cases} y = f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

$$(\Delta_2): \begin{cases} y = f'_g(a)(x-a)+f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

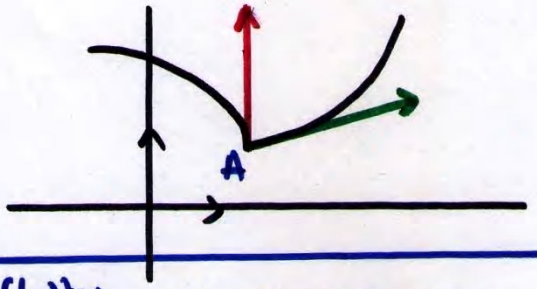



**② $l$ و $\infty$:**

$(C_f)$ يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة $a$ معادلتهما مثلا:

$$(\Delta) \begin{cases} y = f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$ من اليمين

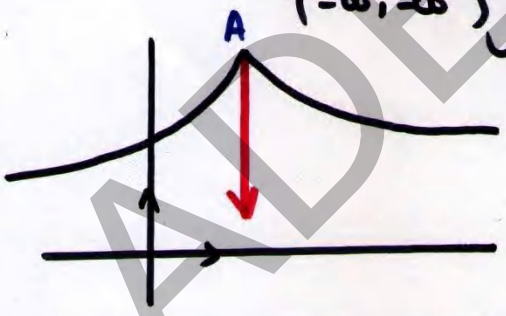
$$(\Delta_2) \begin{cases} x = a \\ \text{نحو الأعلى } +\infty \text{ أو نحو الأسفل } -\infty \end{cases}$$




**N.B**: في الحالة ① و ② ، النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة زاوية.

**③ $\infty$ و $\infty$ من نفس الاشارة:**

$(C_f)$ يقبل نصف مماس معادلته $x=a$ موجه نحو الأعلى $(+\infty,+\infty)$ أو نحو الأسفل $(-\infty,-\infty)$

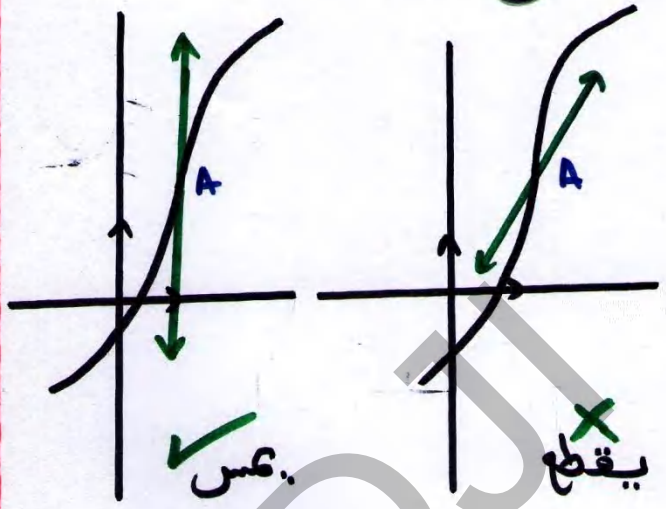



**N.B**: النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة رجوع

ADEL NAIDJI

④ نجد $+\infty$ و $-\infty$ :

$(C_f)$ يقبل مماس معادلته $x=a$




N.B : النقطة A في هذه الحالة تسمى نقطة انعطاف لـ $(C_f)$ بغير انحناءه

## 4/ الوضع النسبي بين $(C_f)$ و المماس $(\Delta)$ :

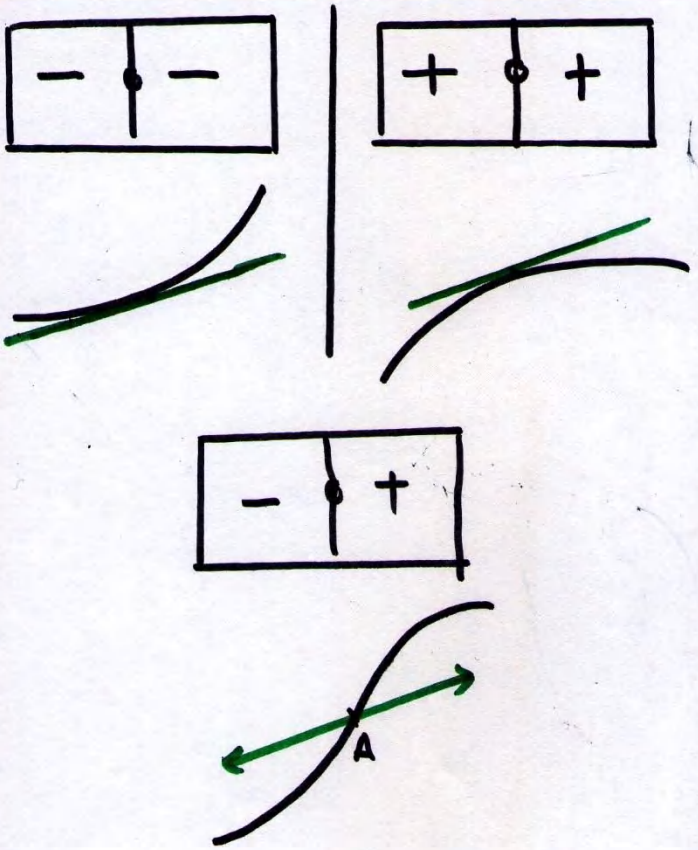
### طريقة ① :

- $(\Delta): y=ax+b$ مماس لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $a$.
- لمعرفة الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Delta)$ ندرس اشارة الفرق $A=f(x)-(ax+b)$

$A>0$ : $(C_f)$ فوق $(\Delta)$

$A<0$ : $(C_f)$ تحت $(\Delta)$

$A=0$ : ← الفرق لم يغير اشارته
$(\Delta)$ يمس $(C_f)$
← الفرق غير اشارته
$(\Delta)$ يخترق $(C_f)$

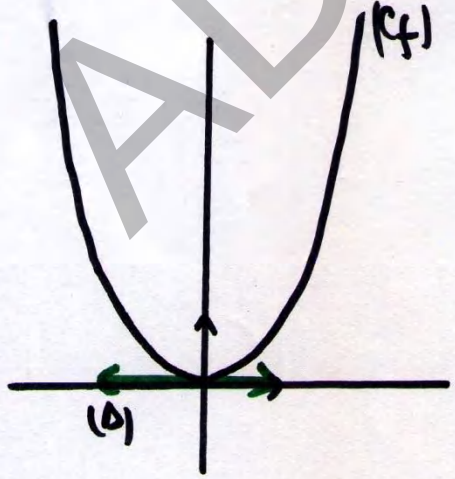



مثال :

$f(x)=x^2$ عند $a=0$ ، $(\Delta): y=0$

ندرس اشارة الفرق $A=f(x)-y=x^2$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | | $(\Delta)$ يمس $(C_f)$ | | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |




ABDELMADJID

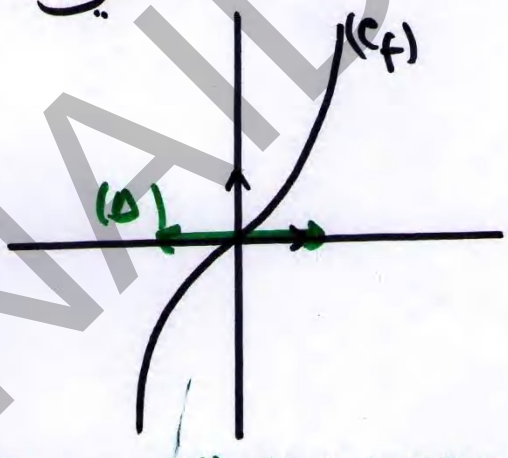
مثال ②:

$(\Delta): y=0$ $\quad a=0$, $\quad f(x)=x^3$

ندرس اشارة الفرق $A=f(x)-y=x^3$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| الوضع النبي | $(C_f)$ أسفل $(\Delta)$ | $(\Delta)$ يخترق $(C_f)$ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |

$O(0,0)$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة مكعب




## طريقة ② باستعمال دالة جديدة:

نريد دراسة الوضع النبي بين $(C_f)$ والمماس $(\Delta)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $a$ (من أجل أي قيمة لـ $a$)

Bac 2016 $T_1$

* نضع الدالة $R$ حيث:

$$R(x)=f(x)-\left[f'(a)(x-a)+f(a)\right]$$

$$R'(x)=f'(x)-f'(a)$$

• في بداية التمرين نجد دالة مساعدة $g$

$$g(x)=f'(x)$$

بعد دراسة تغيرات $g$ نشئ جدول تغيراتها.

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\nearrow$ | |

• استنتاج تغيرات $R$:

$$R'(x)=f'(x)-f'(a)$$

$$R'(x)=g(x)-g(a)$$

$R'(x)=0$ ← : $x=a \Leftarrow g(x)=g(a)$

$R'(x)\geq 0$ ← !!

لما $x\geq a$ و بما أن $g$ متزايدة تماما

فإن $g(x)\geq g(a) \Leftarrow g(x)-g(a)\geq 0$

$R'(x)\geq 0$

$R'(x)\leq 0$ ← :

بنفس الطريقة نجد $R'(x)\leq 0$

لما $x\leq a$.

| $x$ | $-\infty$ | $a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $R'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $R(x)$ | $\searrow$ | $R(a)=0$ | $\nearrow$ |
| اشارة $R(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| الوضع النبي | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(\Delta)$ | $(C_f)$ فوق |

ADEL NAIDJI

# 5/ تطبيقات الاشتقاقية:

## 1/ اتجاه تغير دالة

* نعين الدالة المشتقة $f'(x)$ ثم ندرس اشارتها

قواعد الحساب في $\mathbb{R}$ — بالاستعانة بدالة أخرى $g(x)$ نعلم اشارتها في بداية المسألة.

$f'(x) \geq 0$ : $f$ متزايدة تماما

$f'(x) \leq 0$ : $f$ متناقصة تماما.

* نشكل جدول تغيرات $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

## 2/ القيمة الحدية الصغرى والعظمى

$f'(x)$ تنعدم من اجل قيمة معدومة ثم تغير اشارتها

| $+$ $-$ | $-$ $+$ |
|---|---|
| عظمى | صغرى |

## 3/ نقطة الانعطاف

* ط①: $f'(x)$ تنعدم ولا تغير اشارتها

* ط②: $f''(x)$ تنعدم مغيرة اشارتها

* ط③: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$

و $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$

و العكس

* ط④: عند دراسة الوضع النسبي لـ $(C_f)$ ومماسه $(\Delta)$ نجد أن $(\Delta)$ يخترق $(C_f)$

**N.B①**

ذروة ⇐ مماس أفقي

مماس أفقي ⇐ { ذروة . نقطة انعطاف

**N.B②:**

$A(\alpha, \beta)$ ذروة لـ $(C_f)$ معناه

$$\begin{cases} f(\alpha) = \beta \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

**سؤال:**

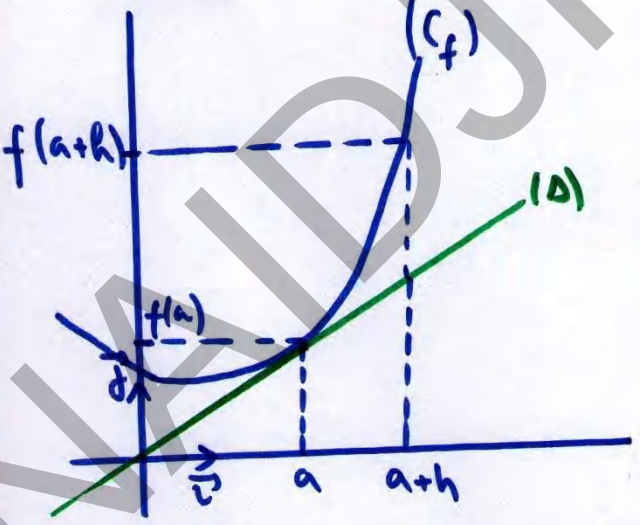
$f(x) = ax + b + \dfrac{1}{3-x}$ ، عين $a$ و $b$ حتى تكون النقطة $A(2;1)$ نهاية حدية للمنحنى $(C_f)$

ADEL NADJI

## 4/ التقريب التآلفي لدالة

**المبدأ:**

- $f(x)$ دالة لها عبارة معقدة
- نريد حساب صور أعداد بشكل سهل
- نستبدل عبارة $f(x)$ بدالة تآلفية بسيطة كما يلي.




$(\Delta)$ مماس $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $a$

$$(\Delta): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

لما $x = a+h$

$$\begin{cases} f(x) = f(a+h) \\ y = f'(a) \times h + f(a) \\ f(x) \approx y \quad h \to 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f(a+h) \approx h \cdot f'(a) + f(a)}$$

مثال: احسب $(2,0001)^2$

نعتبر $f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x$

نكتب

$$f(2+h) \approx 4h + 4$$

$$\boxed{(2+h)^2 \approx 4h+4}$$

$$(2,0001)^2 \approx 4,0004$$

## 5/ انشاء دالة عبارتها مجهولة باستعمال طريقة Euler

**المبدأ:**

يمكن انشاء منحنى تقريبي لـ $(C_f)$ لدالة لا نعلم سوى دالتها المشتقة ونقطة منها كما يلي:

| | $M_i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|---|
| معطاة | $M_0$ | $x_0$ | $f(x_0)$ |
| | $M_1$ | $x_0+h$ | $hf'(x_0)+f(x_0)$ |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

- ننجز جدولين $h>0$ و $h<0$ فنتحصل على عدد كبير من النقط القريبة جدا من منحنى $(C_f)$ الحقيقي
- نربط بين النقط لنحصل على منحنى تقريبي لـ $(C_f)$.

ADEL NAIDJI

# الدوال الأسية

ADEL NADJI

# الدوال الأسية

## 1/ عموميات

### 1/ تعريف الدالة الأسية النيبيرية:

* توجد دالة وحيدة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ حيث:
  - $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f' = f$
  - $f(0) = 1$
* هذه الدالة تسمى الدالة الأسية النيبيرية (ذات الأساس $e$) اكتشفت كعكسية لـ Ln

$$f: \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}_*^+ = ]0, +\infty[$$
$$x \longmapsto f(x) = \exp(x) = e^x$$

* الدالة الأسية النيبرية هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y' = y$، حيث $y(0) = 1$

$n \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

### 2/ خواص:

| | |
|---|---|
| $e^a \times e^b = e^{a+b}$ | $e^{u(x)} > 0$ toujours |
| $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ | $e^{u(x)} < 0$ jamais |
| $(e^a)^n = e^{n.a}$ | $e^{u(x)} = 0$ jamais |
| $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ | $e^0 = 1$ |
| $e^{u(x)} \times e^{-u(x)} = 1$ | $e^1 = e = 2,718\ldots$ |
| $\sqrt{e^a} = e^{a/2}$ | $e^{\ln a} = a \; ; a > 0$ |
| $\sqrt[n]{e^a} = e^{a/n}$ | $\ln e^a = a$ |

تطبيق: اكتب على أبسط شكل ممكن ما يلي:

$$A = \frac{e^{-5} \times e^8}{\sqrt{e^3} \times e^2} + \frac{e^{2^3} \times e^3}{e^2 \times e^{-4}}$$

$$\ldots \; e^{-x} \times e^{3x} \times e^{x^2+2}$$

### 3/ معادلات تتضمن الدالة الأسية:

$$u(x) = v(x) \Leftrightarrow e^{u(x)} = e^{v(x)}$$

$$e^{u(x)} = b$$
- $b < 0$: $\nexists$
- $b > 0$: $u(x) = \ln b$

* تبديل المتغير إذا كانت كل المجاهيل مكتوبة على الشكل $e^{\ldots}$

$$e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow Y^2 + Y - 2 = 0$$
$$\begin{cases} Y = e^x > 0 \\ x = \ln Y \end{cases}$$

تطبيق: حل المعادلات:

$e^{-x+2} = 1$

$e^{2x} \cdot e^{x-3} = e^{x+6}$

$e^{-x^2} = \frac{1}{e}$

$e^{x+3} - e^{\frac{4}{x}} = 0$

$e^{2x+1} = (e^x)^3$

$2e^{2x} - 3e^{3x} + e^x = 0$

$2e^x + \sqrt{e^x} - 3 = 0$

## 4/ دراسة اشارة عبارة وحل متراجحات:

### 1/ عبارة من الدرجة الأولى:

* قاعدة اشارة $\alpha e^{ax+b} + \beta$

$\alpha\beta > 0$:

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\alpha e^{ax+b} + \beta$ | نفس اشارة $\alpha$ | |

$\alpha\beta < 0$

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha e^{ax+b} + \beta$ | عكس $\alpha.a$ | $0$ | نفس $\alpha.a$ |

$\alpha e^{ax_0+b} + \beta = 0$ أي

ABELNAIDJI

## * حل متراجحات :

* نضع $\alpha e^{ax+b}+\beta > 0$ ثم نحل المتراجحة حتى نجد المجال الذي تكون فيه العبارة موجبة
* تكون العبارة سالبة في المجال المتبقي من $\mathbb{R}$ .

* $a > b \Leftrightarrow e^a > e^b$
* $e^a > b \Leftrightarrow \begin{cases} b>0 : a > \ln b \\ b<0 : \mathbb{R} \end{cases}$
* $e^a < b \Leftrightarrow \begin{cases} b>0 : a < \ln b \\ b<0 : \emptyset \end{cases}$

## 2/ عبارة من الدرجة الثانية أو أكثر :

$a e^{2x} + b e^x + c$

نستعمل تبديل المتغير $Y = e^x > 0$

$a Y^2 + b Y + c$

* $\Delta < 0$ : اشارة a .
* $\Delta = 0$ : اشارة a $a(e^x - Y_1)^2$
* $\Delta > 0$ : نحلل العبارة $a(e^x - Y_1)(e^x - Y_2)$ ثم نستخدم اشارة الجداء

## 3/ اشارة عبارة A(x) تتضمن الدالة الأية:

* نحل المعادلة $A(x) = 0$

واذا لم تقبل المعادلة أي حلول فإن :

$A(x) > 0$ : إذا كان $A(0) > 0$ مثلا

$A(x) < 0$ : إذا كان $A(0) < 0$ مثلا .

## 4/ اشارة $e^x - 1$ :

$x < 0$ : $0 < e^x < 1$

$x > 0$ : $e^x > 1$

$x = 0$ $e^0 = 1$

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $e^x - 1$ | − | 0 | + |

## 5/ انظر درس دراسة اشارة عبارة + حل متراجحة

## 6/ تطبيق:

ادرس اشارة العبارات التالية:

$e^x - 1$

$2e^{3x+4} + 3$

$-3e^{-5x} - 4$

$-2e^{1-x} + 1$

$7e^{3x} - e^x - 6e^{2x}$

$2e^{2x} + e^x - 3$

$6e^{2x} - 18e^x + 12$

$e^{2x} - e^x + 1$

حل المتراجحات :

$7e^{3x} - e^x - 6e^{2x} \geq 0$

$-2e^{1-x} + 1 \leq 0$

$2e^{3x+4} + 3 < 0$

$e^{2x} - e^x + 1 > 0$

ADEL NAIDJI

# I/ الدالة الأسية النيبيرية $f(x)=e^x$

## 1/ تعريف:

مجموعة التعريف: $D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

عبارة $f(x)$

$$f:\ ]-\infty,+\infty[ \longrightarrow ]0,+\infty[$$
$$x \longmapsto y=f(x)=\exp x=e^x$$

## 2/ النهايات:

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ | محور الفواصل مقارب أفقي لـ $(C_f)$ عند $-\infty$. $(C_f)$ فوق $(xx')$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ | احتمال وجود فرع لانهائي $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ $(C_f)$ يمثل فرع لانهائي عند $+\infty$ باتجاه $(yy')$ |

## 3/ الاستمرارية:

الدالة $e^x$ متمرة على $\mathbb{R}$

## 4/ الاشتقاقية:

$f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي $f'$ حيث: $f'(x)=f(x)=e^x$

## المماسات:

- منطبق عند النقطة ذات الفاصلة 0
- $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ : $(T): y=x+1$
- $(C_f)$ يقع دوما فوق هذا المماس $(T)$.

## العدد المشتق عنده

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=f'(0)=1$$

## التقريب التآلفي عنده:

$$e^h \approx 1+h \ ; \ h\to0$$

## 5/ اشارة المشتقة:

$f'(x)=e^x>0$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ الدالة $e^x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

## 6/ جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $+$ | | | | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↗ | $e$ | ↗ | $+\infty$ |

## 7/ نقط التقاطع مع المحاور:

مع $(xx')$: $S=\emptyset \Leftrightarrow e^x=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

لا يوجد نقط تقاطع

مع $(yy')$: $f(0)=e^0=1$

$$(C_f)\cap(yy')=\{A(0,1)\}$$

## 8/ اشارة الدالة $e^x$

برهان: $e^x>0$

$$e^x=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2>0$$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | |

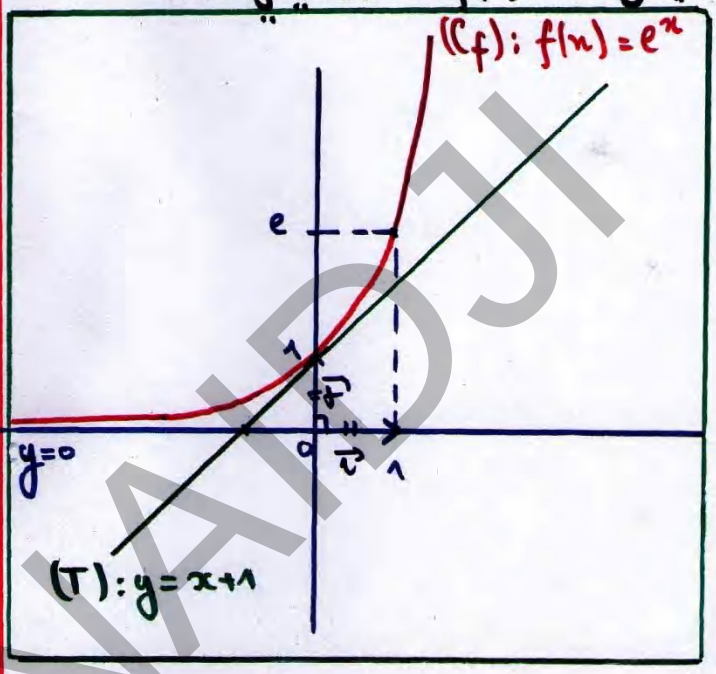
فوق $(xx')$

ADEL-MAROC

## 9/ التمثيل البياني لمنحنى الدالة $e^x$:

* انطلاقا من جدول التغيرات أو باستعمال طريقة Euler $\begin{cases} f'(x) = e^x \\ f(0) = 1 \end{cases}$

يمكن انشاء $(C_f)$ كما يلي:




## 10/ الدالة $f = \exp \circ u$

* مجموعة التعريف: $D_f = D_u$
* العبارة: $f(x) = e^{u(x)}$
* النهايات: (Voir Apres)
* الاستمرارية: إذا كانت $u$ مستمرة على مجال I فإن f مستمرة على نفس المجال I
* الاشتقاقية: إذا كانت $u$ قابلة للاشتقاق على مجال I فإن f قابلة للاشتقاق على I

وحالتها المشتقة

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

اشارة $f'(x)$ من اشارة $u'(x)$

* تغيرات f: لها نفس تغيرات $u$.

**تطبيق:** احسب مشتقات الدوال التالية

$f(x) = (x^2 - 2x)e^x$

$g(x) = (2x+3)e^{-2x+1}$

$h(x) = \dfrac{e^{2x} - 3}{e^{-x} + 3}$

$t(x) = -3x + 4 - 3e^{-2x-2}$

$k(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$

$g(x) = 2x + 1 - 3\dfrac{e^x}{e^x - 1}$

## 11/ الدالة الأسية ذات الأساس a

* مجموعة التعريف: $\mathbb{R}$
* العبارة: $(a > 0)$

$$f(x) = a^x \begin{cases} f(x) = 1 & ; a = 1 \\ f(x) = e^{x \ln a} & ; a > 0 ; a \neq 1 \end{cases}$$

* الاشتقاقية:

$$\left(a^x\right)' = \ln a \times e^{x \ln a}$$

* $0 < a < 1$

$f'(x) < 0$ اذن f متناقصة تماما.

$a^x < a^y \iff x > y$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ |

$0 < a < 1$ — النهايات حسب اشارة $\ln a$

* $a > 1$

$f'(x) > 0$ اذن f متزايدة تماما

$a^x > a^y \iff x > y$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

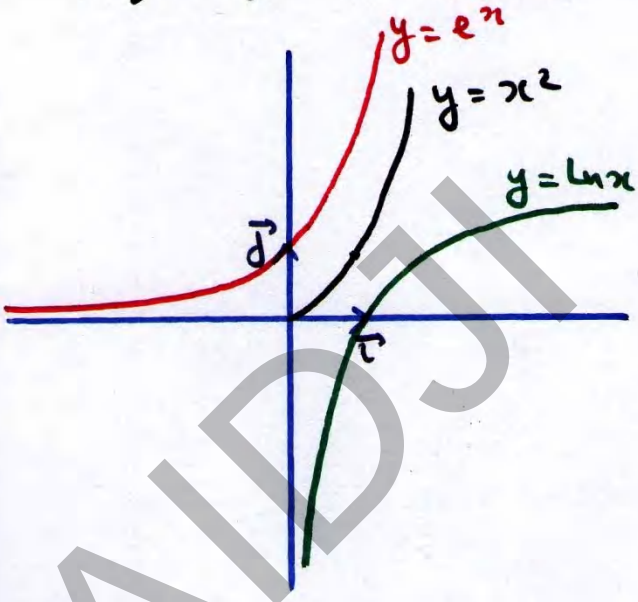
$a > 1$

ABDELNABDJI

# التزايد المقارن (الدالة الأسية)

## 1/ مدخل:

عند $+\infty$ : $e^x > x^n > \ln x$




$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

## 2/ إزالة ح.غ.ت : نهايات شهيرة:

| حساب النهاية عند | النهاية الشهيرة |
|---|---|
| $+\infty$ | $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$<br>$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$<br>المقلوب $\leftarrow 0^+$ |
| $-\infty$ | $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$<br>$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x$ $\to 0^-$ $n=2k+1$ |

| عند عدد | $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$<br>المقلوب $\leftarrow 1$ |
|---|---|

في هذا الجدول يشترط التماثل (voir Apres)

## 3/ طرق استعمال هذه النهايات الشهيرة:

### 1/ التحليل باخراج $x$ أو $e^x$ كعامل مشترك:

#### $e^x$ كعامل مشترك $\leftarrow$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{e^x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \times x}{e^x \times \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} (2x-1)e^x - 3e^{2x}$
$= \lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(\frac{2x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - 3\right) = -\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 3e^x + 4}{e^x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x\left(e^x - 3 + \frac{4}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}$
$= +\infty$

#### $x$ كعامل مشترك $\leftarrow$

- $\lim_{x \to +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} (e^{x+1} - 2x - 3) = \lim_{x \to +\infty} (x+1)\left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{2x+3}{x+1}\right)$

ADEL NAIDJI

## 2/ النشر:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^x - e^x$

$= 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2x-1)e^x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^x + 2xe^x - e^x = 0$

## 3/ الانتقال بين $e^{u(x)}$ و $e^{-u(x)}$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{+\infty}}{1+e^{-x}} = +\infty$ ($e^{-x}\to 0^+$)

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2e^{-x}+xe^{-x}+e^{-x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{(-x)^2e^{-x}-(-x)e^{-x}+e^{-x}}$ ($0^+$, $0^-$, $0^+$ $\to 0^+$)

$= +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-3e^x+4}{e^x+2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^{+\infty}} - 3 + 4e^{-x}}{1+2e^{-x}}$ ($e^{-x}\to 0$)

$= +\infty$

## 4/ تبديل المتغير:

وذلك إذا كانت العبارة فيها $e^x$ فقط

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-3e^x+4}{e^x+2}$

$Y = e^x$ و $x\to-\infty$ فإن $Y\to 0^+$

$= \lim\limits_{Y\to 0^+}\dfrac{Y^2-3Y+4}{Y+2}$

$= 2$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-3e^x+4}{e^x+2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Y^2-3Y+4}{Y+2}$

$= \lim\limits_{Y\to+\infty}(Y)$

$= +\infty$

## 5/ انشاء التماثل:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x}\times\dfrac{e^{2x+1}}{2x+1}$ ($\dfrac{2x+1}{x}\to 2$, $\dfrac{e^{2x+1}}{2x+1}\to+\infty$)

$= +\infty$

## 6/ باستعمال خواص اللوغاريتم

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^{2x}-e^x+1)-2x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^{2x}(1-e^{-x}+e^{-2x})\right)-2x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})-2x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1-e^{-x}+e^{-2x}) = 0$ ($e^{-x}\to 0$, $e^{-2x}\to 0$)

← هاذ جدا: (Voir Apres cours Ln x).

ADEL NAIDJI

# الدوال اللوغاريتمية

ADEL NADJI

# الدوال اللوغاريتمية

## I/ عموميات

### 1/ تعريف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية:

* هي الدالة الأصلية لـ $f(x)=\frac{1}{x}$ والتي تنعدم من أجل $x=1$ ، $\ln(1)=0$

* هي الدالة العكسية للدالة الأسية النيبيرية

$$y=\ln x \Leftrightarrow x=e^y \quad , x>0$$

* الدالة اللوغاريتمية النيبيرية معرفة على $]0,+\infty[$ وتحقق:

$$f:]0,+\infty[ \longrightarrow ]-\infty,+\infty[$$
$$x \longmapsto f(x)=\ln x$$

### 2/ خواص:

* إشارة a: $]0,+\infty[$

$\ln a$ معرف من أجل $\left\{\begin{array}{l} \text{ssi } a>0 \\ \text{jamais } a=0 \\ \text{jamais } a<0 \end{array}\right.$

* إشارة $\ln a$ : IR

$\ln a<0 \Leftrightarrow 0<a<1$

$\ln 1=0 \Leftrightarrow a=1$

$\ln a>0 \Leftrightarrow a>1$

| a | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ln a$ | − | 0 | + |

* صور بعض القيم بالدالة Ln:

| | |
|---|---|
| $\ln e^a=a$ | $\ln 1=0$ |

* خواص الحساب:

① a و b أعداد حقيقية موجبة تماما.

| | |
|---|---|
| $\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$ | $\ln(a^n)=n\ln a$ |
| $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ $=-\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ | $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$ |
| $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ | $\ln\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\ln a$ |

② اذا كان a و b حقيقيان أو عبارة بدالة:

$\ln(u\times v)=\ln|u|+\ln|v|$

$\ln\left(\frac{u}{v}\right)=\ln|u|-\ln|v|$

$\ln u^n \begin{cases} n\ln u & n \text{ فردي} \\ n\ln|u| & n \text{ زوجي} \end{cases}$

③ أخطاء شائعة:

$\ln(a+b)\neq \ln a+\ln b$

$\ln a\times\ln b\neq \ln a+\ln b$

$\frac{\ln a}{\ln b}\neq \ln a-\ln b$

$(\ln a)^n\neq n\ln a$

ADELNAIDJI

## 3/ معادلات تتضمن الدالة اللوغاريتمية:

← نعين $D$ ( داخل $\ln$ موجب تماما)
← نبسط المعادلة باستعمال خواص $\ln$
← نحصل على احدى الحالات .

① $u(x)=v(x) \Leftrightarrow \ln u(x)=\ln v(x)$
② $u(x)=e^b \Leftrightarrow \ln u(x)=b$
③ تبديل المتغير اذا كانت كل المجاهيل مكتوبة على الشكل $\ln\dots$

$$ay^2+by+c=0 \Leftrightarrow a(\ln x)^2+b\ln x+c=0$$
$$\begin{cases} y=\ln x \\ x=e^y \ ; x>0 \end{cases}$$

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ مايلي:

- $\ln(x^2-1)=\ln x$
- $\ln(2x-1)=2$
- $\ln(x-1)(x+2)=2\ln 2$
- $\ln(x-1)+\ln(x+2)=2\ln 2$
- $2[\ln x]^2+(\ln x)-6=0$
- $\ln(x-1)+\ln(x+2)=\ln(2x-3)+\ln 4$
- $\ln|x|+\ln|4-x|=\ln|2x-1|+\ln 3$
- $\begin{cases} \ln 2x+\ln 3y=\ln 6 \\ 3x-y=2 \end{cases}$
- $\begin{cases} \ln x-\ln y=-\ln 3 \\ x^2+2y=16 \end{cases}$

## 4/ دراسة اشارة عبارة وحل متراجحات:

### 1/ عبارة من الدرجة الأولى:

* قاعدة اشارة $a\ln(ax+b)+\beta$

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $a\ln(ax+b)+\beta$ | عكس $a$ | $0$ | نفس $a$ |

$x_0$ هي القيمة التي تعدم العبارة
$a\ln(ax+b)+\beta=0$

* حل متراجحات: بعد تعيين $D$
* نضع $a\ln(ax+b)+\beta>0$ ثم نحل المتراجحة حتى نجد المجال الذي تكون فيه العبارة موجبة"
* تكون العبارة سالبة في المجال المتبقي من $D$.

$\ln u(x)>\ln v(x) \Leftarrow u(x)>v(x)$ *
$\ln u(x)>a \Leftarrow u(x)>e^a$ *
$\ln u(x)<a \Leftarrow u(x)<e^a$ *

### 2/ عبارة من الدرجة 2 أو أكثر:

$a(\ln x)^2+b\ln x+c$

بعد تعيين $D$: نستعمل تبديل المتغير $Y=\ln x$

$aY^2+bY+c$

$\Delta<0$ : اشارة $a$
$\Delta=0$ : اشارة $a(\ln x-Y_1)^2$
$a(\ln x-Y_1)$
بداي

ADEL NAIDJI

## 3/ اشارة عبارة تتضمن الدالة اللوغاريتمية:

• حل المعادلة $A(x)=0$

إذا لم تقبل المعادلة أي حلول في مجال ما فإن:

$A(x)>0$ : إذا كان $A(0)>0$ مثلا

$A(x)<0$ : إذا كان $A(0)<0$ مثلا.

## 4/ اشارة $\ln x$

$x \in ]0,+\infty[$

$0<x<1$ : $\ln x<0$

$x=1$ : $\ln x=0$

$x>1$ : $\ln x>0$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

## 5/ انظر درس اشارة عبارة + حل متراجحات:

## 6/ تطبيق: بعد تعيين $D$

• حل المتراجحات:

+ $\ln(2x-1)>2$

• $\ln(x+2)\leq 5$

- $\ln(x^2-1)<\ln(x)$

. $\ln(x-1)(x+2)\leq 2\ln 2$

. $\ln(x-1)+\ln(x+2)\leq 2\ln 2$

• $\ln(35-8x)>3\ln 2+\ln x^2$

. ادرس اشارة العبارة:

$(1+\ln x)(1-\ln x)(2-\ln x)(e^x-3)(e^{2x}-4)$

ADEL NADJI

# ✍ الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

## 1/ تعريف:

**مجموعة التعريف:** $D_f = \mathbb{R}_*^+ = ]0,+\infty[$

**عبارة $f(x)$:**

$$f : ]0,+\infty[ \longrightarrow ]-\infty,+\infty[$$
$$x \longmapsto y = f(x) = \ln x$$

## 2/ النهايات:

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ | • محور التراتيب مقارب لـ $(C_f)$ عند $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ | • احتمال وجود فرع لانهائي عند $+\infty$<br>$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$<br>$(C_f)$ يقبل فرع لانهائي عند $+\infty$ باتجاه $(xx')$ |

## 3/ الاستمرارية:

الدالة $\ln x$ مستمرة على $]0,+\infty[$

## 4/ الاشتقاقية:

$f$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ودالتها المشتقة هي $f'$ حيث:

$$(\ln x)' = (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

**المماسات:**

• مثلا عند النقطة ذات الفاصلة 1، $(C_f)$ يقبل:

• $(C_f)$ يقبل دوما مماسا موجه $(T)$

**العدد المشتق عند 1:**

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

**التقريب التآلفي عند 1:**

$$\ln(1+h) = h \quad ; h \to 0$$

## 5/ اشارة المشتقة:

$\forall x \in \mathbb{R}_*^+ : f'(x) > 0$ ، $f'(x) = \frac{1}{x}$ ; $x > 0$

الدالة $\ln$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

## 6/ جدول التغيرات:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | | $+$ | | | | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

## 7/ نقط التقاطع مع المحاور:

مع $(xx')$ : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$

$\Leftrightarrow x = e^0 \Leftrightarrow x = 1$

$(C_f) \cap (xx') = \{A(1;0)\}$

مع $(yy')$ : $\not\exists$ لا يمكن حساب $f(0)$ لأن $0$ لا ينتمي إلى مجموعة تعريف الدالة $\ln$

ABDELMAJID

## 8/ اشارة الدالة Ln :

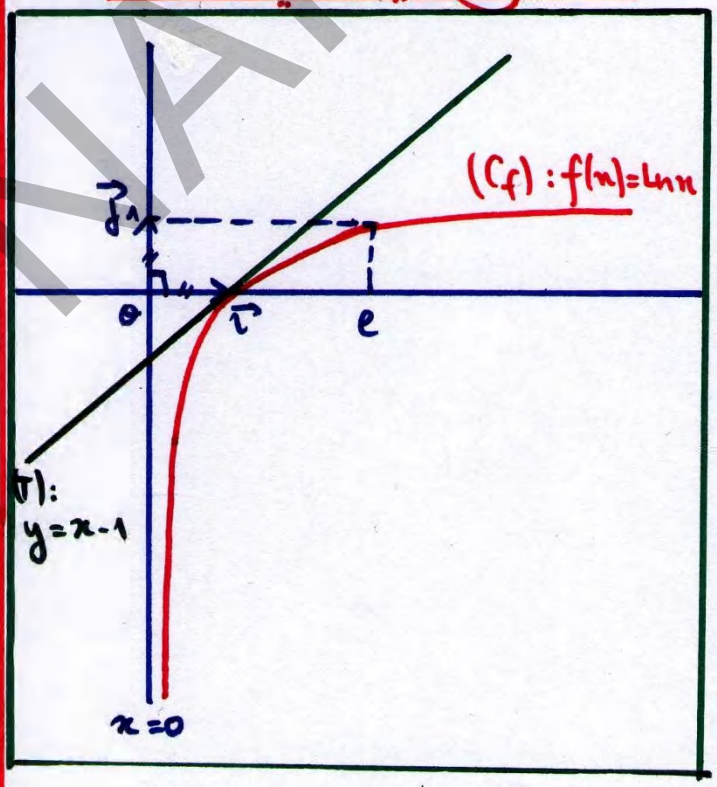
$0 < x < 1$ : $\ln x < 0$

$x \geq 1$ : $\ln x \geq 0$

$\ln x = 0$ $\quad x = 1$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| اشارة $\ln x$ | $\parallel$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| وضع $(C_{\ln})$ و $(xx')$ | $\parallel$ | $(C_f)$ تحت $(xx')$ | $(C_f)$ يقطع $(xx')$ في $A(1,0)$ | $(C_f)$ فوق $(xx')$ | |

## 9/ التمثيل البياني لمنحنى الدالة Ln :




## 10/ الدالة $f = \ln \circ u$

* مجموعة التعريف:

| الدالة | مجموعة التعريف |
|---|---|
| $\ln u(x)$ | $u(x) > 0$ |
| $\ln \lvert u(x) \rvert$ | $u(x) \neq 0$ |
| $\ln (u(x))^n$ زوجي | $u(x) \neq 0$ |
| $\ln (u(x))^n$ فردي | $u(x) > 0$ |
| $[\ln u(x)]^n$ | $u(x) > 0$ |
| $\frac{1}{\ln(u(x))}$ | $u(x) > 0$ و $u(x) \neq 1$ |
| $\ln \left\lvert \frac{A(x)}{B(x)} \right\rvert$ | $A(x) \times B(x) > 0$ |
| $\ln \left\lvert \frac{A(x)}{B(x)} \right\rvert$ | $A(x) \neq 0$ و $B(x) \neq 0$ |

* العبارة: $f(x) = \ln[u(x)]$

* النهايات: (Voir Apres)

* الاستمرارية: إذا كانت $u$ موجبة تماما ومستمرة على مجال $I$ فالدالة $f = \ln u$ مستمرة على نفس المجال $I$

* الاشتقاقية: إذا كانت $u$ موجبة تماما وقابلة للاشتقاق على مجال $I$ فإن الدالة $f = \ln u$ قابلة للاشتقاق على نفس المجال $I$ و:

$$\left[\ln(u(x))\right]' = \left[\ln|u(x)|\right]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

اشارة $u'(x)$
تغيرات $u$

ADEL NADJI

* إشارة $Ln\,u(x)$ :

$u(x)>0$

- $0<u(x)<1$ $\Leftrightarrow$ $Ln\,u(x)<0$
- $u(x)=1$ $\Leftrightarrow$ $Ln\,u(x)=0$
- $u(x)>1$ $\Leftrightarrow$ $Ln\,u(x)>0$
- $u(x)=e$ $\Leftrightarrow$ $Ln\,u(x)=1$

| $u(x)$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Ln\,u(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

## الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس e

* مجموعة التعريف: $]0,+\infty[$

* العبارة $a>0;a\neq 1$:

$$f(x)=\log_a(x)=\frac{Ln\,x}{Ln\,a}$$

* الاشتقاقية:

$$\left(\log_a(x)\right)'=\frac{1}{x\,Ln\,a}$$

**$0<a<1$**

$f'(x)<0$ : $f$ متناقصة تماما

$\log_a x<\log_a y \Leftrightarrow x>y$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

$0<a<1$

**$a>1$**

$f'(x)>0$ اذن $f$ متزايدة تماما

$\log_a x>\log_a y \Leftrightarrow x>y$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

$a>1$

* الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس e:

$$f(x)=Ln\,x$$

* الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس 10:

$$f(x)=\log_{10}(x)=\log x=\frac{Ln\,x}{Ln\,10}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\log 10=1$<br>$\log 10^n=n$ | $\log 1=0$ | الدالة $\log$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ |

$n\leq \log x\leq n+1 \Leftrightarrow 10^n\leq x\leq 10^{n+1}$

ADEL NAIDJI

## ✍ التزايد المقارن (الدالة اللوغاريتمية)

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

## إزالة حالات: نهايات شهيرة:

| حساب النهاية عند | النهاية الشهيرة |
|---|---|
| $+\infty$ | $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$<br>$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$<br>المقلوب ← $+\infty$ |
| $0^+$ | $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$<br>$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0^-$<br>المقلوب ← $-\infty$ |
| عدد $\cdot$ | $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$<br>$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$<br>المقلوب ← 1 |

في هذا الجدول يشترط التماثل

## طرق استعمال هذه النهايات الشهيرة:

### 1/ التحليل باخراج x كعامل مشترك:

#### ← خارج اللوغاريتم

- $\lim_{x\to+\infty} (x-\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$ ($x\to+\infty$, $\frac{\ln x}{x}\to 0^+$)

$= +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} x^3+3x-\ln(1-2x)$ ($x^3+3x\to+\infty$, $-\ln(1-2x)\to+\infty$)

$= \lim_{x\to+\infty} (1-2x)\left(\frac{x^2+3x}{-2x+1} - \frac{\ln(1-2x)}{1-2x}\right)$ ($1-2x\to-\infty$, $\frac{x^2+3x}{-2x+1}\to-\infty$, $\frac{\ln(1-2x)}{1-2x}\to 0^+$)

$= +\infty$

#### ← داخل اللوغاريتم

وذلك إذا كان أس x الذي داخل ln أكبر من أس x الذي خارج اللوغاريتم

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \left[2\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right]$ ($\frac{\ln x}{x}\to 0$, $\frac{1}{x^2}\to 0$)

$= 0$

### 2/ النشر

- $\lim_{x\to 0} (x+2)\ln x = \lim_{x\to 0} x\ln x + 2\ln x$ ($x\ln x\to 0$)

$= -\infty$

- $\lim_{x\to 0} (x^2+x)\ln x = \lim_{x\to 0} x^2\ln x + x\ln x$ ($x^2\ln x\to 0$, $x\ln x\to 0$)

$= 0$

ADEL NAIDJI

## 3/ توحيد المقامات

- $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^{>}} \dfrac{1}{2x-1} + \ln(2x-1)$

$= \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^{>}} \dfrac{1 + (2x-1)\ln(2x-1)}{2x-1} = +\infty$ ($1 \to 1$, $(2x-1) \to 0^+$, $\ln(2x-1) \to -\infty$, $(2x-1)\ln(2x-1) \to 0$)

## 4/ انشاء التماثل

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+2)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+2)}{x+2} \times \dfrac{x+2}{x}$ ($\ln(x+2) \to +\infty$, $x+2 \to +\infty$, $\dfrac{x+2}{x} \to 1$)

$= 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{2x^2 - x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{2x^2-x+3} \right)$ ($\ln x \to +\infty$, $x \to +\infty$, $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$, $\dfrac{x}{2x^2-x+3} \to 0$)

$= 0$

## 5/ استخدام خواص اللوغاريتم

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln x - \ln(x+1)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2) - \ln(x+1)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left( \dfrac{x^2}{x+1} \right)$ ($\dfrac{x^2}{x+1} \to +\infty$)

$= +\infty$

## 6/ باستخدام تعريف العدد المشتق

- $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e} = (\ln x)'_{x=e}$

$= \left(\dfrac{1}{x}\right)_{x=e} = \dfrac{1}{e}$

## 7/ تبديل المتغير

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ (\ln x)^2 - \ln x + 3 \right]$

$y \to +\infty$ عليه $x \to +\infty$ : $y = \ln x$

$= \lim\limits_{y \to +\infty} y^2 - y + 3$

$= +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[ (\ln x)^2 - \ln x + 3 \right]$

$= \lim\limits_{y \to -\infty} y^2 - y + 3$

$= +\infty$

## 8/ الانتقال بين اللوغاريتمية والأسية

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x} = \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{y^n}{e^y} = 0^+$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \times (\ln x)^n = \lim\limits_{y \to -\infty} e^y \times y^n$

$= \lim\limits_{y \to -\infty} y^n e^y = 0$

وذلك بوضع $y = e^x$

## 9/ باستعمال خواص ln ⇐ هامة جدا

- العبارة التي داخل ln فيها الدالة $e^x$.
- تستعمل الطريقة التالية لازالة ح ع ت وكذلك اظهار المستقيم المقارب المائل.

$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$

$= \ln\left[e^{2x}\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)\right]$

$= \ln e^{2x} + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

$f(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$

- $(D): y = 2x$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ABDELNAIDJI

# أسئلة نظرية حول الدوال الأسية و اللوغاريتمية

ADEL NADJI

# الدوال الأسية واللوغاريتمية (أسئلة نظرية).

## 1/8 اثبات النهايات الشهيرة:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$f(x) = e^x - x \quad ; D_f = [0,+\infty[$

$f'(x) = e^x - 1 > 0 \quad \forall x \in D_f$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ |

$e^x > x \Leftarrow e^x - x > 0 \Leftarrow f(x) > 0$

$e^x > x$ لكن $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

اذن $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

---

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0^+$

---

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x-e^0}{x-0} = (e^x)'_{x=0}$

$= e^0 = 1$

---

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} \quad ; D_f = [0,+\infty[$

$f'(x) = e^x - x > 0 \quad \forall x \in D_f$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ |

$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} \Leftarrow e^x - \frac{x^2}{2} > 0 \Leftarrow f(x) > 0$

$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ لكن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

اذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

---

$$\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0^-$$

$\lim_{x\to-\infty} x e^x = \lim_{x\to-\infty} -\left(\frac{-x}{e^{-x}}\right)$

$= \lim_{y\to+\infty} -\frac{y}{e^y} \qquad y = -x$

$= 0^-$

---

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

A عدد حقيقي كبير جدا ($A \to +\infty$) حيث $\ln x > A$

هل يوجد عدد حقيقي كبير جدا B يحقق $x > B$ ؟

أخذ B

سقة.

ADEL NAIDJI

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^{\ln x^n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^{n\ln x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x-n\ln x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(1-\frac{n\ln x}{x}\right)}$$

$x\to+\infty$, $\frac{n\ln x}{x}\to 0$

$$= +\infty$$

---

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n}{e^{-x}} \quad / y=-x$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{(-y)^n}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} (-1)^n \frac{y^n}{e^y}$$

$\frac{y^n}{e^y}\to 0^+$

- $n$ فردي : $0^-$
- $n$ زوجي : $0^+$

---

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y^{\frac{1}{n}}}{y} \quad / y=x^n$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{\ln y}{y}$$

$\frac{\ln y}{y}\to 0^+$

$$= 0^+$$

---

$$\lim_{x\to0^+} x^n \ln x = 0^-$$

$$\lim_{x\to0^+} x^n \ln x = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^n \ln\left(\frac{1}{y}\right) \quad / y=\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^n} x - \ln y = \lim_{y\to+\infty} -\frac{\ln y}{y^n}$$

$$= 0^-$$

---

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = \lim_{y\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{y}\right) \; ; \; y=\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} -\ln(y) = -\infty$$

---

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0^+ \quad / y=\ln x$$

---

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0^-$$

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{y\to-\infty} y e^y = 0^- \quad / y=\ln x$$

---

$$\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1}$$

$$= (\ln x)'_{x=1} = \left(\frac{1}{x}\right)_{x=1} = 1$$

---

$$\lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

ضع $h = x-1$

$$\lim_{h\to0} \frac{\ln(h+1)}{h} = 1$$

ADEL NADJI

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to0^+} e^{\frac{1}{y}\ln(1+y)}$$

بحيث $y=\frac{1}{x}$

$$= \lim_{y\to0^+} e^{\frac{\ln(y+1)}{y}} \quad (\frac{\ln(y+1)}{y}\to 1) \quad = e$$

## 2/ اثبات خواص أخرى لـ $e^x$ و $\ln x$:

$$e^x > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$e^x = e^{\frac{x}{2}\times 2} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\exp(x) = e^x$$

$$\exp x = \exp(1\times x) = (\exp 1)^x$$

$\exp 1 = e = 2{,}71\ldots$ من التعريف نرمز لـ

اذن $\exp x = e^x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$f(x) = e^{\ln x} \Rightarrow f'(x) = (\ln x)' e^{\ln x}$

$= (\ln x)' \times x$

$(\ln x)' \times x = 1$

$(\ln x)' = 1$

$$(\ln u)' = (\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

$(\ln|u|)'$

- $u>0$ : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- $u<0$ $(\ln -u)' = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u}$

## Equations fonctionnelles

### دوال تحول مجموع لجداء:

الدوال غير المعدومة $f$ والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والتي تحقق من أجل كل عددين حقيقيين $x$ و $y$

$$f(x+y) = f(x)\times f(y)$$

هي الدوال

$$x \longmapsto e^{kx} \; ; k\in\mathbb{R}$$

### دوال تحول الجداء لمجموع:

كمثال عن هذه الدوال نأخذ الدوال

$\ln x$ , $\log x$ , $\log_a x$ ...

$$\ln(a\times b) = \ln a + \ln b$$

ABDELNADJI

## 3/ الدوال العكسية:

| $f$ | $f^{-1}$ |
|---|---|
| $e^x$ | $\ln x$ |
| $a^x$ | $\log_a x$ |
| $10^x$ | $\log x$ |
| $x^n$ | $\sqrt[n]{x}$ |

* $f\left[f^{-1}(x)\right] = x$
* $(C_f)$ و $(C_{f^{-1}})$ متناظران بالنسبة للمنصف الأول $(\Delta): y = x$

## 4- نظرة عن الدالة الجذر النوني:

* مجموعة التعريف: $[0, +\infty[$

* العبارة: $n \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln x} \quad x \neq 0$$

* الاشتقاقية:

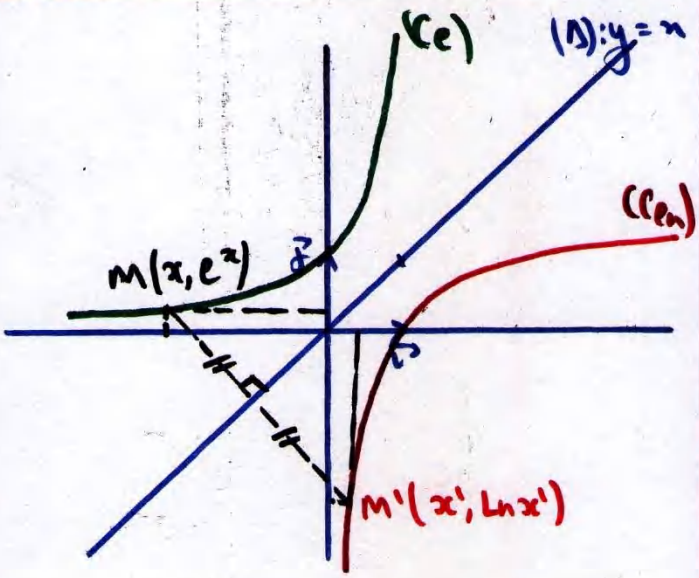
$f$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ (غير قابلة للاشتقاق عند 0) ودالتها المشتقة $f'$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}\ln x} = \frac{1}{nx}$$

* $f'(x) > 0$
* الدالة الجذر النوني متزايدة تماما على $[0, +\infty[$
* اصطلاحا: $f(0) = 0$

## 5/ اثبات بعض التناظرات:

**$(C_e)$ و $(C_{\ln})$ متناظران بالنسبة للمنصف الأول**




$M'(b,a) \in (C_{\ln}) \iff M(a,b) \in (C_e)$

برهان:

$b = e^a \iff M(a,b) \in (C_e)$

$\ln b = a$

$M(b,a) \in (C_{\ln}) \iff$

اذن لكل نقطة $M(a,b) \in (C_e)$ نقطة أخرى $M'(b,a)$ من $(C_{\ln})$

اثبات أن $M'$ نظيرة $M$ بالنسبة للمنصف الأول

$M(a,b)$ / $M'(b,a)$ / $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} b-a \\ a-b \end{pmatrix}$

$(\Delta): y = x$ / $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v} = (b-a) + (a-b) = 0$

اذن $(\Delta)$ عمودي على $(MM')$

لتكن $I$ منتصف $[MM']$ $I\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2}\right)$

$x_I = y_I \Rightarrow I \in (\Delta)$

اذن $(\Delta)$ محور $[MM'] \Leftarrow M'$ صورة $M$ بالنسبة ل

$(C$ تناظرها $(\Delta)$

$(C$ متناظران

ADEL NAIDJI

## $(C_{a^x})$ و $(C_{(\frac{1}{a})^x})$ متناظران بالنسبة لـ (yy')




$f(x)=a^x$

$g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$

$g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x=e^{\ln\left(\frac{1}{a}\right)^x}=e^{x\ln\left(\frac{1}{a}\right)}$

$=e^{-x\ln a}=e^{\ln a^{-x}}=a^{-x}=f(-x)$

$g(x)=f(-x)$ $\Leftrightarrow$ $(C_g)$ نظير $(C_f)$ بالنسبة لـ (yy').

## I/ دوال تؤول دراستها لدراسة دوال أخرى:

### • الدالة تجب الزائدية:

معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

دالة زوجية.

### • الدالة جب الزائدية:

معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

دالة فردية.

N.B: عند $+\infty$: $(C_{ch})$ و $(C_{sh})$ منحنيان متقاربان.

ADEL NAIDJI

# الدوال الأصلية

ADEL NAIDJI

# الـــدوال الأصليـــة

## 1/ مفهوم الدالة الأصلية :

F دالة أصلية لـ f على مجال I معناه :
- ← F قابلة للاشتقاق على I
- ← $F'(x) = f(x)$

مثال :
$f(x) = 2x - 3$ , $F(x) = x^2 - 3x + 1$
بين أن F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$

## 2/ مجموعة الدوال الأصلية لدالة :

f تقبل دوال أصلية على مجال I إذا وفقط إذا كانت مستمرة على هذا المجال

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على مجال I فإن كل الدوال $F + C$ هي دوال أصلية لـ f على I

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f والتي تحقق $F(x_0) = y_0$

مثال :
$f(x) = 2x + \cos x$
- اثبت أن f تقبل دوال أصلية على $\mathbb{R}$
- عين مجموعة الدوال الأصلية لـ f
- عين الدالة الأصلية لـ f والتي تحقق $F(\pi) = -1$

لإثبات أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة ، توجد طريقتان :
- ← F و G قابلتان للاشتقاق على I و $F'(x) = G'(x)$
- ← $F(x) - G(x) = C^{te}$

مثال :
$F(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$ $G(x) = \frac{2x - 1}{x - 2} + x$
اثبت أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة .

## 3/ الدوال الأصلية لدوال مألوفة :

دوال عددية :

| f | F |
|---|---|
| $a$ | $ax + C$ |
| $x^n$ ; $n \neq -1$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| ex : $x$ | $\frac{1}{2}x^2 + C$ |
| $\frac{1}{x^n}$ ; $n \neq 1$ | $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ |
| ex : $\frac{1}{x^2}$ | $-\frac{1}{x} + C$ ; $x \neq 0$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln x + C$ ; $x > 0$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x} + C$ ; $x > 0$ |

ADEL NADJI

## دوال مثلثية:

| f | F |
|---|---|
| $\sin x$ | $-\cos x + C$ |
| $\cos x$ | $\sin x + C$ |
| $1+tg^2 x$ <br> $= 1/\cos^2 x$ | $\tan x + C$ |
| $\cos(ax+b)$ | $\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$ |
| $\sin(ax+b)$ | $-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$ |

## دوال أسية ولوغاريتمية:

| f | F |
|---|---|
| $e^x$ | $e^x + C$ |
| $e^{ax+b}$ | $\frac{1}{a}e^{ax+b} + C$ |
| $a^x$ | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ |
| $\ln x$ تجزئة | $x\ln x - x + C$ |
| $\ln(ax+b)$ تجزئة | $\frac{1}{a}(ax+b)\ln(ax+b) - x + C$ |
| $\frac{\ln(x+\alpha)}{x+\alpha}$ $U'U$ | $\frac{1}{2}[\ln(x+\alpha)]^2 + C$ |
| $\frac{1}{x\ln x}, \frac{U'}{U}$ | $\ln[\ln x] + C$ |
| $\frac{a}{(ax+b)\ln(ax+b)}$ | $\ln[\ln(ax+b)] + C$ |

قواعد

## 14 عمليات على الدوال الأصلية:

| f | F |
|---|---|
| $u' u^n, n\neq -1$ <br> ex: $u'u$ | $\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ <br> $\frac{u^2}{2} + C$ |
| $\frac{u'}{u^n}; n\neq 1$ <br> ex: $\frac{u'}{u^2}$ | $\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + C$ <br> $\frac{-1}{u} + C \; ; u\neq 0$ |
| $\frac{u'}{u}$ | $\ln\lvert u\rvert + C \; ; u\neq 0$ |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u} + C \; ; u>0$ |
| $u' e^u$ | $e^u + C$ |

| | | |
|---|---|---|
| $u+v$ | $U+V+C$ | |
| $k\cdot u'$ | $k\cdot U + C$ | |

| | | |
|---|---|---|
| $u\cdot v'$ | $U\cdot V$ | ⚠ Jamais |
| $\frac{u'}{v'}$ | $\frac{U}{V}$ | |

**N.B** : لايجاد الدالة الأصلية لجداء دالتين، نستعمل التكامل بالتجزئة في بعض الأحيان (Voir Apres).






ADEL NAIDJI

## 5/ تقنيات لايجاد الدوال الأصلية:

### 1/ اظهار أحد الأشكال $u'u^n$ , $\frac{u'}{u^n}$ ... وذلك بالضرب والقسمة في أعداد معينة:

$f(x) = (x+1)(x^2+2x+5)^2$

$f(x) = \frac{1}{2}(2x+2)(x^2+2x+5)^2$

$f(x) = \frac{1}{2} u'u^2$ tq: $u(x) = x^2+2x+5$

$F(x) = \frac{1}{6}(x^2+2x+5)^3 + C$

---

$g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{2} \times \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$

$g(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{3}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$

tq $u(x) = x^2+2$

$G(x) = 3\sqrt{x^2+1} + C$

### 2/ تغيير شكل الدالة في التمرين قبل حساب دالتها الأصلية:

مثال: $f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ:

$f(x) = \frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x-1}$

عين a و b بحيث $f(x) = e^x + a + \frac{be^x}{e^x-1}$

ثم جد دالة أصلية للدالة $f$.

### 3/ دوال ناطقة:

يجب ان نغير شكلها كمايلي:

$$* \frac{ax+b}{cx+d} = \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$$

$$* \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x+a}$$

$$* \frac{f(x)}{g(x) \times h(x)} = \frac{\alpha}{g(x)} + \frac{\beta}{h(x)}$$

## 4/ دوال مثلثية:

$$\cos u \times \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u-v) + \cos(u+v)]$$

$$\sin u \times \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$$

$$\sin u \times \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u-v) + \sin(u+v)]$$

### $\sin^n x \cos^m x$, $\cos^n x$, $\sin^n x$

نحول العبارة إلى الشكل $u'u^n$ وذلك باستعمال الدساتير التالية:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}[1+\cos 2x]$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}[1-\cos 2x]$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ (نادرا)}$$

## 5/ ايجاد علاقة بين $f$ و $f'$ و $f''$:

لتكن $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$f(x) = (2x^2-7x+5)e^x$

تحقق أن $f(x) - 2f'(x) + f''(x) = 4e^x$.

عين دالة أصلية لـ $f$.

$F(x) = 2f(x) - f'(x) - 4\int e^x$

$F(x) =$

ADEL NADJI

## 6/ تطبيقات:

عين مجموعة الدوال الأصلية لـ f في كل حالة

* $f(x)=(x^2+3)(2x-1)$
* $f(x)=x-\frac{3}{x}$
* $f(x)=x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$
* $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$
- $f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{x^2}$
- $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$
- $f(x)=\frac{x^3}{x^4+1}$
- $f(x)=\frac{1}{x}\ln^2 x$
- $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}$
- $f(x)=\frac{2x^2+10x+9}{x^2+3x+2}$
$=2+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x+2}$
- $f(x)=\frac{2x^4+13x^2+x+18}{(x+1)(x^2+3)^2}$
$=\frac{2}{x+1}+\frac{x}{(x^2+3)^2}$
* $f(x)=\cos^2(2x)=\frac{1}{2}(1+\cos 4x)$

- $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$
- $f(x)=\frac{3}{x+1}$
+ $f(x)=4\sin 2x+2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$
- $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+3}$
- $f(x)=\frac{e^x}{e^x+2}$
- $f(x)=\frac{2\cos x}{\sin x}$
- $f(x)=\frac{1}{(x+1)^4}$
- $f(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^3}$
* $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$
- $f(x)=\frac{x^2+3x}{x-4}$
- $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

+ $f(x)=\cos^3 x=(1-\sin^2 x)\cos x$
- $f(x)=\cos^2 x\sin x=-u^2u'$
+ $f(x)=\sin^2 x\cos^3 x$
$=(\sin x\cos x)^2\cos x$
$=\left[\sin^2 x(1-\sin^2 x)\right]\cos x$
- $f(x)=\sin^4 x=(\sin^2 x)^2$
$=\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2$
$=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)$
$=\frac{1}{4}\left[1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]$

+ $f(x)=\cos 2x\cdot\cos 4x$
- $f(x)=\sin 3x\cdot\sin x$
- $f(x)=\sin 3x\cdot\cos 2x$
- $f(x)=\cos^2 x\cdot\sin^2 x$
$=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)$
$=\frac{1}{4}(1-\cos^2 2x)$
$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]$

## 6/ دراسة دالة أصلية دون حساب:

F دالة معرفة بـ: $F(a)=b$ ← $f(x)=\ldots\ldots$ ← $F'(x)=f(x)$ ; $F(a)=0$

الهدف دراسة تغيرات F دون حساب.

تمارين:



ADEL NADJI

# المعادلات التفاضلية

ADEL NADJI

# المعادلات التفاضلية .

## 1/ مفهوم معادلة تفاضلية

* نسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تحتوي على $x$ ، $y$ ، $y'$ ، $y''$ ، ... ، $y^{(n)}$ حيث $y = f(x)$ و $y'$ ، $y''$ ، ... ، $y^{(n)}$ هي المشتقات المتعاقبة للدالة $f$ .

* المجهول في المعادلات التفاضلية هو الدالة $y = f(x)$

* مجموعة حلول المعادلة التفاضلية هي كل الدوال التي تحقق هذه المعادلة التفاضلية .

## 2/ معادلات تفاضلية تحتوي $y'$ ، $y$ ... فقط

| المعادلة التفاضلية | الحل العام |
|---|---|
| $y' = ay \; ; \; a \neq 0$ | $y = Ce^{ax}$ |
| $y' = ay + b \; ; a \neq 0$ | $y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ |
| $y'' = -w^2 y$ | $y = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$ |

أمثلة: حل المعادلات التفاضلية التالية:

1/ $3y' - 2y = 0$

2/ $2y' + y = 1$

3/ $y'' + \pi^2 y = 0$

الحل:

1/ $y = Ce^{\frac{2}{3}x}$

2/ $y = Ce^{-\frac{1}{2}x} + 1$

3/ $y = C_1 \cos \pi x + C_2 \sin \pi x$

## 3/ معادلات تفاضلية باستعمال الدوال الأصلية

$f$ دالة مستمرة على $I$ ، $F$ دالتها الأصلية .
$F$ دالة مستمرة على $I$ ، $G$ دالتها الأصلية .

| المعادلة التفاضلية | الحل العام . |
|---|---|
| $y' = f(x)$ | $y = F(x) + C$ |
| $y'' = f(x)$ | $y = G(x) + C_1 x + C_2$ |

أمثلة: حل المعادلات التفاضلية التالية:

1/ $y' = \frac{1}{x^2}$

2/ $y'' = \sin x$

الحل:

1/ $y = -\frac{1}{x} + C$

2/ $y = -\sin x + C_1 x + C_2$

## 4/ معادلات تفاضلية تحتوي $y$ ، $y'$ ، دالة $f$

| المعادلة التفاضلية | الحل العام . |
|---|---|
| $y' - ay = f(x)$ | $y = Ce^{ax}$ + الحل الخاص |

حتى تكون حل خاص

ADEL NADJI

## مثال:

| |
|---|
| $(E): y' + 2y = 6x - 1$ |
| 1/ تأكد أن $p(x) = 3x - 2$ حل خاص لـ $(E)$ |
| ب- عين $p(x)$ كثير حدود من الدرجة الأولى والذي هو حل خاص للمعادلة $(E)$ |
| 2/ بين أن $y$ حل للمعادلة $(E)$ معناه $p - y = z$ حل للمعادلة التالية $(E'): z' + 2z = 0$ |
| 3/ حل المعادلة $(E')$ |
| 4/ بين أن حلول المعادلة $(E)$ تكتب على الشكل $y = z + p$ |
| 5/ استنتج حلول المعادلة $(E)$ |

## الحل:

**السؤال 1 p**

$p$ حل لـ $(E)$ معناه $p' + 2p = 6x - 1$ !!

$$p'(x) + 2p(x) = 3 + 2(3x - 2)$$
$$= 3 + 6x - 4$$
$$= 6x - 1$$

محققة

اذن $p(x) = 3x - 2$ حل خاص لـ $(E)$.

**السؤال 1 ب:** ايجاد $p(x)$

$p(x) = ax + b$ حل لـ $(E)$ معناه

$$p'(x) + 2p(x) = 6x - 1$$
$$a + 2(ax + b) = 6x - 1$$
$$a + 2ax + 2b = 6x - 1$$
$$(2a)x + (a + 2b) = 6x - 1$$
$$[2a = \quad \quad [a = 3$$

$p(x) = 3x - 2$

**السؤال 2:**

$y$ حل لـ $(E)$: $y' + 2y = 6x - 1$

$p$ حل خاص لـ $(E)$: $p' + 2p = 6x - 1$

بالطرح نجد: $y' - p' + 2y - 2p = 0$

$$(y - p)' + 2(y - p) = 0$$

نسمي $z = y - p$، منه فان

$z = y - p$ حل للمعادلة $(E'): z' + 2z = 0$

**السؤال 3:**

$$(E'): z' = -2z \Rightarrow z = Ce^{-2x}$$

**السؤال 4:** اثبات أن $y = z + p$

لدينا $z = y - p$ اذن $y = z + p$.

**السؤال 5:** حلول المعادلة $(E)$:

حلول المعادلة $(E)$ هي $y = z + p$

حيث $\begin{cases} z = Ce^{-2x} \\ p = 3x - 2 \end{cases}$

اذن $\boxed{y = Ce^{-2x} + 3x - 2}$

## 5/ تعيين حل خاص بمعرفة الحل العام و شرط

* كل معادلة تفاضلية تقبل لا نهاية من الحلول التي لها نفس الشكل المشترك (الحل العام) بتغير الثوابت $C, C_1, C_2, \ldots$ نحصل على حلول مختلفة.

* في بعض الأحيان يضاف لكل المعادلة التفاضلية شرط من أجل تعيين الثابت $C$ وايجاد الحل الخاص.

شروط المعطاة

ABDELNADJI

## أمثلة:

1/ عين الحل الخاص للمعادلة $2y'+y=1$ حيث $y(-1)=2$

2/ عين الحل الخاص لـ $y''+\pi^2 y=0$ حيث $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$ و $y'\left(\frac{2}{3}\right)=0$

## الحل:

**السؤال ①**

$y=Ce^{-\frac{1}{2}x}+1 \Leftrightarrow 2y'+y=1$

$\begin{cases} y(-1)=Ce^{\frac{1}{2}}+1 \\ y(-1)=2 \end{cases} \Rightarrow Ce^{\frac{1}{2}}+1=2$

$\Rightarrow C=e^{-\frac{1}{2}}$

$$\boxed{y=e^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}+1}$$ اذن

**السؤال ②:**

$\begin{cases} y=C_1\cos\pi x+C_2\sin\pi x \\ y'=-\pi C_1\sin\pi x+\pi C_2\cos\pi x \end{cases}$

$\begin{cases} y\left(\frac{1}{2}\right)=C_2 \\ y'\left(\frac{2}{3}\right)=-\pi C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi C_2\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2}{3}=C_2 \\ 0=-\pi C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi C_2\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

$\begin{cases} C_2=\frac{2}{3} \\ C_1=\frac{-2}{3\sqrt{3}} \end{cases}$

$$\boxed{y=\frac{-2}{3\sqrt{3}}\cos\pi x+\frac{2}{3}\sin\pi x}$$ اذن

## 6/ تمارين

**تمرين ①: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التفاضلية**

1/ $y'=x^3+3x^2-2$

2/ $y'=e^{2x+1}+\frac{x}{x^2+1}$

3/ $y'=2\cos^2 x+\sin 2x$

4/ $y''=-3x^2+2x+1$

5/ $y''=x+1+e^{-x}$

6/ $y''=2\sin^2 x+2x$

7/ $(x^2+1)y'=x \;/\; y(+2)=\ln 10$

8/ $y'-2y=0 \;/\; y(1)=e^2$

9/ $y''=-y$

10/ $y''+4y=0$

**تمرين 2:**

$(E)\ldots\ y'+y=\sin 2x$

عين a و b حتى تكون الدالة u حل خاص لـ (E) حيث $u(x)=a\cos 2x+b\sin 2x$، ثم عين الحل العام لـ (E) والحل الخاص من أجل: $y(0)=\frac{1}{2}$

**تمرين 3:**

$(E): 2y'-y+2=0$

- برهن أن (E) تقبل الدالة الثابتة كحل خاص ثم جد الحل العام لـ (E)
- عين الحل الخاص الذي يحقق $y(0)=3$

ADEL NAIDJI

# الحساب التكاملي

ADEL NADJI

# الحساب التكاملي

## 1/ تعريف التكامل: "المحدود"

f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ و F دالة أصلية لها على هذا المجال (أي دالة أصلية لـ f)

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

التكامل من a إلى b لـ f(x) تفاضل x
(a هو الحد الأسفل و b الحد الأعلى)

أمثلة: احسب التكاملات التالية:

1/ $\int_{-1}^{2}(-3x^2+1)dx$

2/ $\int_{0}^{1} e^{2x-1}dx$

3/ $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx$

4/ $\int_{-3}^{-1}(x^2-4x+1)dx$

5/ $\int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{e^x}{e^x+3}dx$

6/ $\int_{0}^{1}(2x+e^{-x+1})dx$

الحل:

$$I = \int_{-1}^{2}(-3x^2+1)dx = \left[-x^3+x\right]_{-1}^{2}$$
$$= (-2^3+2) - (-(-1)^3-1)$$
$$= -6 - 0$$
$$= -6$$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= (-\cos\pi) - (-\cos -\pi)$$
$$= 1 - 1$$

## 2/ خواص التكامل

* من التعريف:

$$* \int_a^a f(x)dx = 0$$
$$* \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
$$* \int_a^b k\,dx = k(b-a)$$
N.B: $\int_a^b dx = (b-a)$

* علاقة شال:

$$* \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

* خطية التكامل:

$$* \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$* \int_a^b k f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

* تشفعية دالة:

$$* \int_{-a}^a f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f \text{ فردية}$$
$$* \int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \Leftrightarrow f \text{ زوجية}$$

ADEL NAIDJI

## * إشارة التكامل + المقارنة:

$x$ عدد كيفي من المجال $[a,b]$

* $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq 0$

$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ ⚠ $a \leq b$ ⟸

* $\forall x \in [a,b] : f(x) < g(x)$

$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$ ⟸ ⚠ $a \leq b$

## * المتغير عند حساب التكامل:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt \ldots$$

المتغير عند إجراء التكامل و الأشتقاق هو $x$ وما سواه من الأحرف يعتبر ثابتا

مثال:

* $\int_0^2 (2x+2)\,dx = \left[x^2+2x\right]_0^2 = 8$
* $\int_0^2 (2t+2)\,dt = \left[t^2+2t\right]_0^2 = 8$
* $\int_0^2 \underbrace{(2x+2)}_{c^{te}}\,dt = (2x+2)(2-0) = 4x+4$
* $\int_0^2 (2x)\,dx = \left[x^2\right]_0^2 = 4$
* $\int_0^2 2x\,dy = 2x\left[y\right]_0^2 = 4x$
* $\int_0^2 (2x+t)\,dt = \left[(2x)t + \frac{1}{2}t^2\right]_0^2$

## * استقلالية حساب التكامل المحدود عن اختيار الدالة الأصلية

$f$ دالة مستمرة على $[a,b]$

$F, G, H$ دوال أصلية لـ $f$ على $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = \left[G(x)\right]_a^b = \left[H(x)\right]_a^b = \ldots$$

مثال:

احسب $\int_0^2 f(x)$ حيث $f(x) = 2x+2$

$\begin{cases} F(x) = x^2+2x \\ G(x) = x^2+2x+100 \end{cases}$

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_0^2 = \left[x^2+2x\right]_0^2 = (2^2+2\times 2) - (0^2+2\times 0) = 8$$

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx = \left[G(x)\right]_0^2 = \left[x^2+2x+100\right]_0^2 = (2^2+2\times 2+100) - (0^2+2\times 0+100) = 8$$

## * التكامل غير المحدود:

$$* \int f(x)\,dx = F(x)+C \;/\; \int f' = f \;/\; \int f'' = f'$$

مثال:

$$\int (2x+2)\,dx = x^2+2x+C$$

ADEL NAIDJI

## 3/ تقنيات لحساب التكامل:

### 1/ باستعمال خواص التكامل

**فكرة ① : علاقة شال (في حال وجود قيمة مطلقة)**

① احسب $I = \int_0^3 |x^2-1|\,dx$

من أجل كل $x$ من $[0;1]$ : $x^2-1 \leqslant 0$

$|x^2-1| = -x^2+1$

من أجل كل $x$ من $[1;3]$ : $x^2-1 \geqslant 0$

$|x^2-1| = x^2-1$

$$I = \int_0^3 |x^2-1|\,dx = \int_0^1 |x^2-1|\,dx + \int_1^3 |x^2-1|\,dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2+1)\,dx + \int_1^3 (x^2-1)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^2-1)\,dx + \int_1^3 (x^2-1)\,dx$$

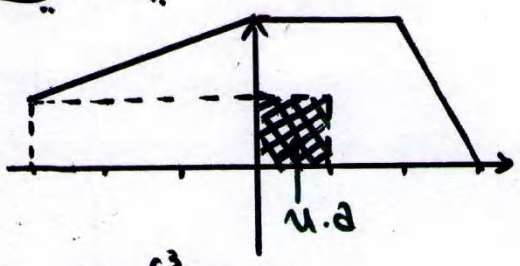
$$= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3$$

$$= \frac{2}{3} + 6 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{22}{3}$$

② بنفس الطريقة احسب $\int_0^6 |x^2-4x|\,dx$

**فكرة ② العلاقة بين التكامل والمساحات**

$f$ دالة تمثيلها البياني كمايلي




احسب $I = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx = S\begin{pmatrix} x=-3 \;;\; x=3 \\ y=0 \;;\; y=f(x) \end{pmatrix}$

$$= \frac{(2+1)\times 3}{2} + \frac{(3+2)\times 2}{2}$$

$$= \frac{19}{2}\ u.a \quad (u.a = 1cm \times 1cm)$$

$$= \frac{19}{2}$$

التكامل = المساحة مكتوبة بالوحدة u.a

**فكرة ③ ايجاد تكامل بمعرفة تكاملات أخرى**

مثال ①: $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$ , $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$

احسب $I$ , $I+J$ واستنتج $J$.

* $I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

* $I+J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^3+x}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{x^2+1}dx$$

$$= \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

* $J = (I+J) - I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

$$\boxed{J = \frac{1}{2}(1-\ln 2)}$$

مثال ②: $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$ , $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$

احسب $I$ و $J$.

ADEL NADJI

$$+I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$$

$$+I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2x)\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} I+J=\frac{\pi}{4} \\ I-J=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I=\frac{\pi+2}{8} \\ J=\frac{\pi-2}{8} \end{cases}$$

## 2/ باستعمال القيمة المتوسطة

### ① تعريف:

$f$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ ؛ القيمة المتوسطة للدالة $f$ على المجال $[a,b]$ هي:

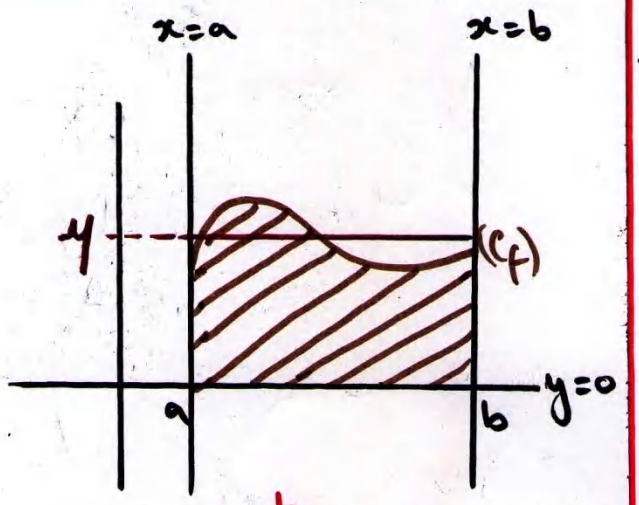
$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

### ② التفسير البياني:

$\mu$ هي ارتفاع المستطيل الذي:

← قاعدته $b-a$

← له نفس المساحة المحصورة بين $x=a$ و $x=b$ و $y=0$ و المنحنى $(C_f)$




$$\mu(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

### ③ حصر القيمة المتوسطة

① إذا كان $\forall x\in[a,b]: m\leq f(x)\leq M$

m ← minorant  M ← Majorant

فإن $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\leq M(b-a)$

② إذا كان $\forall x\in[a,b]: |f(x)|\leq m$

فإن $-m\leq f(x)\leq m$

و $m(a-b)\leq\int_a^b f(x)\leq m(b-a)$

### ④ تطبيق رقم ①

$$I=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}\,dt$$

بمعارفنا لا يمكن ايجاد قيمة مضبوطة لـ $I$ لكن يمكن ايجاد حصر له.

1/ بين انه $\forall x\in[0;1]$ فإن $0<\frac{1}{t^2+1}\leq 1$

ABDELNADJI

## تطبيق رقم ②

$$f(x) = \frac{x e^x}{1+e^x}$$

• بين انه من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$

$$\frac{e^x}{1+e^x} \leqslant f(x) \leqslant x$$

. استنتج حصرا لـ: $I = \int_0^2 f(x)$

## تطبيق رقم ③

$f$ دالة معرفة على $]-1, +\infty[$ بـ:

$$f(x) = 1 + \ln(x+1)$$

• ادرس اتجاه تغير $f$ على المجال $[0 ; e-1]$

. استنتج حصرا لـ $f$

. استنتج حصرا لـ $I = \int_1^{e-1} f(x)\,dx$

## تطبيق رقم ④

$f$ الدالة المعرفة على $[-1;1]$ بـ $f(x) = x^2$

. احسب $\mu$ القيمة المتوسطة لـ $f$ على المجال $[-1;1]$، فسر بيانيا.

# 3/ الكاملة بالتجزئة

## مبرهنة

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = \left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

## برهان

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx$$

$$[uv]_a^b = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx$$

$$\int_a^b u\cdot v'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$$

## طريقة اختيار $u$ و $v'$

| | |
|---|---|
| $u' =$ | $u =$ اللوغاريتمية |
| $v =$ | $v' =$ الأية / الجبرية |

## أمثلة عن الكاملة بالتجزئة في التكامل غير المحدود (لحساب الدوال الأصلية)

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

* $\int \ln x\,dx$

$$\begin{cases} u = \ln x \\ v' = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{cases}$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\times x\,dx$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$\ln x$ ...

ABDELNADJI

## أمثلة عن الحالات المتكاملة بالتجزئة في التكامل المحدود

$$I = \int_0^1 x e^x$$

$$\begin{cases} u = x \\ v' = e^x \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 1 \\ v = e^x \end{cases}$$

$$I = \left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x$$

$$I = \left[x e^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1$$

$$I = e - (e - e^0)$$

$$I = 1$$

---

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin x$$

$$\begin{cases} u = x \\ v' = \sin x \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$J = \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x$$

$$J = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi/3} + \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$J = \frac{-\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

---

احسب بالتجزئة، التكاملات التالية

1/ $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$

2/ $\int_{-1}^0 (x+1)e^x dx$

3/ $\int_1^2 (x^2+x)\ln x \, dx$

4/ $\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$

5/ $\int_0^{\pi/4} (3x+2)\sin 2x \, dx$

6/ $\int_0^1 x(e^x - e^{-x}) dx$

---

* $\int \ln(x+\alpha) dx$

$$\begin{cases} u = \ln(x+\alpha) \\ v' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = \frac{1}{x+\alpha} \\ v = x \end{cases}$$

$$\int \ln(x+\alpha) dx = x\ln(x+\alpha) - \int \frac{x}{x+\alpha}$$

$$= x\ln(x+\alpha) - \int \left(1 - \frac{\alpha}{x+\alpha}\right) dx$$

$$= x\ln(x+\alpha) - \int dx + \alpha \int \frac{1}{x+\alpha} dx$$

$$= x\ln(x+\alpha) - x + \alpha \ln(x+\alpha)$$

$$= (x+\alpha)\ln(x+\alpha) - x + C$$

---

* $\int \ln(x+\alpha) dx$

$$\begin{cases} u = \ln(x+\alpha) \\ v' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = \frac{1}{x+\alpha} \\ v = x+\alpha \end{cases}$$

$$\int \ln(x+\alpha) dx = (x+\alpha)\ln(x+\alpha) - \int dx$$

$$= (x+\alpha)\ln(x+\alpha) - x + C$$

---

* $\int \ln(ax+b) dx$

$$\begin{cases} u = \ln(ax+b) \\ v' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = \frac{a}{ax+b} \\ v = x + \frac{b}{a} \end{cases}$$

$$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - \int dx$$

$$= \left(x + \frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x$$

ABDELMAIDI

## 14/ حساب التكامل بتبديل المتغير

**مثال ①:**

احسب $I = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

* نستعمل تبديل المتغير:

$$I = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx$$

نضع $\sqrt{x} = t$ أي $x = t^2$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 4 \Rightarrow t = 2 \\ dt \text{ يجب تعويضها بـ } dx \end{cases}$$

نشتق $x = t^2$ بالنسبة لـ $t$ ← $dx = 2t\,dt$ ← نشتق بالنسبة لـ $x$

$$dx = 2t\,dt$$

$$I = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \int_0^2 t \times 2t\,dt$$

$$= \int_0^2 2t^2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

* طريقة أخرى:

$$I = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

## أمثلة عن استعمال التكامل بالتجزئة مع تمرين

$$* \int_0^1 x^2 e^x\,dx$$

$$\begin{cases} u = x^2 \\ v' = e^x \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = 2x \\ v = e^x \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 x^2 e^x\,dx = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - 2\underbrace{\int_0^1 x e^x}_{J}$$

$$J = \int_0^1 x e^x\,dx$$

$$\begin{cases} u = x \\ v' = e^x \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = 1 \\ v = e^x \end{cases}$$

$$J = \left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x = \left[x e^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1$$

$$I = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - 2J$$ أي

$$I = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - 2\left[x e^x\right]_0^1 + 2\left[e^x\right]_0^1$$

$$I = e - 2$$

---

1. $\int_0^{\pi} (x^2 + 2x)\sin x\,dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x\,dx$
3. $\int_1^e (\ln x)^2\,dx$

ADEL NAIDJI

مثال ②: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$

نستعمل تبديل المتغير:

نضع $x = \cos t$ أي $t = \cos^{-1}(x)$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \\ dx = -\sin t\,dt \end{cases}$$

$$x = \cos t$$

$$1\,dx = -\sin t\,dt$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\cos^2 t}\times -\sin t\,dt$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\sin^2 t}\times(-\sin t)\,dt$$

$\sin t \geq 0$ : $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi/3} (+\sin t)(-\sin t)\,dt$$

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi/3} \sin^2 t\,dt$$

تغيير كتابة $\sin^2 t$:

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$\cos 2t = 1 - \sin^2 t - \sin^2 t$$

$$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$$

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

أين

$$I = -\int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{(1-\cos 2t)}{2}\,dt$$

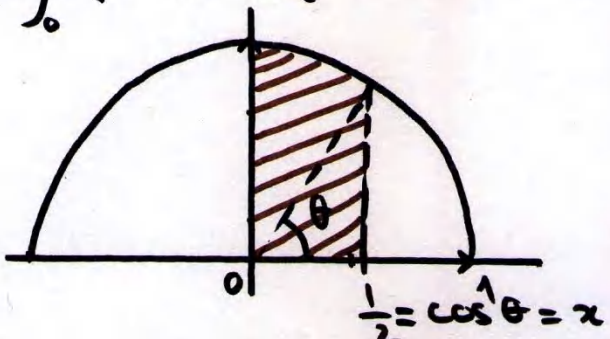
$$I = \frac{-1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right)$$

$$I = \frac{-1}{2}\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}}$$

الإجابة هندسيا:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$




$$I = S = S_{\square} - S_{\Delta} + S_{\Delta}$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\begin{cases} S_{\Delta} : 90^\circ \longrightarrow \frac{\pi}{4} \\ \qquad \theta \longrightarrow S_{\Delta} \\ S_{\Delta} = \frac{\pi}{4}\frac{\theta^\circ}{90} = \frac{\pi}{4}\frac{\cos^{-1}x}{90} = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{\Delta} = \frac{\cos\theta \times \sin\theta}{2} = \frac{\cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}}{2} \\ S_{\Delta} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \end{cases}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}}$$ أين

ADEL NAIDJI

① أ حسب التكاملات التا لية :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\int_0^1 \frac{dt}{4+t^2}$ | $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$ | $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ | $\int_1^2 (\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$ | $\int_1^2 (x+\frac{1}{x^2})dx$ | $\int_0^1 x\sqrt{3+x^2}\,dx$ |
| $\int_0^1 \frac{x}{2+x^2}dx$ | $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ | $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$ | $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^4}dx$ | $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+7}}$ | $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$ |
| $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx$ | $\int_0^1 \frac{x^2-x+1}{x^2+1}dx$ | $\int_0^1 x(2+x^2)^4dx$ | $\int_0^1 \frac{t+1}{t-2}dt$ | $\int_0^1 \frac{t^4}{1+t^2}dt$ | $\int_0^2 \lvert 2x-1\rvert^3 dx$ |
| $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin x}\cos x dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$ | $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ |
| $\int_0^1 e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$ | $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$ | $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x}dx$ | $\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x}dx$ | $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ | $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$ |

② با ستعما ل مكا ملة با لاجزاء أ حسب التكا ملا ت التا ليــة :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\int_2^3 \ln(\frac{x-1}{x+1})dx$ | $\int_1^2 x\ln(x+1)dx$ | $\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$ | $\int_1^2 \ln(x+2)dx$ | $\int_1^e \ln x dx$ |
| $\int_{\sqrt{e}}^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$ | $\int_0^1 (x^2-2x+3)e^x dx$ | $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ | $\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$ | $\int_0^1 xe^x dx$ |
| $\int_0^1 \frac{-2x^3}{(x^2+1)^2}dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$ | $\int_0^2 x\sqrt{2-x}dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ | $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x-1)\sin x dx$ |
| $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$ | $\int_0^1 (2x+1)e^{-x}dx$ | $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)(1+\tan^2 x)dx$ | |

③ با ستعما ل مكا ملة بتغيير المتغير أ حسب التكا ملا ت التا لية :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ $(t=e^x)$ | $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx$ $(t=\sqrt{x+1})$ | $\int_5^{10} \frac{1+\sqrt{x-1}}{x-2}dx$ $(t=\sqrt{x-1})$ | $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ $(t=1+\sqrt{x})$ | $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ $(t=\sqrt{e^x-1})$ |
| $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x}{(e^x-1)\sqrt{e^x-2}}dx$ $(t=\sqrt{e^x-2}\ )$ | $\int_{-2}^{-1} x\sqrt{x+2}dx$ $(t=\sqrt{x+2})$ | $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$ $(t=\sqrt{x-1})$ | $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$ $(t=\frac{1}{x})$ | $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ $(t=\frac{x+1}{2})$ |

ADEL NAIDJI

# تطبيقات التكامل

ADEL NADJI

# 4/ تطبيقات التكامل

## 1/ الدالة الأصلية لدالة والتي تنعدم من أجل قيمة معلومة مسبقا a

**الطريقة التقليدية:**

* نعين الدالة الأصلية لـ f باستعمال قواعد الدوال الأصلية
* نعين الثابت C من الشرط $F(a)=0$

**الطريقة الثانية باستعمال التكامل:**

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

**مثال:**

عين الدالة الأصلية للدالة $x\ln x$ حيث $x>0$ والتي تنعدم عند 1:

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x \ln t\,dt$$

$$\begin{cases} u=\ln t \\ v'=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'=\frac{1}{t} \\ v=t \end{cases}$$

$$F(x)=[t\ln t]_1^x-\int_1^x dt$$

$$F(x)=[t\ln t]_1^x-[t]_1^x$$

$$F(x)=x\ln x-\ln 1^{0}-x+1$$

$$F(x)=x\ln x-x+1$$

## 2/ حساب المساحات

$$S=\int_{\text{يسار}}^{\text{يمين}} (\text{أسفل}-\text{أعلى})\,dx \qquad \text{أو} \qquad \int_{\text{sen}(u,a)} (\text{أسفل}-\text{أعلى})\,dx$$

*** طرح الأسئلة:**

**س1:** احسب المساحة من المستوي المحصور بين $(C_f)$ و
- محور الفواصل
- المستقيم $(\Delta)$
- المنحني $(C_g)$

والمستقيمين $x=a$ و $x=$
- b
- a
- n

**س2:** احسب مساحة الحيز من المستوي المعرف بمجموعة النقط $M(x,y)$ حيث:

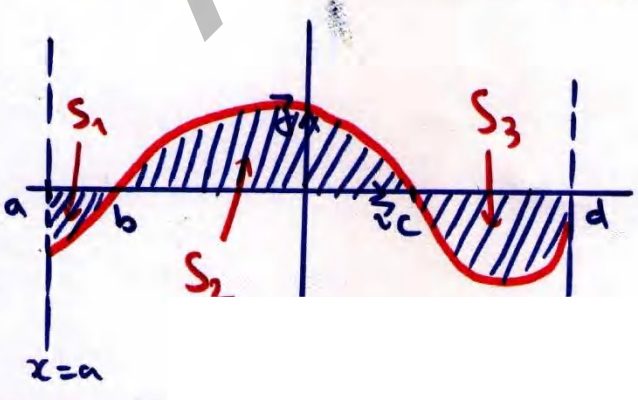
كالتاالي لدراسة الوضع النسبي أو الاشارة

$a \le x \le b$

$f(x) \le y \le g(x)$

f دالة مستمرة على $[a,b]$ $(a<b)$ و $(C)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد (ليس شرط متجانس)

1) المساحة المحددة بـ $(C)$، محور الفواصل والمستقيمان $x=a$ و $x=b$




ADEL NADJI

* ندرس اشارة f و نميز 3 حالات :

أ) $f(x) \geq 0$ :

$$S_2 = \int_b^c f(x)\,dx$$

ب) $f(x) \leq 0$ :

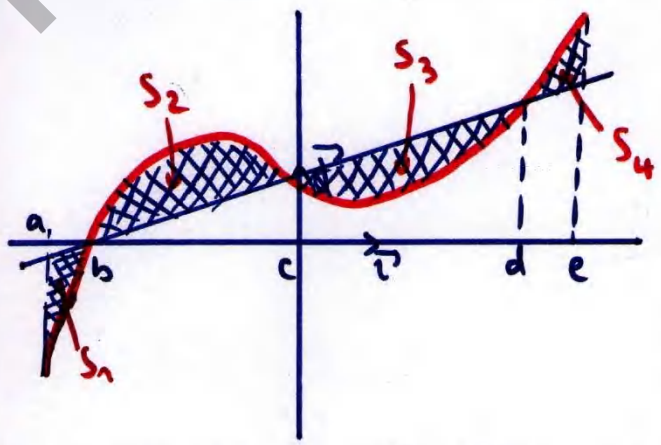
$$S_1 = \int_a^b -f(x)\,dx$$

$$S_3 = \int_c^d -f(x)\,dx$$

ج) تغير اشارتها :

$$S = \int_a^b -f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx$$

② * المساحة المحددة بـ $(C)$ ، مستقيم $y = ax+\beta$ والمستقيمات $x=a$ و $x=b$




* ندرس الوضع النبي بين $(C)$ و $(\Delta)$ و نميز 3 حالات :

أ) $f(x) \geq ax+\beta$ (فوق)

$$S_2 = \int_b^c \left(f(x) - (ax+\beta)\right)dx$$

ب) $f(x) \leq ax+\beta$ (تحت)

$$S_1 = \int_a^b \left(ax+\beta - f(x)\right)dx$$

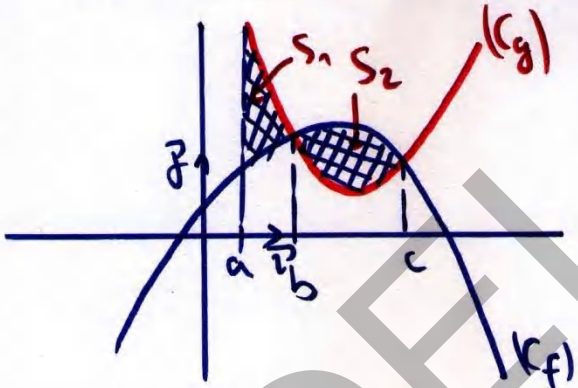
$$S_3 = \int_c^d \left(ax+\beta - f(x)\right)dx$$

ج) الوضع النبي يتغير :

$$S = \int_a^b \left(ax+\beta - f(x)\right)dx + \int_b^c \left(f(x) - (ax+\beta)\right)dx$$

$$+ \int_c^d \left(ax+\beta - f(x)\right)dx + \int_a^b (\quad)\,dx$$

③ * المساحة المحددة بـ $(C_f)$ ، $(C_g)$ والمستقيمات $x=a$ و $x=b$




* ندرس الوضع النبي بين $(C_f)$ و $(C_g)$ :

أ) $f(x) \geq g(x)$ (فوق)

$$S_2 = \int_b^c \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

ب) $f(x) \leq g(x)$ (تحت)

$$S_1 = \int_a^b \left|g(x) - f(x)\right|dx$$

ج) الوضع النبي يتغير :

$$S = \int_a^b$$

ADEL NAIDJI

## ④ * ملاحظات هامة جدا:

③ في كل ما سبق حسبنا $d_n$ (أنظر أعلى ⑥) حيث $n$ عدد معطى في التمرين ⑨

← ⑨ عوض $n$: حيث $\alpha$ هو العدد الذي يحقق $g(\alpha)=0$ .... السؤال يكون كما يلي:

① ← احسب $A(\alpha)$ بدلالة $\alpha$ !

② ← بين أن ... $A(\alpha)=$ (هنا نزل $\ln\alpha$ و $\alpha$ لنصل للنتيجة) ثم احصر $A(\alpha)$

← ⑨ بدل $n$: حيث $n$ عدد طبيعي أكبر من ⑨ ... والسؤال كما يلي:

① ← احسب $A(n)$ بدلالة $n$.

② ← نعرف المتتالية $u_n=A(n)$

احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} A(n)$

③ ← عين $n$ حتى يكون $A(n)\geq 8$ أو $A(n)\leq 6$ مثلا ...

---

⑪ بعد حساب المساحة بالتكامل نجدها بوحدة .u.a

$$1\ u.a = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\|$$

## ⑤ * تطبيقات

تمرين ①:

$f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x+2+\frac{\ln x}{x}$$

1/ برهن أن $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x+2$ مقارب لـ $(C_f)$ عند $+\infty$

2/ ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$

3/ احسب $S$ المساحة المحددة بـ $(C_f)$ $y=x+2$, $x=\frac{1}{e}$ , $x=e$

تمرين ②:

احسب مساحة الحيز من المستوي المعرف بـ

$$1\leq x\leq 3$$

$$3x+1 \leq y \leq 2x^2+x+5$$

تمرين ③:

$f$ دالة معرفة على $]-\infty,0[$ كما يلي:

$f(x)=1-\frac{\ln x^2}{x}$ و $(d)$ مستقيم معادلة $y=1$

1/ ادرس تغيرات $f$

2/ ادرس الوضع النسبي لـ $(C_f)$ و $(d)$

3/ بين أن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$

4/ احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ $(C_f)$, $(d)$, $x=-1$, $x=\alpha$

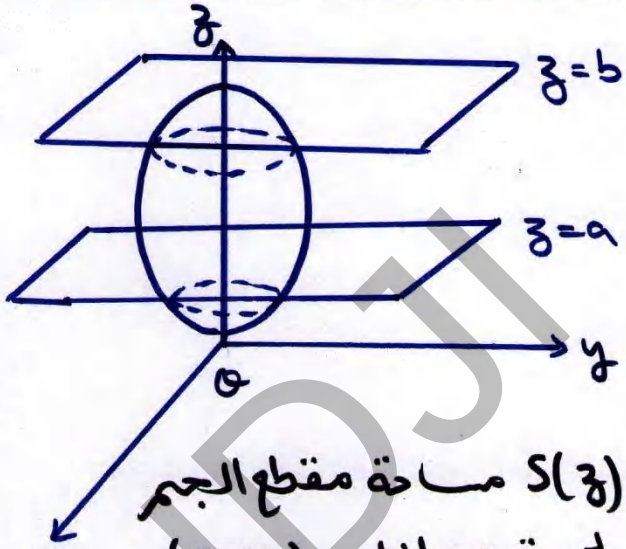
5/ بين أن $A(\alpha)=\frac{\alpha^2}{4}$

6/ جد حصرا لـ $A(\alpha)$ !!

ABDELNADJI

# 3/ حساب الحجوم

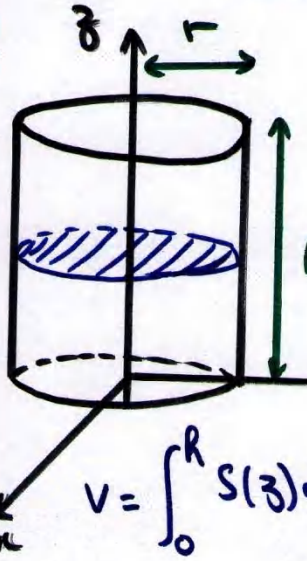
## ① قواعد حجوم مجسمات بسيطة




$S(z)$ مساحة مقطع الجسم بمستو موازل $(xoy)$ و راقمه $z$ حيث $a \leq z \leq b$

$$V = \int_a^b S(z)\,dz$$

### مثال ① حجم الأسطوانة:




$$V = \pi r^2 h$$

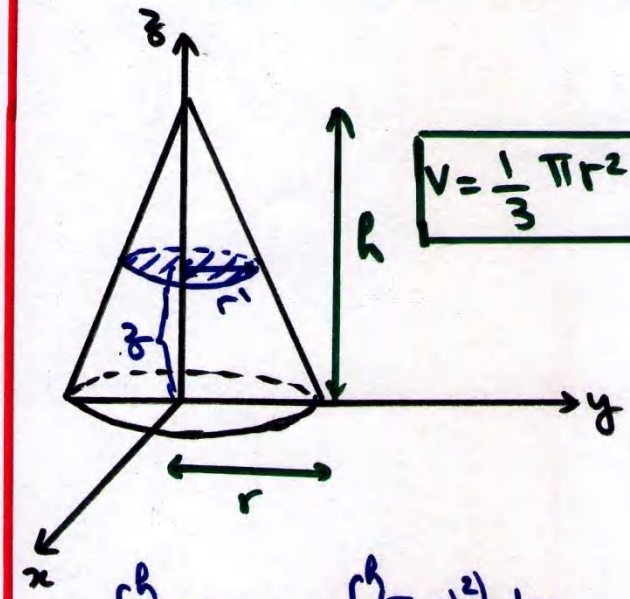
$$S(z) = \pi r^2$$

$$V = \int_0^h S(z)\,dz = \int_0^h (\pi r^2)\,dz$$

$$V = \left[(\pi r^2) z\right]_0^h = \pi r^2 h$$

$$V = \pi r^2 h$$

### مثال ② حجم المخروط الدوراني:




$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \int_0^h S(z)\,dz = \int_0^h (\pi r'^2)\,dz$$

$$S(z) = \pi r'^2 \;/\; \frac{r'}{r} = \frac{h-z}{h} \;/\; r' = \frac{r(h-z)}{h}$$

$$r' = r\left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

$$V = \int_0^h \pi \left(r\left(1-\frac{z}{h}\right)\right)^2 dz = \pi r^2 \int_0^h \left(1-\frac{z}{h}\right)^2 dz$$

$$V = \pi r^2 \int_0^h \left(-\frac{1}{h}z + 1\right)^2 dz$$

$$V = \pi r^2 (-h) \int_0^h -\frac{1}{h}\left(-\frac{1}{h}z+1\right)^2 dz$$

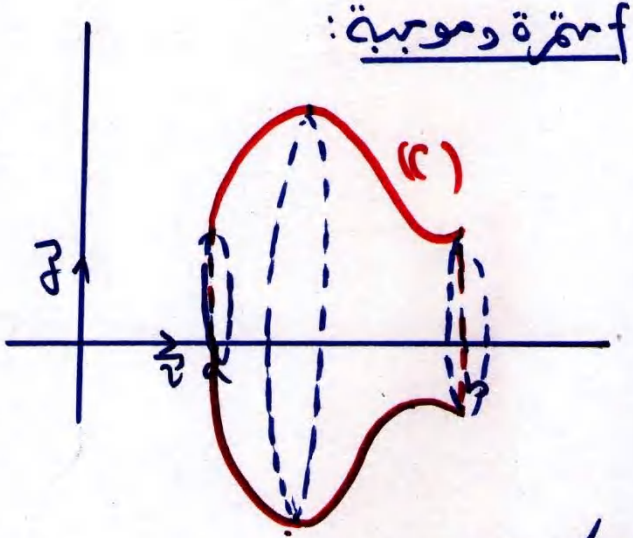
$$V = -\pi r^2 h \left[\left(-\frac{1}{h}z+1\right)^3\right]_0^h \times \frac{1}{3}$$

$$V = \frac{-\pi r^2 h}{3}\left[\underbrace{(-1+1)^3}_{0} - \underbrace{(1^3)}_{1}\right] = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ABEL NAIDJI

## ② حجم مجسم دوراني محوره (x'x)

أسمرة دموجبة:




ليكن V حجم المجسم المولد عن دوران (C_f) حول حامل محور الفواصل.

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

تطبيق:

1/ باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب:

$$I = \int_2^3 (x-2)e^{2x} dx$$

$$J = \int_2^3 (x-2)^2 e^{2x} dx$$

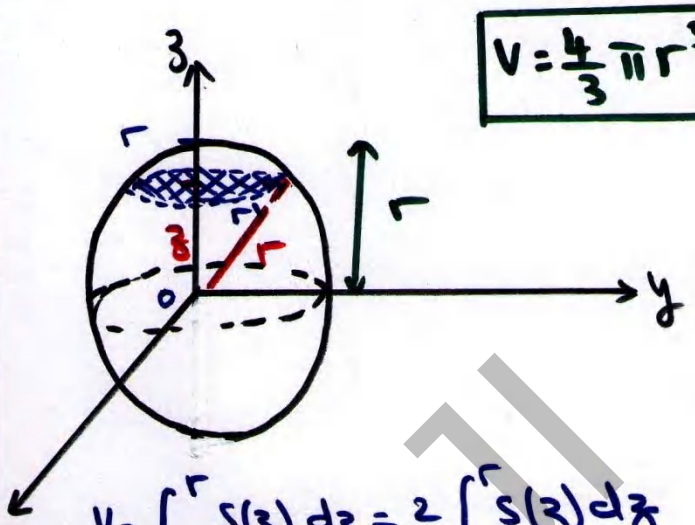
2/ لتكن f الدالة المعرفة على $[2;3]$ بـ:

$$f(x) = (x-2)e^x$$

وليكن (C) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس، احسب V حجم المجسم المولد بدوران (C) حول (x'x)

## مثال ③ : حساب حجم الكرة

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$




$$V = \int_{-r}^{r} S(z)\,dz = 2\int_0^r S(z)\,dz$$

$$S(z) = \pi r'^2 / r'^2 = r^2 - z^2$$

$$S(z) = \pi(r^2 - z^2)$$

$$V = 2\int_0^r \pi(r^2 - z^2)\,dz = 2\pi\int_0^r r^2 - z^2\,dz$$

$$V = 2\pi\left[r^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^r$$

$$V = 2\pi\left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - 0\right] = 2\pi\left(\frac{3r^3 - r^3}{3}\right)$$

$$V = 2\pi\left(\frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

ADEL NADJI

## 5/ منهجية طرح أسئلة التكامل:

### طريقة ①:

#### ① أسئلة مساعدة لتعيين F(x)

- احسب التكامل التالي
- باستعمال التكامل بالتجزئة، عين .
- تحقق أن G دالة أصلية لـ ... (جزء من f)
- عين a و b حتى تكون G أصلية لـ ... (جزء من f)
- اثبت أن f تكتب على الشكل او يطلب تعيين ثوابت a و b .
- اثبت أن $af'' + bf' + cf = \dots$

#### ② حساب F(x)

- بين أن f تقبل دالة أصلية على [a,b]
- جد الدالة الأصلية لـ f والتي تنعدم
- جد الدالة الأصلية لـ f والتي تنعدم من أجل a ← 2 طرق .

#### ③ حساب المساحات:

- عين اشارة f
- ادرس الوضع النسبي بين .. و .
- احسب مساحة الحيز المحصور بين ... و ... و ... و ...
- أو الحيز المعرف بـ $\begin{cases} \dots \le x \le \dots \\ \dots \le y \le \dots \end{cases}$
- الحد الأعلى للتكامل قد يكون ← عدد او ما

← عدد طبيعي n : بين أن ... A(n) =
احسب A(n) ثم $\lim_{n \to +\infty} A(n)$ ، عين n حتى A(n) ...

#### ④ حساب الحجوم:

احسب V حجم المجسم المولد عن دوران (C_f) حول (xx')

### طريقة ②:

نعرف F كما يلي

$$\begin{cases} f(a) = \dots \\ F(a) = b \end{cases}$$

أو $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

نربط دراسة الدالة F دون ايجاد عبارتها .

أمثلة:

- + ص 154
- . ص 181
- ت 91 ص 69
- ... Bac 2015 M1 .

تابع لحساب المساحات:

سؤال

ليكن العدد $A(\alpha) = \int_0^{\alpha} h(x)\,dx$

حيث $h(x) = f(x) + x$

فرهن بيانيا العدد A(α) ؟

A(α) هي مساحة الحيز من المستوي المحصور بين

$x = 0$
$x = \lambda$
$(C_f)$

$y = x$

ADEL NAIDJI

# استنتاج منحنيات انطلاقا من منحنيات أخرى

ADEL NAIDJ

# استنتاج تمثيل بياني $(C_g)$ مجهول انطلاقا من تمثيل بياني معلوم $(C_f)$

## $g(x)=f(x+\alpha)+\beta$ /1

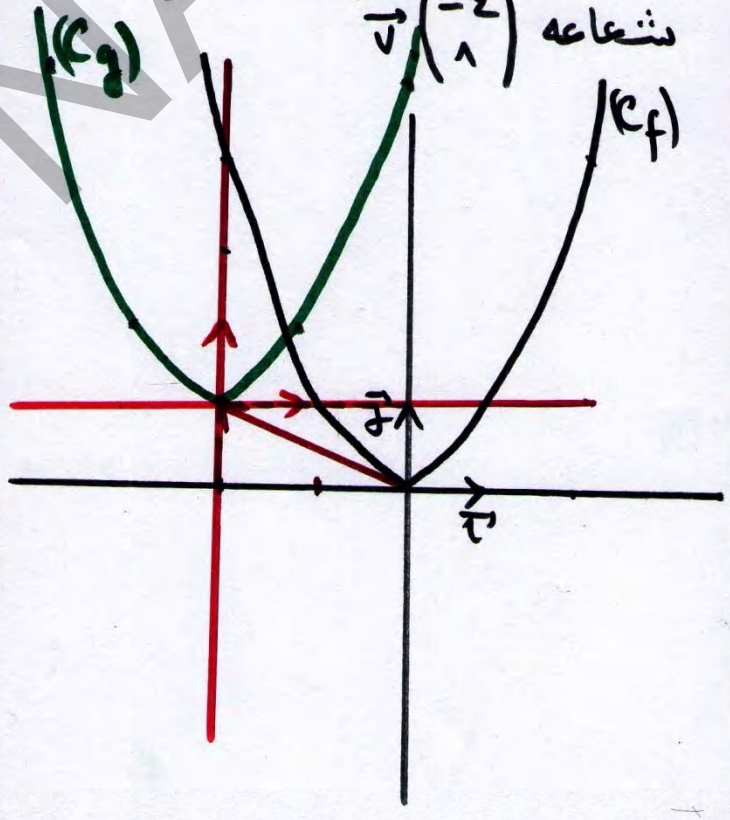
$(C_g)$ صورة $(C_f)$ بانسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

مثال: باستعمال دالة مرجعية ودون دراسة تغيرات الدالة g، مثل $(C_g)$

① $g(x)=x^2+4x+3$

$g(x)=(x+2)^2+1$

$(C_g)$ صورة منحنى الدالة مربع بانسحاب $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ شعاعه



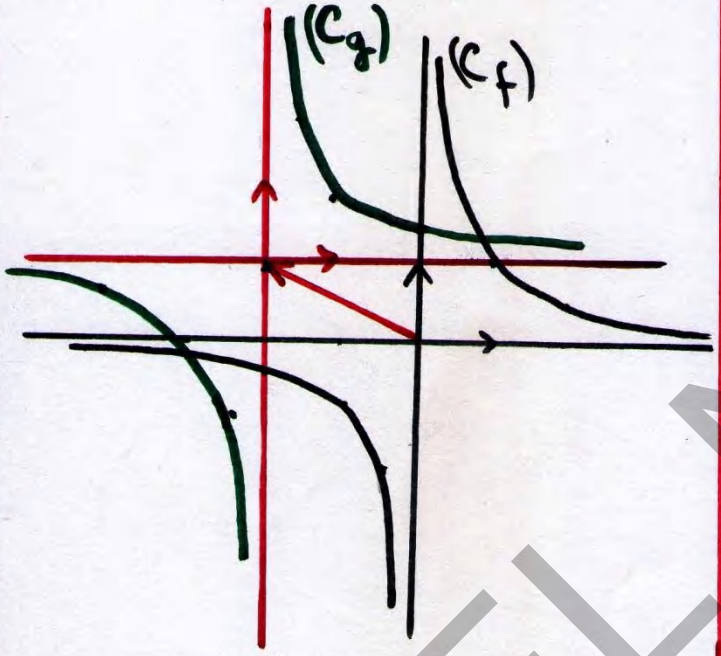

② $g(x)=\dfrac{x+3}{x+2}$

$g(x)=1+\dfrac{1}{x+2}$

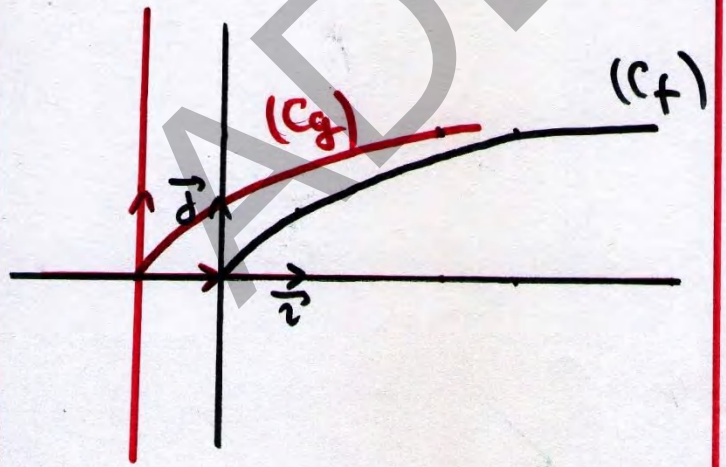
بوضع $f(x)=\dfrac{1}{x}$

$g(x)=f(x+2)+1$

$\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ صورة $(C_f)$ بانسحاب شعاعه $(C_g)$




③ $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$ ; $g(x)=\sqrt{x+1}$




ADEL NAIDJI

## ② $g(x)=k.f(x)$

$M(x,y)\in(C_f)$

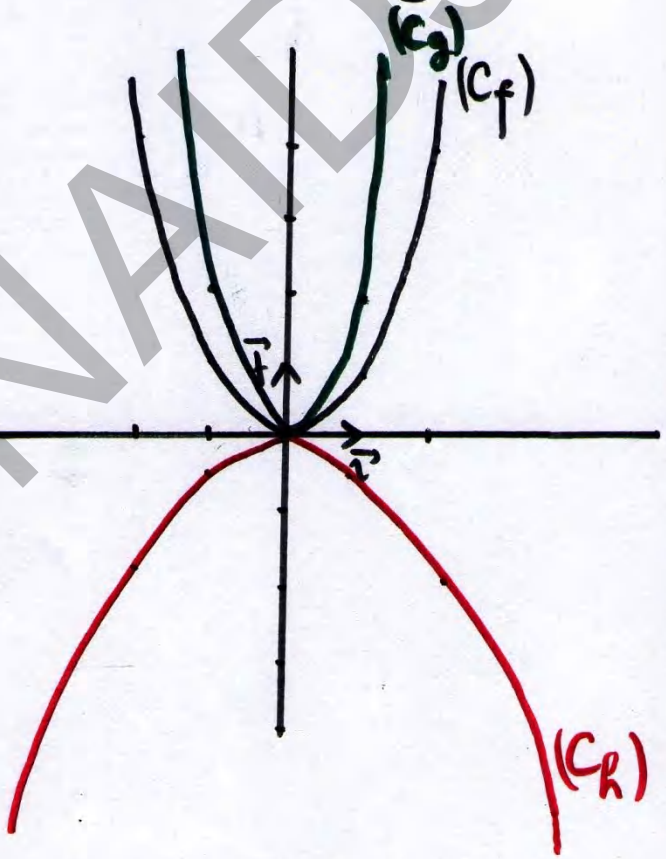
$M(x,ky)\in(C_g)$

$k>0$ : $(C_f)$ و $(C_g)$ في نفس الجزء

$k<0$ : $(C_f)$ و $(C_g)$ في جزءين متعاكسين

مثال: $g(x)=2x^2$

$h(x)=-\frac{1}{2}x^2$




## ③ حالة خاصة $g(x)=f(ax+b)+\beta$

• في بعض الأحيان يمكننا انشاء $(C_g)$ وذلك باستعمال التحويلين السابقين معا.

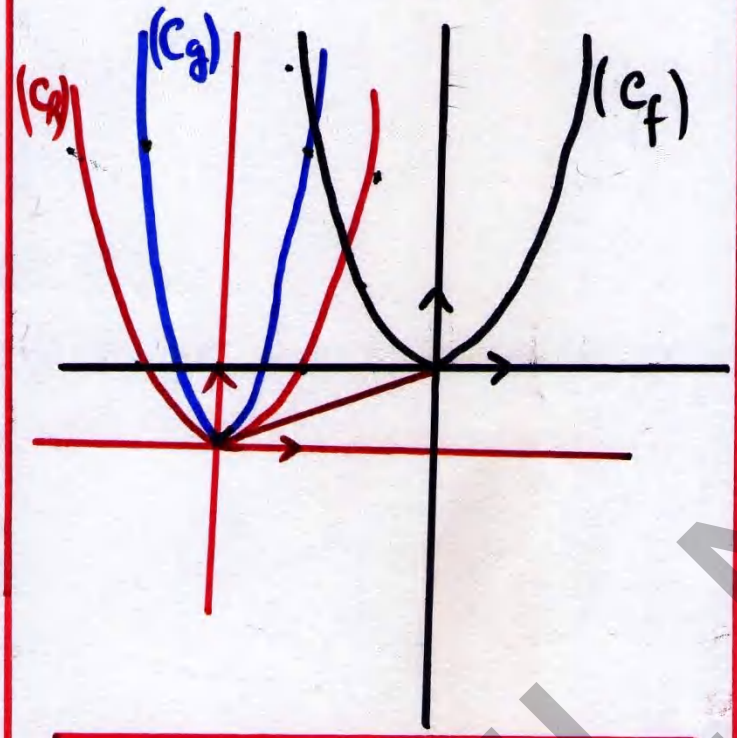
• مثال :

$g(x)=(2x+6)^2-4$

$g(x)=4\left[(x+3)^2-1\right]=4h(x)$

• انطلاقا من منحنى الدالة مربع، ننجز بانسحاب $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ لنحصل على $(C_h)$

• انطلاقا من $(C_h)$ ننشئ $(C_g)$




## ④ العبارة تتضمن قيمة مطلقة

$g(x)=f(x)$ : تطابق

$g(x)=f(-x)$ : تناظر بالنسبة لمحور التراتيب

$g(x)=-f(x)$ : تناظر بالنسبة لمحور الفواصل

$g(x)=-f(-x)$ : تناظر بالنسبة للمبدأ

ADEL NAIDJI

## الخطوات :

- ندرس شفعية الدالة
- نستخلص من رمز القيمة المطلقة
- نختار مجال مناسب للدراسة
ثم نرسم $(C_g)$ على هذا المجال
- نناظر الجزء المرسوم

### حالة ① $g(x)=f(|x|)$

- g دالة زوجية $\Leftarrow (C_g)$ متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

$x\geq 0$ : $g(x)=f(x)$

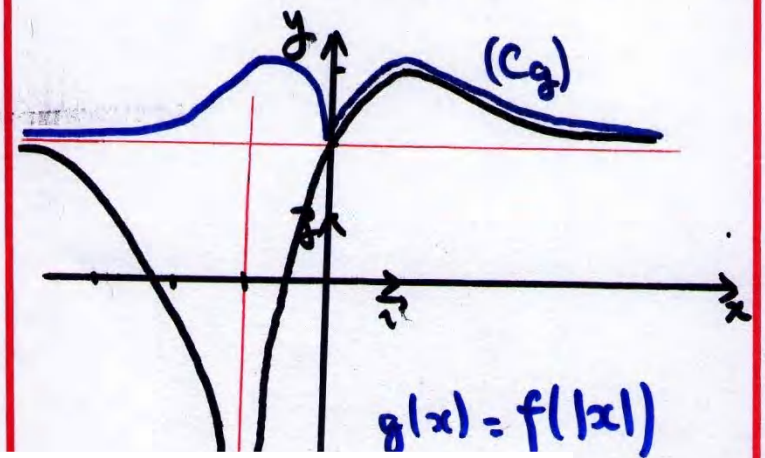
$(C_g)$ يطابق $(C_f)$ على هذا المجال

$x\leq 0$ :

$\Leftarrow$ نناظر الجزء المرسوم بالنسبة لـ $(yy')$ من $(C_g)$ $\Leftarrow$ الشفعية

$\Leftarrow$ أي: $g(x)=f(-x)$ : إذن نناظر الجزء المرسوم بالنسبة لـ $(yy')$

- مثال: $f(x)=\dfrac{2x^2+8x+2}{x^2+2x+1}$




$g(x)=f(|x|)$

### حالة ② $g(x)=f(-|x|)$

- g دالة زوجية $\Leftarrow (C_g)$ متناظر بالنسبة لـ $(yy')$

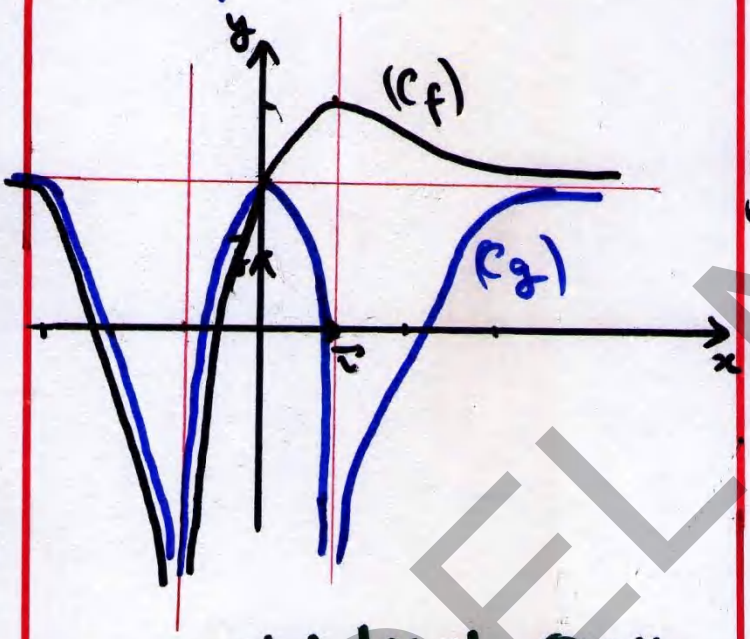
$x\leq 0$ : $g(x)=f(x)$

$(C_g)$ يطابق $(C_f)$

$x\geq 0$ : نناظر الجزء المرسوم بالنسبة لـ $(yy')$

المثال السابق:

$g(x)=f(-|x|)$




### حالة ③ : $g(x)=|f(x)|$

$g(x)=|-f(x)|$

لما $f(x)\geq 0$ ( $(C_f)$ فوق محور الفواصل )

$g(x)=f(x)$

$(C_g)$ يطابق $(C_f)$

لما $f(x)\leq 0$ ( $(C_f)$ تحت $(xx')$ )

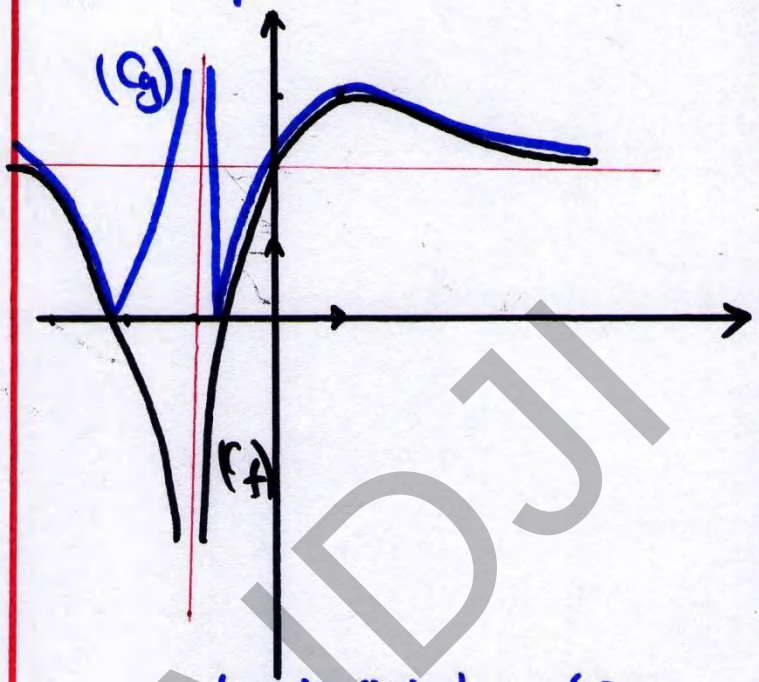
$g(x)=-f(x)$

محور الفواصل

ABELNAIDJI

## المثال السابق:

$g(x)=|f(x)|$




(Cg) دوما فوق (xx')

$g(x)=[f(x)]^n$ /5

$g'(x)=n\cdot f'(x)\cdot[f(x)]^{n-1}$

* n فردي: اشارة $g'(x)$ من اشارة $f'(x)$ ⇔ تغيرات g نفسها تغيرات f.

* n زوجي: اشارة $g'(x)$ من اشارة $f'(x)\cdot f(x)$

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب

$f(x)=-x^2-4x+5$

- تشكل جدول تغيرات f

ADEL NAIDJI

①

| x | $-\infty$ | | $-5$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | + | | | | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 9 | ↗ | | ↘ | | ↘ | $-\infty$ |

$h(x)=[f(x)]^3$ :

$h'(x)=3\cdot f'(x)\cdot f(x)^2$

| x | $-\infty$ | | $-5$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | + | 0 | + | | | | | |
| $h(x)$ | $(-\infty)^3=-\infty$ | ↗ | $9^3$ | ↗ | | ↘ | | ↘ | $(-\infty)^3=-\infty$ |

$k(x)=f(x)^2$

$k'(x)=2f'(x)\cdot f(x)$

| x | $-\infty$ | | $-5$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| $k(x)$ | $(-\infty)^2=+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $9^2$ | ↘ | 0 | ↗ | $(-\infty)^2=+\infty$ |

اشارة $k'(x)$ تستنتج من الجدول ①

## 6/ بحساب $g'(x)$ ودراسة اشارتها

$f$ دالة عددية معرفة على $]-2;+\infty[$

كما يلي:

| $x$ | $-2$ | | $0$ | $e^{-2}$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $4$ | ↗ | $5$ | ↗ $9$ |
| | | | | | $6$ | |

استنتج جدول تغيرات $k$ ، $h$ ، $g$

$g(x)=f(x^2)$

$h(x)=f(e^x)$ ; $D=]-2;+\infty[$

$k(x)=\sqrt{f(x)}$

**$g(x)=f(x^2)$**

$g'(x)=2x\cdot f'(x^2)$

من أجل كل $x$ من $]-2;+\infty[$ :

$x^2\geq 0$

أي $f'(x^2)\geq 0$

$f'(x^2)=0$ : $x^2=0$ : $x=0$ لما .

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x^2)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | $4$ | ↗ | $9$ |
| | $6$ | | | | |

$g(+\infty)=f(+\infty)=9$

$g(0)=f(0)=4$

$g(-2)=f(4)=6$

**$h(x)=f(e^x)$**

$h'(x)=e^x\cdot f'(e^x)$

من أجل كل $x\in]-2;+\infty[$ ; $e^x>0$

$f'(e^x)>0$

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $5$ | ↗ | $f(1)$ | ↗ | $9$ |

$h(+\infty)=f(e^{+\infty})=f(+\infty)=9$

$h(-2)=f(e^{-2})=5$

**$k(x)=\sqrt{f(x)}$**

$k'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

ات $f$ .

ADEL NAIDJI

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $k(x)$ | $\sqrt{+\infty} = +\infty$ | ↘ | $\sqrt{4} = 2$ | ↗ | $\sqrt{9} = 3$ |

ADEL NAIDJI

# تمارين

ADEL MAIDJI

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

**I)** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+6x+12$.

**1)** ادرس اتجاه تغير الدالة $g$.

**2)** بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha\in]-1,48;-1,47[$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$.

**II)** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-6}{x^2+2}$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1)** أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

**ب)** بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f'(x)=\dfrac{x\,g(x)}{(x^2+2)^2}$،

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ وشكّل جدول تغيراتها.

**2)** أ) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

**ب)** ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

**3)** بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

**4)** ارسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$.

**5)** نرمز بـ $S$ الى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=\alpha$ ، $x=0$ و $y=0$.

أثبت أنّ: من أجل كل $x\in[\alpha;0]$ ، $-3\le f(x)\le f(\alpha)$ ثم بيّن أنّ : $\dfrac{3}{2}\alpha^2\le S\le -3\alpha$.

# الوحدة: الدوال العددية

## عـــادل نعيجي

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: ( 07 نقاط )**

I) – لتكن $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0,7<\alpha<0,8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$.

II) – نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$.

ب) استنتج أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يُطلب تعيين معادلة له.

جـ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ و $(\Delta)$

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ حيث $f'$ مشتقة الدالة $f$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم $x$ ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$. (نأخذ $f(\alpha)\approx -0,1$)

4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5) أنشئ المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$.

6) لتكن $h$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$.

و $(C_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقق أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $h(x)=f(x)-2$.

ب) استنتج أنّ $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ $(C_h)$.

**التمرين الرابع: (06 نقاط)**

$f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ- أثبت أن الدالة $f$ فردية.

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $f'(x)=1+\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

جـ- ادرس تغيرات الدالة $f$ .

2) أ- اكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب- ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(T)$ واستنتج أن $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

جـ- بيّن أن المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ في جوار $+\infty$، ثم استنتج معادلة $(d')$ المستقيم المقارب الآخر.

د- ارسم $(d)$ و $(d')$ و $(C_f)$ في المعلم السابق.

3) $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=|x|\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

أ- بيّن أن الدالة $g$ زوجية.

ب- انطلاقا من $(C_f)$ ارسم $(C_g)$ منحنى الدالة $g$ في نفس المعلم السابق.

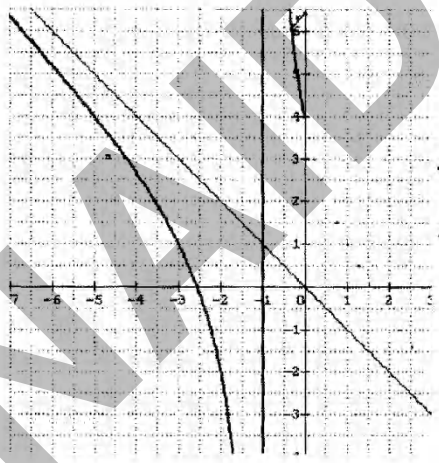
DEL NAIDJI

**التمرين الرابع:** ( 07.5 نقطة)

I) $f$ دالة معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{4}{x+1}$

$(c_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

كما هو مبين في الشكل.



1) أ) أحسب نهايات $f$ عند الحدود المفتوحة لـ I

ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات $f$ شكّل جدول تغيراتها.

2) $g$ دالة معرفة المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$

$(c_g)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد تجانس.

أ) أحسب نهاية $g$ عند $+\infty$ .

ب) تحقق من أن $(c_g)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلاً $(\Delta)$

عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج) أدرس تغيرات $g$ .

II) $k$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟

ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) أكتب معادلتي المماسين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

3) أرسم $(\Delta_1)$، $(\Delta_2)$ و $(C_k)$.

4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_k)$ و المستقيمات التي معادلاتها:

$x=-\dfrac{1}{2}$، $x=\dfrac{1}{2}$، $y=0$

**تمرين 4:** (7 نقاط)

$f$ الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي : $f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ .

$(C_f)$ منحنى الدّالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) ادرس تغيرات الدّالة $f$ .

2) أ- بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما $(D)$ معادلته: $y=x$ .

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ و $(D)$.

3) أ- بيّن أن $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0$ حيث: $1,3<x_0<1,4$.

ب- عين معادلة $(\Delta)$ مماسا للمنحني $(C_f)$ في نقطة تقاطعه مع محور التّراتيب.

جـ- ارسم $(\Delta)$ و $(C_f)$ في نفس المعلم.

4) أوجد الدّالة الأصلية للدّالة $f$ والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغير $x$ .

5) $g$ الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=|f(x)|$ .

$(C_g)$ منحنى الدّالة $g$ في المعلم السابق.

- بيّن كيف يمكن إنشاء $(C_g)$ انطلاقا من $(C_f)$ ، ثمّ ارسمه في نفس المعلم السّابق.

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$ : $g(x)=m^2$ .

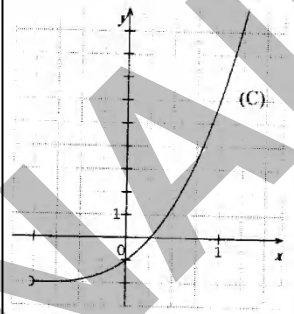
DEL NAIDJI

**التمرين الرابع** ( 07 نقط )

المنحنى $(C)$ المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي :

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$

**1-** أ ) – بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة $g$ و حدّد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.




ب) علل وجود عدد حقيقي $\alpha$ من المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ يحقق : $g(\alpha)=0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$ .

2 – $f$ هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

و ليكن $(\Gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

أ) تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$

حيث $f'$ هي الدالة المشتقة للدالة $f$.

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب : $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ و فسّر النتيجتين بيانيا.

د) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

3 – نأخذ $\alpha\simeq 0,26$

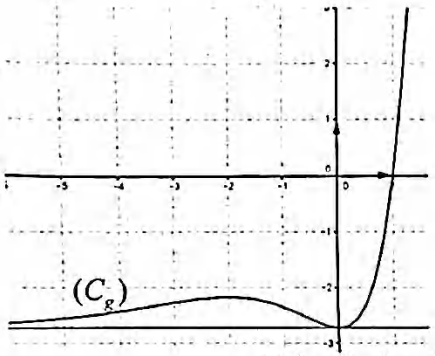
أ) عين مدور $f(\alpha)$ إلى $10^{-2}$ .

ب) ارسم المنحنى $(\Gamma)$

4- أ) أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان.

ب) عين $F$ الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تحقق : $F(1)=2$

DEL NAIDJI




**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

I) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^2e^x-e$ $(C_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ( كما هو في الشكل المقابل ).

- احسب $g(1)$.

- بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي $x$.

II) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=e^{-x}-2-\frac{e}{x}$

$(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب النهايات الآتية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بيّن أنّ المنحنى $(\gamma)$ الذي معادلته : $y=e^{-x}-2$ والمنحنى $(C_f)$ متقاربان بجوار $-\infty$ ثم ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\gamma)$.

3) بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $x$ لدينا : $f'(x)=\frac{-g(-x)}{x^2}$.

4) استنتج أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$.

5) بين كيف يمكن إنشاء المنحنى $(\gamma)$ انطلاقا من منحنى الدالة: $x\mapsto e^x$ ثم ارسم بعناية كلا من المنحنيين $(\gamma)$ و $(C_f)$ في نفس المعلم السابق.

6) ليكن $n$ عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(C_f)$ و $(\gamma)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.

احسب العدد الحقيقي $l$ حيث $l=A(0)+A(1)+\ldots+A(2016)$

# الوحدة : الدوال الأسية

## عـــادل نعيجي

DELNADJI

**التمرين الرابع:(07 نقاط)**

I) لتكن الدّالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=1-2xe^{-x}$.

-ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدّالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+1)(1+2e^{-x})$.

$(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=1$ ثمّ استنتج معادلة لـ $(\Delta)$، المستقيم المقارب المائل للمنحنى $(C_f)$.

ب) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

3) اثبت أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا وحيدا $(T)$ يوازي $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة له.

4) باستعمال المنحنى $(C_f)$، عيّن قيم الوسيط الحقيقي $m$ حتّى يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلّين مختلفين.

5) ليكن $\alpha$ عددا حقيقيا موجبا، نرمز بـ $\mathcal{A}(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ وبالمستقيمات التي معادلاتها على الترتيب : $y=x+1$ ، $x=-1$ و $x=\alpha$.

- احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ بدلالة $\alpha$ ثمّ $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)$.

**التمرين الرابع :(07 نقاط)**

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=1cm$.

I) نعتبر الدّالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ . $(C)$ تمثيلها البياني .

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) أثبت أنّ المنحنى $(C)$ يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثييهما، احسب $f(-2)$، ثمّ ارسم المنحنى $(C)$.

II) ليكن $m$ وسيط حقيقي ، نعتبر الدّالة $f_m$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_m(x)=(x^2+mx+1)e^{-x}$

وليكن $(C_m)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) أثبت أنّ جميع المنحنيات $(C_m)$ تشمل نقطة ثابتة $\omega$ يطلب تعيين إحداثييها.

2) ادرس اتجاه تغير الدّالة $f_m$ واستنتج قيم $m$ التي من أجلها تقبل الدّالة $f_m$ قيمتين حدّيتين يطلب تعيينهما.

3) $M_m$ نقطة من المنحنى $(C_m)$ فاصلتها $x_m$ حيث $x_m=1-m$.

أثبت أنّه عندما $m$ يمسح $\mathbb{R}$ فإنّ $M_m$ تنتمي إلى منحن يطلب تعيين معادلة له.

4) ادرس حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ ، حيث $m\neq 2$، الوضعية النّسبية للمنحنيين $(C)$ و $(C_m)$.

5) احسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماما $\alpha$، $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(C)$ و $(C_3)$ والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$، ثمّ احسب : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$ .

$(C_f)$ المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1-أ)** احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحني $(C_f)$ يطلب تعيين معادلة له.

**ب)** بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$

ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ وشكّل جدول تغيّراتها.

**2)** اكتب معادلة $(T)$ مماس المنحني $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 2 .

**3)** $h$ الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2e^{-x+2}-4$ .

ادرس اتجاه تغير الدالة $h$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدّد عندئذ وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(T)$ على المجال $[0;+\infty[$.

**4)** ارسم المماس $(T)$ والمنحني $(C_f)$ على المجال $[0;+\infty[$ .

**5)** نعتبر $m$ وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ الموجب: $f(x)=m(x-2)$ ... $(E)$

ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة $(E)$.

**6)** $g$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

اعتمادا على السؤال رقم (1)، شكل جدول تغيّرات الدالة $g$ .

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

I) نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

**1)** بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ وأعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة ، ثمّ احسب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

**2)** أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

**3)** اكتب معادلة لـ $(T)$ المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II) نعتبر الدالة العددية $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=1-xe^{1-x}$ .

**1)** بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإن: $h(x)\geq 0$، ثمّ ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ والمماس $(T)$.

**2)** بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا $\alpha$ حيث $-0,7<\alpha<-0,6$ .

**3)** أنشئ المماس $(T)$ والمنحنى $(C_f)$ على المجال $]-1;+\infty[$ .

**4)** $F$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$ .

تحقّق أنّ $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$، ثمّ احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$ .

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (06 نقاط)**

I- لتكن $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^{x}-x^{2}-x$ .

1- أ) احسب $g'(x)$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة $g'$ (حيث $g'$ هي مشتقة الدالة $g$ )

ب) بيّن أنه، من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$ .

جـ) احسب نهايتي الدالة $g$ عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$ .

3- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي $x$ .

II- لتكن $f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^{2}e^{x}}{e^{x}-x}$ .

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1-أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

ب) بيّن أنّه ، من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\dfrac{xe^{x}\,g(x)}{\left(e^{x}-x\right)^{2}}$ (حيث $f'$ هي مشتقة الدالة $f$ ).

جـ) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2-أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha^{2}+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ .

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^{2}\right]$ ، ثمّ فسر النتيجة بيانيا .

جـ) أنشئ المنحنى $(C_f)$ . ( تعطى $f(\alpha)\simeq 0.29$ )

**التمرين الرابع: ( 07 نقاط)**

I) $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+\left(x^{2}+x-1\right)e^{-x}$ .

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2 ) أ ) بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلّين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث : $-1,52<\alpha<-1,51$ .

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

II) $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+\left(x^{2}+3x+2\right)e^{-x}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (وحدة الطول $1cm$ ) .

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x)=-g(x)$ .(حيث $f'$ هي الدالة المشتقة للدالة $f$ ).

جـ) شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ ، ( نأخذ $f(\alpha)\approx 0,38$ ) .

د) عيّن دون حساب: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

2) أ) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ .

ب) ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

جـ) بيّن أنّ للمنحنى $(C_f)$ نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثييهما.

د) ارسم $(\Delta)$ و $(C_f)$ على المجال $[-2;+\infty[$ .

هـ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-x)e^{x}+\left(x^{2}+3x+2\right)=0$ على المجال $[-2;+\infty[$.

III) $h$ و $H$ الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=\left(ax^{2}+bx+c\right)e^{-x}$ .

1) عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ حتّى تكون الدالة $H$ دالة أصلية للدالة $h$ على $\mathbb{R}$ .

2) أ) احسب التكامل التالي : $A(\lambda)=\int_{0}^{\lambda} h(x)dx$ حيث $\lambda$ عدد حقيقي موجب تماما وفسّر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$ .

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: ( 07 نقاط)**

**I)** $\varphi$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x)=(x^2-x+1)e^{-x+1}-1$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة $\varphi$ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلاً $\alpha$ يختلف عن 1 ثم تحقّق أنّ : $2,79<\alpha<2,80$.

3) استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

**II)** $f$ و $g$ الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

$(C_f)$ و $(C_g)$ تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنّ للمنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ مماسا مشتركا $(T)$ في النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.

3) ارسم المماس $(T)$ و المنحنى $(C_f)$.

4) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

ب) ادرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$.

ج) باستعمال مكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة العدد الحقيقي $x$ : $\int_1^x f(t)dt$ .

د) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما:

$x=1$ و $x=2$.

**III)** 1) احسب $f''(x)$، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$ . أعط تخمينا لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث $n$ عدد طبيعي غير معدوم.

( $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من المرتبة $n$ للدالة $f$ ).

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، $f^{(n)}(x)=(-1)^n[2x-(2n+1)]e^{1-x}$.

3) $(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، كما يلي: $u_n=f^{(n)}(1)$.

أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم $k$ ، المجموع : $u_k+u_{k+1}$.

ب) استنتج بدلالة $n$ ، المجموع : $u_1+u_2+\ldots+u_{2n}$.

**التمرين الرابع: (07 نقاط )**

I) $g$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=(x+2)e^x-2$.

1) احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها .

3) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ .

II) $f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x+3-(x+1)e^x$ .

$(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x)=-g(x)$ .

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

ج) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $-\infty$

ثم ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث: $0,92<\alpha<0,93$ و $-1,56<\beta<-1,55$ .

ب) ارسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$ على المجال $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$

4) أ) بيّن أنّ الدالة: $x\mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب) احسب $A$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$x=0$ ، $x=\alpha$ ( حيث $\alpha$ هي القيمة المعرفة في السؤال 3) أ) ).

ج) جد حصرا للعدد $A$ .

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (06 نقاط )**

I) $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$ .

1) ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ .

2) بيّن أنّ $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$ ، ثمّ تحقّق أنّ : $0,36<\alpha<0,37$ .

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

II) $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$ .

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$ .

ب) استنتج أنّ الدالة $f$ متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$ .

2) احسب نهاية $f$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة $f$ .

3) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4) ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=-x+1$ .

5) أنشئ $(\Delta)$ و $(C_f)$ على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ، نأخذ $f(-\alpha)\approx 0,1$ .

6) أ) تحقّق أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$ .

ب) استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ .

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

$f$ الدالة المعرّفة بـِ : $f(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$ .

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس استمرارية الدالة $f$ عند 0 من اليسار.

2) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)}{x}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$ .

ب) استنتج أنّ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ بجوار $-\infty$ ، يُطلب تعيين معادلة له.

5) $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بـِ : $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ .

أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: ( 06 نقاط )**

$f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-1)e^{x}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) عيّن نهاية $f$ عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن $1,27<\alpha<1,28$

ب) أكتب معادلة لـِ $(T)$ مماس المنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدّد وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(T)$

جـ) أرسم $(T)$ و $(C_f)$

4) عيّن قيم العدد الحقيقي $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة $(x-1)e^{x}-(m-1)e^{m}=-1$ حلا واحدا في $\mathbb{R}$

5) $h$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $h(x)=(|x|+1)e^{-|x|}$ و $(C_h)$ تمثيلها البياني

أ) بيّن أنّ الدالة $h$ زوجية.

ب) ارسم $(C_h)$ مستعينا بالمنحنى $(C_f)$

6) $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(ax+b)e^{x}$ حيث: $a$، $b$ عددان حقيقيان

عيّن $a$، $b$ حتى يكون: من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ؛ $g'(x)=f(x)$

6) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)>x$.

ب) استنتج وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

جـ) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

7) $(u_n)$ المتتالية المعرّفة بـِ: $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n<0$.

ب) حدّد اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$.

جـ) بيّن أنّ المتتالية $(u_n)$ متقاربة ، ثمّ عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

8) $m$ عدد حقيقي. $h_m$ الدالة ذات المتغيّر الحقيقي $x$ المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بـِ :

$$h_m(x)=xe^{\frac{1}{x}}-mx$$

أ) احسب $h'_m(x)$ حيث $h'_m$ هي الدالة المشتقة للدالة $h_m$.

ب) باستعمال المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ، ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ ، عدد حلول المعادلة $h'_m(x)=0$.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (06 نقاط)**

I) $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(2-x)e^x-1$

1) ادرس تغيرات الدالة $g$

2) بيّن أنّ للمعادلة: $g(x)=0$ في $\mathbb{R}$ حلان $\alpha$ و $\beta$ حيث $-1,2<\alpha<-1,1$ و $1,8<\beta<1,9$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$. $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ وفسّر النتيجتين هندسيا .

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-x)^2}$ واستنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$ واستنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

4) احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى $(C_f)$

5) $\lambda$ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1

أ) احسب بدلالة $\lambda$ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda)=\int_1^{\lambda}[f(x)-1]\,dx$

ب) احسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول $\lambda$ إلى $+\infty$

**التمرين الرابع: ( 06.5 نقاط)**

**I )** $f$ الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$،

و $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى $(C)$.

2) احسب $f'(x)$. بيّن أن الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا $\alpha$. باستعمال جدول القيم أعلاه جِد حصرا للعدد $\alpha$.

4) ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى $(C)$، ثمّ ارسم المنحنى $(C')$ الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقة $m$ التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

**II )** $g$ الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) ادرس تغيرات الدالة $g$ على $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) أ) تحقّق من أن: $g\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ بيّن أن: $g'\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=2f(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة $(T)$ المماس لمنحنى الدالة $g$ في النقطة ذات الفاصلة $\dfrac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقّق من أن: $y=\dfrac{2}{(\alpha-1)^3}x-\dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم $(T)$.

| x | f(x) |
|---|---|
| 0,20 | 0,037 |
| 0,21 | 0,016 |
| 0,22 | −0,005 |
| 0,23 | −0,026 |
| 0,24 | −0,048 |
| 0,25 | −0,070 |

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (08 نقاط)**

**I**- الدالة $g$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2-1)e^{-x}$.

**1. أ -** احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

**ب -** ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها. **(نأخذ:** $g(1-\sqrt{2})\simeq -0,25$ و $g(1+\sqrt{2})\simeq 1,43$**)**

**2. أ -** بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حليّن في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقّق أنّ أحدهما معدوم والآخر $\alpha$، حيث: $-0,8<\alpha<-0,7$.

**ب -** استنتج إشارة $g(x)$؛ حسب قيم العدد الحقيقي $x$.

**II**- الدالة $f$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$

$(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2\ cm$)

**1. أ -** احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**ب -** بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x$، مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$.

**جـ -** ادرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

**2. أ -** بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f'(x)=g(x)$. (يرمز $f'$ إلى الدالة المشتقة للدالة $f$)

**ب -** شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}$. **(نأخذ:** $f(\alpha)\approx -0,9$**)**

**3. أ -** بيّن أنّ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

**ب -** مثّل $(\Delta)$ والمماسين والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

**جـ -** ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$، عدد حلول المعادلة ذات المجهول $x$: $(x+1)^2+me^x=0$.

**4.** الدالة $H$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x)=(-x^2-4x-5)e^{-x}$.

**أ -** بيّن أن $H$ دالة أصلية للدالة: $x\mapsto(x+1)^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

**ب -** احسب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

**III**- $(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=f(u_n)$.

(تذكّر أنّ العدد $\alpha$ يحقّق $g(\alpha)=0$)

**1.** برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي $n$، $-1\le u_n\le\alpha$.

**2.** بيّن أنّ المتتالية $(u_n)$ متناقصة.

**3.** استنتج أنّ $(u_n)$ متقاربة، ثمّ احسب نهايتها.

**التمرين الثالث: (07 نقاط)**

I- $g$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=-4+(4-2x)e^x$.

1- ادرس تغيرات الدالة $g$، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث: $1,59<\alpha<1,60$.

3- استنتج إشارة $g(x)$.

II- $f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$).

1- بيّن أن $(C_f)$ يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتاهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $f$.

جـ) احسب $f(1)$، ثم استنتج، حسب قيم $x$، إشارة $f(x)$.

3- أ) بيّن أنّ: $f(\alpha)=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$، حيث $\alpha$ هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء I.

ب) استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى $10^{-2}$).

جـ) ارسم $(C_f)$.

4- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$، عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m+1)(e^x-2x)=2x-2$.

5- $h$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=[f(x)]^2$.

أ) احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة $h$.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

I) لتكن $g$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=1-x\,e^{x}$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$، ثم شكل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا $\alpha$ على المجال $]-1;+\infty[$.

ب- تحقق أنّ $0,5<\alpha<0,6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]-\infty;2[$ كما يلي: $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) لتكن $f'$ مشتقة الدالة $f$. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-\infty;2[$ فإن: $f'(x)=-g(x)$.

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2[$، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$.

3) بيّن أنّ $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. ( تُدوّر النتائج إلى $10^{-2}$ ).

4) أ- بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.

5) أ- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين $x_1$ و $x_2$ حيث $-1,6<x_1<-1,5$ و $1,5<x_2<1,6$.

ب- أنشئ $(\Delta)$ و $(C_f)$.

6) لتكن $h$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(ax+b)e^{x}$.

أ-عيّن العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث تكون $h$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto x\,e^{x}$ على $\mathbb{R}$.

ب-استنتج دالة أصلية للدالة $g$ على $\mathbb{R}$.

**التمرين الرابع: (08 نقاط)**

I) $g$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2-xe^{x}$.

1) ادرس تغيرات الدالة $g$، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن: $0,8<\alpha<0,9$.

3) عيّن، حسب قيم $x$، إشارة $g(x)$.

II) $f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x+2}{e^{x}+2}$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (وحدة الطول $2cm$).

1) بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- بيّن أن المستقيم $(\Delta')$ ذا المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$.

3) ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى كل من $(\Delta')$ و $(\Delta)$، حيث $(\Delta)$ هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

4) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^{x}+2)^{2}}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$.

ب- بيّن أن : $f(\alpha)=\alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

5- ارسم $(\Delta)$ ، $(\Delta')$ و $(C_f)$.

6- ناقش، بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$، عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

III) $(U_n)$ هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$: $U_{n+1}=f(U_n)$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $0\le U_n<\alpha$.

2) باستعمال $(\Delta)$ و $(C_f)$ مثّل على محور الفواصل الحدود: $U_0$ ، $U_1$ و $U_2$، ثم خمّن اتجاه تغير $(U_n)$.

3) برهن أن المتتالية $(U_n)$ متقاربة، ثم احسب نهايتها.

DEL NAIDJI

**التمرين الثالث: (07.5 نقطة)**

أ) $f$ الدّالة العدديّة المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=3-\frac{4}{e^x+1}$$

$(C_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس تغيّرات الدّالة $f$.

2- عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى $(C_f)$.

3- بيّن أن للمنحنى $(C_f)$ نقطة انعطاف $\omega$ يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة لمماس $(C_f)$ عندها.

4- لتكن $g$ الدّالة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=f(x)-x$.

أ- ادرس تغيّرات الدّالة $g$.

ب- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $2,7<\alpha<2,8$

5- أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=0$.

ب- ارسم المماس والمستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته: $y=x$ والمنحنى $(C_f)$.

ب) $(U_n)$ المتتالية العدديّة المعرّفة كما يلي: $U_0=1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي $n$: $U_{n+1}=f(U_n)$

1- باستخدام $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ مثّل $U_0$ و $U_1$ و $U_2$ على حامل محور الفواصل.

2- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ فإن: $1\leqslant U_n<\alpha$.

3- بيّن أنّ المتتالية $(U_n)$ متزايدة تماما.

4- استنتج أن $(U_n)$ متقاربة و بيّن أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha$.

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$.

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب- احسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها.

جـ- شكّل جدول تغيرات الدالة $f$.

2. أ- بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.

ب- اكتب معادلة للمستقيم $(T)$ مماس المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0.

جـ- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75\,;\,1,76[$ حلا وحيدا $\alpha$.

د- ارسم المستقيمين $(\Delta)$ و $(T)$ ثم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty;2]$.

3. أ- احسب بدلالة $\alpha$، المساحة $\mathcal{A}(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

ب- لتبت أنّ: $\mathcal{A}(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ ($ua$ هي وحدة المساحات).

DEL NAIDJI

**التمرين الثالث:** (07 نقاط)

$f$ الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$

ليكن $(C_f)$ منحنى $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عيّن العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث: $f(x)=ax+\dfrac{b}{3(e^x-1)}$ من أجل كلّ $x$ من $\mathbb{R}^*$
2. احسب نهايات الدّالة $f$ عند أطراف مجالات تعريفها.
3. بيّن أنّ $f$ متزايدة تماما على كلّ مجال من مجالي تعريفها ثمّ شكل جدول تغيراتها.
4. أ - $(D)$ و $(D')$ المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب: $y=x$ و $y=x+\frac{4}{3}$ .

بيّن أنّ $(D)$ و $(D')$ مقاربان للمنحنى $(C_f)$ ، ثمّ حدّد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

ب - بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $x_0$ و $x_1$ حيث $0,9<x_0<0,91$ و $-1,66<x_1<-1,65$

جـ - احسب من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ غير معدوم $f(x)+f(-x)$ .

فسّر النتيجة هندسيا.

د - ارسم $(D)$ و $(D')$ و $(C_f)$ .

هـ - $m$ عدد حقيقي، $(D_m)$ المستقيم المعرّف بالمعادلة $y=x+m$ .

ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$

5. نعتبر الدّالة $g$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يأتي: $g(x)=[f(x)]^2$

ادرس تغيّرات الدّالة $g$ دون حساب $g(x)$ بدلالة $x$ .

**التمرين الرابع:** (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(3x+4)e^x$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ أ) احسب $f'$، $f''$ ثم برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم فإن:

$f^{(n)}(x)=(3x+3n+4)e^x$ حيث: $f'$، $f''$، ...، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة $f$

ب) استنتج حل المعادلة التفاضلية : $y'=(3x+16)e^x$

2/ أ) بيّن أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ وفسر النتيجة هندسيا

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ أ) اكتب معادلة للمماس $(\Delta)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $\omega$ التي فاصلتها $\frac{-10}{3}$ .

ب) بين أن $\omega$ هي نقطة انعطاف المنحنى $(C_f)$

جـ) ارسم $(\Delta)$ و $(C_f)$ على المجال $]-\infty;0]$.

4/ أ) $x$ عدد حقيقي من المجال $]-\infty;0]$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^{x} te^t dt$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]-\infty;0]$ .

ب) $\lambda$ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$

احسب بدلالة $\lambda$ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=-\frac{4}{3}$ و $x=\lambda$ ، ثم جد $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$.

نرمز بـ $(C_f)$ لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ وفسّر هندسيا النتيجة.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين $(\Delta)$ و $(\Delta')$ معادلتيهما على الترتيب: $y=x$ و $y=x+1$.

ب) ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى كل من $(\Delta)$ و $(\Delta')$.

4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$.

5) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث: $\ln 2<\alpha<1$ و $-1,4<\beta<-1,3$

ب) هل توجد مماسات لـ $(C_f)$ توازي المستقيم $(\Delta)$؟

جـ) ارسم $(\Delta)$، $(\Delta')$ ثم المنحنى $(C_f)$.

د) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-1)e^{-x}=m$.

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

I- $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(3-x)e^x-3$

1) ادرس تغيرات الدالة $g$.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث: $2,82<\alpha<2,83$

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$.

II- $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1} & ;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ ، اكتب معادلة لـ $(T)$ مماس $(C_f)$ عند المبدأ $O$.

2) أ) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بيّن أنه من أجل $x\neq 0$ فإن: $f'(x)=\dfrac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$.

جـ) تحقق أن $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$ ثم عين حصرا له.

د) أنشئ جدول تغيرات الدالة $f$.

3) احسب $f(x)+x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ $(C_f)$ و $(C)$ منحنى الدالة $x\mapsto -x^3$

بيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^3\right]=0$ وفسر النتيجة هندسيا.

4) أنشئ في نفس المعلم المماس $(T)$ والمنحنيين $(C)$ و $(C_f)$.

DEL NAIDJI

**التمرين الثالث: (07 نقاط)**

نعتبر الدّالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+\frac{2}{e^x+1}$

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. احسب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، ثمّ استنتج أنّ النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$
2. ادرس تغيّرات الدّالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ استنتج جدول تغيّراتها على $\mathbb{R}$.
3. بيّن أنّ المستقيم ذي المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$ .
   احسب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$ ، استنتج المستقيم المقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $-\infty$ .
4. بيّن أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا $\alpha$ بحيث $-1,7<\alpha<-1,6$
5. ارسم $(\mathcal{C}_f)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$
6. بيّن أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=x+\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$
7. احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمات ذات المعادلات :
   $y=x+2$ و $x=0$ و $x=\alpha$
   بيّن أنّ $\mathcal{A}(\alpha)=2\ln(-\alpha)$ ثمّ استنتج حصرا للعدد $\mathcal{A}(\alpha)$

**التمرين الرابع ( 07,5 نقط )**

I – نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي :

$$f(x)=(ax+b)\,e^{-x}+1$$

حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان.

$(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1cm$ .

عين قيمتي $a$ و $b$ بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى $(C_f)$ و معامل توجيه المماس عند $A$ يساوي $(-e)$.

II – نعتبر الدالة العددية $g$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=(-x-1)\,e^{-x}+1$$

و $(C_g)$ تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بين أن $\lim_{x\to+\infty}g(x)=1$ و فسر هذه النتيجة بيانيا.(نذكر أن $\lim_{u\to-\infty}ue^u=0$ )

ب) ادرس تغيرات الدالة $g$ ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج) بيّن أن المنحنى $(C_g)$ يقبل نقطة انعطاف $I$ يطلب تعيين احداثييها.

د) اكتب معادلة المماس للمنحنى $(C_g)$ عند النقطة $I$.

هـ) ارسم $(C_g)$.

و) $H$ الدالة العددية المعرفة على $]-2,+\infty[$ كما يأتي: $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان.

عيّن $\alpha$ و $\beta$ بحيث تكون $H$ دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$

استنتج الدالة الأصلية للدالة $g$ و التي تنعدم عند القيمة 0.

III ) لتكن $k$ الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي:

$$k(x)=g(x^2)$$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة $k$ ثم شكل جدول تغيراتها .

DEL NAIDJI

**تمرين 4:** (7 نقاط)

I) $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\frac{4}{e^x+1}$ و $C_f$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1 – ادرس تغيرات الدالة $f$ .

2 – بين أن $C_f$ يقبل نقطة انعطاف $\omega$ و اكتب معادلة لمماس $C_f$ عند النقطة $\omega$ .

– اثبت أن $\omega$ مركز تناظر للمنحنى $C_f$ .

3– احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+3)]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-1)]$ .

– استنتج أن $C_f$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما .

4– بين أن $C_f$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0$ من المجال $]-2,77\ ;\ -2,76[$ .

– احسب $f(1)$ و $f(-1)$ ( تُدور النتائج إلى $10^{-2}$ ) ثم ارسم $C_f$ ومستقيميه المقاربين.

II) $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=-x+3-\frac{4}{e^x+1}$ . $C_g$ منحنى الدالة $g$ .

1– بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإن : $g(x)=f(-x)$ .

– استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول $C_f$ إلى $C_g$ .

2– أنشئ في نفس المعلم السابق $C_g$ ( دون دراسة الدالة $g$ ) .

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

I) نعتبر $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين بيانيا.

2) أ) بيّن أنّ: من أجل كل $x$ من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f'(x)=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$.

4) بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف $\omega$ يطلب تعيين إحداثييها، ثمّ انشئ $(C_f)$.

II) لتكن الدالة g المعرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $g(x)=2\left[-x+\ln(2x+1)\right]$.

1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g.

أ) بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث: $1,2<\alpha<1,3$

ب) استنتج إشارة $g(x)$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ أكبر تماما من 1 : $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

- أثبت أن: من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

# الوحدة: الدوال اللوغاريتمية

## عـــادل نعيجي

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

**I)** نعتبر الدّالة $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+2-\ln x$.

ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

**II)** لتكن الدّالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$.

**1)** بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم ، $f'(x)=\frac{-g(x^2)}{2x^2}$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$.

**2) أ)** احسب من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم $f(-x)+f(x)$ ، ثمّ فسّر النّتيجة بيانيا.

**ب)** احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$.

**جـ)** شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

**3)** بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}$ مقارب لـ $(C_f)$ ثمّ ادرس وضعية $(C_f)$ بالنّسبة إلى $(\Delta)$.

**4) أ)** أثبت أنّه يوجد مماسان للمنحنى $(C_f)$ معامل توجيه كل منهما يساوي $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ثمّ جِد معادلة لكلٍّ منهما.

**ب)** بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما $\alpha$ و $\beta$

حيث $2<\alpha<2,1$ و $-0,5<\beta<-0,4$.

**5)** ارسم المماسين والمستقيم $(\Delta)$ ثمّ المنحنى $(C_f)$.

**6)** باستعمال المنحنى $(C_f)$، عيّن قيم الوسيط الحقيقي $m$ حتّى تقبل المعادلة $x(e-2m)=\ln(x^2)$ حلاّ وحيدا.

**7)** نرمز بـ $A(\alpha)$ إلى مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها

$x=\alpha$ ، $x=1$ و $x+2y=e$.

تحقّق أنّ: $A(\alpha)=\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2 cm^2$.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع :(07 نقاط)**

لتكن الدالة العددية $f$ المعرّفة على $D_f$ حيث $D_f=]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1)** أ) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجتين بيانيا.

**ب)** احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

**2)** بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $D_f$ ، $f'(x)=-2-\frac{2}{(x-1)(x-2)}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $f$ .

**3)** أ) تحقق أنّ: من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $D_f$ ، $(3-x)\in D_f$ و $f(3-x)+f(x)=0$ .

**ب)** استنتج أنّ $(C_f)$ يقبل مركز تناظر يُطلب تعيين إحداثييه.

**4)** أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]0,45;0,46[$ ثم استنتج أنّها تقبل حلا أخر $\beta$ يطلب تعيين حصر له.

**5)** بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة: $y=-2x+3$ مقارب مائل لـ $(C_f)$، ثم ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$.

**6)** ارسم $(\Delta)$ و $(C_f)$.

**7)** بيّن أنّ الدالة: $h:\ x\mapsto(x-1)ln(x-1)-(x-2)ln(x-2)$ أصلية للدالة $x\mapsto ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ على $]2;+\infty[$ .

ثم احسب بدلالة $\beta$ مساحة الحيّز المستوي المُحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها:

$y=-2x+3$ ، $x=\beta$ و $x=3$ .

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $D$ حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ،

$(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1)** بيّن أنّ الدالة $f$ فردية ثم فسّر ذلك بيانيا.

**2)** احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

استنتج أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب.

**3)** أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $D$ ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$ .

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

**4)** بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1,8<\alpha<1,9$ .

**5)** بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ ثم أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

**6)** أنشئ المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$.

**7)** $m$ وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة:

$(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

I) نعتبر الدالة العددية $g$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x$ .

**1)** ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$.

**2)** بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]1,76\,;1,77[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{x+1}{x-\ln x} \;\; ; \; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1)** أثبت أن الدالة $f$ مستمرة عند العدد $0$ على اليمين ،

ثم احسب $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

**2)** بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$ .

**3)** احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسّر ذلك بيانيا ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

**4)** لتكن الدالة $h$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x-\ln x$

أ) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما ، $h(x)>0$،

واستنتج وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=1$.

**ب)** ارسم $(C_f)$ . ( نأخذ $f(\alpha)\approx 2,31$ )

**5)** لتكن الدالة $F$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ .

- بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي $x$ حيث $x\geq 1$ ، $\frac{1}{x}+1\leq f(x)\leq f(\alpha)$ .
- اعط تفسيرا هندسيا للعدد $F(e)$ ثم استنتج حصرا له.

**التمرين الرابع: (06,5 نقطة)**

**I)** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-x\ln x$ .

1)أ- احسب $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ .

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=-1$ تقبل حلاً وحيدا $\alpha$ حيث : $3,5<\alpha<3,6$.

3) استنتج إشارة العبارة $g(x)+1$ على المجال $]0;+\infty[$.

**II)** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$، حيث: $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=4cm$.

1) بيّن أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x=0$ و $y=0$.

2) أ- برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $f'(x)=\frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$.

ب- بيّن أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ و متناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

جـ- اكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

د- احسب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، فسّر النتيجة هندسيا.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

**I)** $g$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)$ .

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ .

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ على المجال $]-1;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا $\alpha$ حيث: $0,4<\alpha<0,5$ .

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$ .

**II)** $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+(x-1)\ln(x+1)$ .

1) احسب $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ و فسّر النتيجة هندسيا ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2) أ- ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

ب- بيّن أنّ: $f(\alpha)=-\alpha+4-\frac{4}{\alpha+1}$ ثمّ أعط حصرا لـ $f(\alpha)$ . ( تُدوّر النتائج إلى $10^{-2}$).

3) ليكن $a$ عدد حقيقي من المجال $]-1;+\infty[$، نسمي $(T_a)$ مماس المنحنى $(C)$ الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ عند النقطة ذات الفاصلة $a$.

نضع من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ : $h(x)=f(x)-\left[f'(a)(x-a)+f(a)\right]$.

أ- تحقّق أنّه من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ : $h'(x)=f'(x)-f'(a)$.

ب- باستعمال اتجاه تغيّر الدالة $g$ ، عيّن إشارة $h'(x)$ حسب قيم $x$ واستنتج اتجاه تغيّر $h$ على $]-1;+\infty[$.

جـ- حدّد الوضع النسبي للمنحنى $(C)$ والمستقيم $(T_a)$.

4) أ- بيّن أنّه يوجد مماسان $(T_a)$ يشملان النقطة $A(1;0)$ يطلب تعيين معادلتيهما.

ب- ارسم المماسين والمنحنى $(C)$.

5) نعتبر الدالة $H$ المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $H(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2x-3\right)\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$.

أ- بيّن أنّ الدالة $H$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x-1)\ln(x+1)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

ب- احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C)$ و المستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=1$ و $x=2$.

3) أ- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$ .

ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ ( تُدوّر النتائج إلى $10^{-2}$ ).

جـ- ارسم $(C_f)$.

4) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما $x$ و $m$ وسيط حقيقي:

$x^2+x-2m(x+1)=\ln(x^2)$ ... $(E)$ .

أ- تحقّق أنّ المعادلة $(E)$ يؤول حلها إلى حل المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}x-m$ .

ب- عيّن بيانيا قيم $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة $(E)$ حلّين متمايزين.

5) $h$ هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x)=\frac{\ln|x|}{-|x|-1}$ و $(C_h)$ منحناها البياني في المستوي.

أ- بيّن أنّ الدالة $h$ زوجية.

ب- ارسم في نفس المعلم المنحنى $(C_h)$ مستعينا بالمنحنى $(C_f)$.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

I- لتكن الدالة العددية $g$ المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$.
(حيث العدد $e$ هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

1- ادرس تغيّرات الدالة $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2- بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $-0,34<\alpha<-0,33$ .

3- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ .

II- لتكن الدالة $f$ المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1- أ) بيّن أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$ واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-1;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$ . ($f'$ هي مشتقة الدالة $f$).

ج) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

د) ارسم المنحنى $(C_f)$ .(نقبل أنّ: $f(\alpha)=3.16$)

2-أ) بيّن أنّ الدالة: $x\mapsto\dfrac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$ .

ب) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما على التوالي: $x=0$ و $x=1$.

3- نعتبر الدالة العددية $k$ المعرفة على $]-1;1[$ بـ: $k(x)=f(-|x|)$ و $(C_k)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ الدالة $k$ زوجية.

ب) بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى $(C_k)$ انطلاقا من المنحنى $(C_f)$ ثم ارسمه ( دون دراسة تغيّرات الدالة $k$).

ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة : $k(x)=m$.

**التمرين الرابع: (06,5 نقطة)**

**I)** $g$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$.

2) احسب $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$، $g(x)>0$.

**II)** $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$

و $(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2) أ - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ .

ب - شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ .

3) اكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C)$ في النقطة التي فاصلتها 1.

4) أ - بيّن أنّ $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ حيث: $y=x-1$ معادلة له.

ب - ادرس الوضع النسبي لـ $(C)$ و $(\Delta)$.

5) ارسم المستقيمين $(T)$ و $(\Delta)$ ثمّ المنحنى $(C)$.

6) $m$ عدد حقيقي. $(\Delta_m)$ المستقيم حيث : $y=mx-m$ معادلة له.

أ - تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $m$، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta_m)$.

ب - ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx-m$ .

7) أ - جد دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ .

ب - احسب $I_n$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C)$ ، المستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=n$ حيث $n$ عدد طبيعي ( $n>1$ ).

جـ - عيّن أصغر عدد طبيعي $n_0$ بحيث إذا كان $n>n_0$ فإنّ : $I_n>2$ .

DELNAIDJI

**التمرين الرابع: (06,5 نقطة)**

**I)** $g$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1+x^2+2\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]0,52\,;\,0,53[$ حلاّ وحيدا $\alpha$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

**II)** $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{3+2\ln x}{x}$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$.

ب) شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$.

ج) تحقّق أنّ: $f(\alpha)=2\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)$ ثم عيّن حصرا له.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل $(\Delta)$.

ج) بيّن أنّ $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي $(\Delta)$ يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

4) نقبل أنّ $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما $x_0$ و $x_1$ حيث:

$0,22<x_0<0,23$ و $2,11<x_1<2,13$

أنشئ $(T)$، $(\Delta)$ و $(C_f)$.

5) $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا و حسب قيم $m$، عدد حلول المعادلة: $3+2\ln x-mx=0$.

**III)** من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع: $u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[f(x)+x\right]dx$.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n>0$.

2) أعط تفسيرا هندسيا للعدد $u_0$.

3) احسب $u_n$ بدلالة $n$.

4) نضع: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$. احسب $S_n$ بدلالة $n$.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (07.5 نقطة )**

I) $h$ الدالة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بما يلي : $h(x)=(x+2)^2+2-2\ln(x+2)$ .

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} h(x)$

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $h$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

3) استنتج أنه من أجل كل $x$ من $]-2;+\infty[$ ، $h(x)>0$ .

II) $f$ الدالة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+1+\dfrac{2}{x+2}\ln(x+2)$ .

$(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $1cm$).

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2) أ) بيّن أنه من أجل كل $x$ من المجال $]-2;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+2)^2}$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $]-2;+\infty[$

3) أ) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة: $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$ .

ب) ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ .

4) أ) اثبت أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف $A$ يطلب تعيين إحداثييها.

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى $(C_f)$ .

ج) احسب بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=-1$ و $x=1$ .

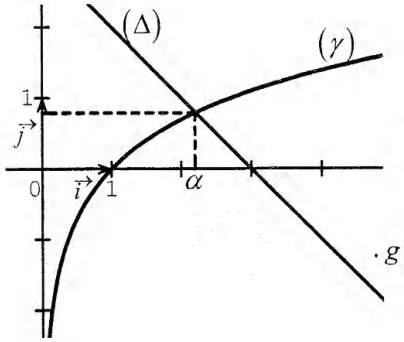
III) $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $g(x)=|x+1|+\dfrac{2}{x+2}\left|\ln(x+2)\right|$

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ ؛ ماذا تستنتج بالنسبة إلى $g$ ؟

2) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

3) انطلاقا من المنحنى $(C_f)$ ارسم المنحنى $(C_g)$ الممثل للدالة $g$ في نفس المعلم السابق.

**التمرين الرابع: (06,5 نقطة)**




المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

I) $(\gamma)$ التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ و $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ؛ $\alpha$ هي فاصلة نقطة تقاطع $(\gamma)$ و $(\Delta)$ .

1) بقراءة بيانية حدّد وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ على $]0;+\infty[$ .

2) $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x)=x-3+\ln x$ .

استنتج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$ .

3) تحقّق أن: $2,2<\alpha<2,3$ .

II) $f$ الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني.

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2) أثبت أنّه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة $f$ .

3) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ؛ ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ .

4) ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ؛ ثمّ أنشئ $(C_f)$ على المجال $]0\ ;\ e^2]$ .

III) $F$ الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقّق: $F(1)=-3$ .

1) بيّن أنّ منحنى الدالة $F$ يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يُطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بيّن أنّ $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ؛ ثمّ استنتج عبارة الدالة $F$ .

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

$f$ الدالة المعرّفة بـِ : $f(0)=1$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $f(x)=1-x^2\ln x$.

$(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة $f$ الممثل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) ادرس استمرارية الدالة $f$ عند 0 من اليمين.

ب) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا $\alpha$ في المجال $]0;+\infty[$.

ب) تحقّق أنّ $1,531<\alpha<1,532$

4) نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ : $g(x)=f(|x|)$.

$(\mathcal{C}_g)$ المنحنى الممثل للدالة $g$ في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) ادرس شفعية الدالة $g$.

ب) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ على المجال $[-2;2]$.

5) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x^2\ln x$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ ، والتي تتعدم من أجل القيمة 1.

6) $t$ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha[$. نضع $F(t)=\int_t^{\alpha} f(x)dx$.

أ) اكتب العبارة $F(t)$ بدلالة $t$ و $\alpha$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $t$ من المجال $]0;\alpha[$، $F(t)=\dfrac{-3tf(t)-t^3-6t+\alpha^3+6\alpha}{9}$.

جـ) احسب $\lim\limits_{t\xrightarrow{>}0} F(t)$.

7) $m$ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha[$.

$\mathcal{S}(m)$ مساحة الدائرة ذات المركز المبدأ $O$ ونصف القطر $m$.

نفرض أنّ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_g)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما على الترتيب: $x=-\alpha$ و $x=\alpha$ ، هي: $\mathcal{A}$ حيث: $\mathcal{A}=\dfrac{2}{9}(\alpha^3+6\alpha)\,ua$

($ua$ وحدة المساحات).

أ) عيّن القيمة المضبوطة للعدد $m$ حتى يكون $\mathcal{S}(m)=2\mathcal{A}$.

ب) علماً أنّ $3,140<\pi<3,142$ أعط حصرًا للعدد $m$.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: ( 06 نقاط )**

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

*I*) $g$ الدالة المعرفة على المجال $]0;3[$ بـ: $g(x)=x\ln x+x$

1) أدرس تغيرات الدالة $g$

2) أ) بيّن أن المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $]0;3[$

ثم تحقق أن $1,45<\alpha<1,46$

ب) استنتج إشارة $g(x)-2$

*II*) التمثيل البياني المقابل $(C_f)$ هو للدالة $f$ المعرفة على المجال $]0;3[$ بـ: $f(x)=|x-2|\ln x$

1) باستعمال $(C_f)$ ضع تخمينا حول قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند 2

2) أثبت صحة تخمينك.

3) أدرس تغيرات الدالة $f$

*III*) $h$ الدالة المعرفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ كما يلي: $h(x)=(2-\cos x)\ln(\cos x)$

1) بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى $(C_h)$؛ حيث $(C_h)$ هو التمثيل البياني للدالة $h$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة $h$، ثم شكل جدول تغيراتها وارسم $(\Delta)$ و $(C_h)$

**التمرين الرابع: ( 06 نقاط )**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ؛ فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته: $y=1$.

ب) اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا $\alpha$، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$

3) أنشئ $(T)$ و $(C_f)$.

4) لتكن الدالة $h$ المعرّفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}$.

و ليكن $(C_h)$ تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

ب) أنشئ المنحنى $(C_h)$ إعتمادا على المنحنى $(C_f)$.

جـ) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (05.5 نقاط)**

1) $f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)$

$(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ) ادرس تغيرات الدالة $f$

ب) اكتب معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $e$ (حيث $e$ أساس اللوغاريتم النيبري).

جـ) عيّن فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل ثم ارسم $(C_f)$ على المجال $]0;e^2]$

2) $g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ : $g(x)=1-\ln x$

$(C_g)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) ادرس تغيرات الدالة $g$

ب) عيّن الوضع النسبي للمنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ ثم ارسم $(C_g)$ على المجال $]0;e^2]$

3) نعتبر الدالة العددية $h$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $h(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$

أ) احسب $h'(x)$ واستنتج دالة أصلية للدالة : $x\mapsto(\ln x)^2$ على $]0;+\infty[$

ب) احسب العدد: $\int_{\frac{1}{e}}^{e}[f(x)-g(x)]dx$

**التمرين الرابع: (07.5 نقطة)**

I- الدالة $g$ معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^x$ .

1) ادرس تغيرات $g$.

2) بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$: $1+(x-1)e^x\geq 0$ .

II - الدّالة $f$ معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-1}{x} \; ; \; x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$ .

1 - أ) بيّن أنّ $f$ مستمرة على $]0;+\infty[$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2- أ) تحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}$ .

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

III- $n$ عدد طبيعي حيث $n\geq 1$ ؛ $f_n$ الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $f_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x$ .

و $(C_n)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1- ادرس اتجاه تغير الدالة $f_n$ على $]0;+\infty[$ .

2- احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ .

3- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(C_n)$ و $(C_{n+1})$ .

4- بيّن أنّ جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة $B$ يطلب تعيين إحداثيتيها.

5- أ) بيّن أنّه، يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_1$ من $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$ .

ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 1$ فإنّ: $f_n(\alpha_1)<0$ ، ثمّ برهن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n$ من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$ .

6- أ) بالاعتماد على الجزء II؛ بيّن أنّه، من أجل كل $x$ من $]0;1]$: $\dfrac{e^x-1}{x}\leq e-1$ .

ب) استنتج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 1$: $\ln(\alpha_n)\geq\dfrac{1-e}{n}$ ، ثمّ $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$ .

جـ) جد نهاية المتتالية $(\alpha_n)$.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

**I** الدّالة $g$ معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$ .

1) ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ على المجال $]-1;+\infty[$ .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $0,31<\alpha<0,32$ وأن:

$$\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$$

3) استنتج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$.

**II** – الدّالة $f$ معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+\left(2-\ln(x+1)\right)^2$ .

$(C_f)$ منحنى $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2) أثبت أنّه، من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$ .

3) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها .

4) بيّن أنّ: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ .

5) مثّل المنحنى $(C_f)$ على المجال $[-1;2]$ .

**III** – $(\Gamma)$ المنحنى الممثل للدالة $h$ المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$ .

$A$ النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و $M$ نقطة من $(\Gamma)$ فاصلتها $x$ .

1) أثبت أنّ المسافة $AM$ تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$ .

2) الدّالة $k$ معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $k(x)=\sqrt{f(x)}$ .

أ) بيّن أنّ للدالتين $k$ و $f$ نفس اتجاه التغير على المجال $]-1;+\infty[$ .

ب) عيّن إحداثيتي النقطة $B$ من $(\Gamma)$، بحيث تكون المسافة $AM$ أصغر ما يمكن .

جـ) بيّن أنّ: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$ .

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

**I)** $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) ادرس تغيّرات الدالة $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) استنتج أنه، من أجل كل $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$ .

**II)** $f$ الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .( وحدة الطول $2\,cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ . فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2) أ) بيّن أنّه، من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث $f'$ هي مشتقة الدالة $f$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ تحقق أن $0<\alpha<0,5$ .

3) أ) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ .

ب) ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.

4) نقبل أن المستقيم $(T)$ ذا المعادلة : $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى $(C_f)$ في نقطة فاصلتها $x_0$ .

أ) احسب $x_0$.

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس $(T)$ ثم المنحنى $(C_f)$.

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (06 نقاط)**

**I** – **1.** الدالة $u$ معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $u(x)=e^x-3x+4-e$.

أ - ادرس اتجاه تغيّر الدالة $u$.

ب - بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x-e>3x-4$.

**2.** الدالة $v$ معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$.

أ - بيّن أنّ: $v'(1)=0$. (يرمز $v'$ إلى الدالة المشتقة للدالة $v$)

ب - أثبت أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $v(x)\le 0$.

جـ - استنتج، أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$.

**3.** أثبت أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0$.

**II** – الدالة $f$ معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=e^x-ex+\frac{\ln x}{x}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1.** احسب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**2.** بيّن أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

**3.** احسب $f(1)$، ثمّ مثّل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left]0;\frac{5}{2}\right]$.

**(نأخذ:** $f(2)\approx 2,3$ ، $f(1,64)\approx 1$ و $f\left(\frac{5}{2}\right)\approx 5,75$ **)**.

**4.** احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$.

**التمرين الرابع: ( 07 نقاط)**

I – $g$ هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+a+b\ln(x)$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان.

1 – عيّن $a$ و $b$ علما أن التمثيل البياني للدالة $g$ يقبل في النقطة $A(1;-1)$ مماسا معامل توجيهه 4.

2 – نضع $a=-2$ و $b=2$.

أ) ادرس تغيرات الدالة $g$، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $]0;+\infty[$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II – $f$ هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-2-\frac{2\ln(x)}{x}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$).

1 – أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) احسب $f'(x)$، ثم تحقق أنّ: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

جـ) استنتج إشارة $f'(x)$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $f$.

2 – أ) بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة: $y=x-2$ مقارب لـ $(C_f)$، ثم ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.

ب) بيّن أن $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي $(\Delta)$، ثم جِد معادلة له.

جـ) نأخذ $\alpha=1,25$. بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $x_1$ و $x_2$ حيث:

$0,6<x_1<0,7$ و $2,7<x_2<2,8$ ، ثم ارسم كلا من $(\Delta)$، $(T)$ و $(C_f)$.

3 – ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$، عدد حلول المعادلة: $(m+2)x+2\ln(x)=0$.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

لتكن $f$ الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-\infty;0[$، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلة له: $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضع المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$.

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين $\alpha$ و $\beta$ حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$.

5) أنشئ المنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$.

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم $(AB)$.

ب- بيّن أنّ المستقيم $(AB)$ يمس المنحنى $(C_f)$ في نقطة $M_0$ يطلب تعيين إحداثيتيها.

7) لتكن $g$ الدالة المعرّفة على $]-\infty;0[$ كما يلي: $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.

بيّن أنّ $g$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]-\infty;0[$.

**التمرين الرابع: (08 نقاط)**

$I$) $g$ هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي : $g(x)=2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$.

1) ادرس تغيرات الدالة $g$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ يحقق: $-0,8<\alpha<-0,7$.

3) عيّن، حسب قيم $x$، إشارة $g(x)$.

4) $h$ هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3]$ بـ: $h(x)=[g(x)]^2$.

أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب- عيّن إشارة $h'(x)$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $h$.

$II$) $f$ هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{\ln(x+1)}; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثم اكتب معادلة لـ $(T)$ مماس $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل $x$ من $]-1;0[\cup]0;3]$، $f'(x)=\frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$.

ب- بيّن أن : $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$ ، ثم عيّن حصرا لـ $f(\alpha)$.

ج- احسب $f(3)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $f$.

3) أ- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]-1;3]$ فإن: $x-\ln(x+1)\geq 0$.

ب- ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى المماس $(T)$.

4) عيّن معادلة للمستقيم $(T')$ الموازي للمماس $(T)$ والذي يتقاطع مع $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 3.

5) ارسم $(T)$ ، $(T')$ و $(C_f)$.

6) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$، عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

DEL NAIDJI

**التمرين الثاني: (06 نقاط)**

$f$ دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{a+b\ln 2x}{4x^2}$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان و $(C_f)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ عيّن $a$ و $b$ بحيث يكون المماس في النقطة $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ للمنحنى $(C_f)$ موازيا لحامل محور الفواصل.

2/ $g$ الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{1+2\ln 2x}{4x^2}$ و $(C_g)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

أ) احسب $\lim_{x\to 0} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

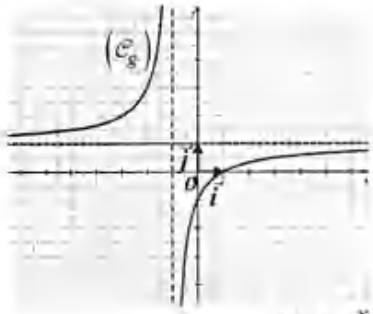
ج) حل في $]0;+\infty[$ المعادلة $g(x)=0$.

د) أنشئ $(C_g)$.

3/ أ) $h$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\frac{1+\ln 2x}{2x}$ ، احسب $h'(x)$.

ب) تحقّق أن: $g(x)=\frac{1}{4x^2}+\frac{\ln 2x}{2x^2}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة $g$ على المجال $]0;+\infty[$.

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**




**I)** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$

و $(\mathcal{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل)، **بقراءة بيانية:**

أ - شكل جدول تغيرات الدالة $g$.

ب - حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

جـ - عيّن بيانيا قيم $x$ التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

**II)** لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

2. أ - بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$.

ب - احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $f$.

3. أ - باستعمال الجزء **I)** السؤال **جـ** ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب - $\alpha$ عدد حقيقي.

بيّن أنّ الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

جـ - تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\frac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

1/ $g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x)=x^2+\ln x^2-1$

أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$

2/ $f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=(1-\frac{1}{x^2})\ln x$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ/ بين أن $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وأن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ $(\delta)$ المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$

- ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\delta)$ ثم جد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\ln x$ ، ماذا تستنتج ؟
- ارسم $(\delta)$ و $(C_f)$.

3/ أ/ $x$ عدد حقيقي من المجال $]1;+\infty[$، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\,dt$

- تحقق أن: $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]1;+\infty[$.
- استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب/ $\alpha$ عدد حقيقي أكبر تماما من 1.

احسب بدلالة $\alpha$ المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين $(C_f)$ و $(\delta)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=\alpha$ ، ثم احسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)$

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

$g$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x-1-2\ln x$ و $(C_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول هي $4cm$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2- أ - بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

ب- ادرس تغيرات الدالة $g$.

ج- احسب $g(1)$.

د- برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما $\alpha$ حيث: $3,5<\alpha<3,6$

هـ- استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) $f$ الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=-x^2+x+x^2\ln x & ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

أ- احسب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$.

ج- بيّن أنه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة $f$.

د- شكل جدول تغيرات الدالة $f$ ، بين أن: $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$ و استنتج حصرا للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

4- ارسم المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ على المجال $[0;3]$.

DEL NAIDJI

**التمرين الثالث: (10 نقاط)**

I) لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـــ: $f(x)=1+\ln(2x-1)$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$.

2) بيّن أن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $I$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) عيّن فاصلة النقطة من $(C_f)$ التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم $(d)$ ذي المعادلة $y=x$.

4) أ) أثبت أنه من أجل كل $x$ من $I$ يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث: $a$ ، $b$ عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب) استنتج أنه يمكن رسم $(C_f)$ انطلاقا من $(C)$ منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ ثم ارسم $(C)$ و $(C_f)$ .

II) نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $I$ بـــ: $g(x)=f(x)-x$

1) احسب $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} g(x)$ ثم بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ على $I$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) احسب $g(1)$ ثم بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا $\alpha$.

تحقق أن $2<\alpha<3$.

ب) ارسم $(C_g)$ منحنى الدالة $g$ على المجال $\left]\frac{1}{2};5\right[$ في المعلم السابق.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $I$ ثم حدّد وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى $(d)$.

5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;\alpha[$ فإن: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

III) نسمي $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي: $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

1) عيّن قيمة العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون: $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$ .

2) احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

**التمرين الثالث: (07 نقاط)**

1. $g$ دالة معرّفة على $]1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x+\ln x$

أ) احسب نهاية الدالة $g$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$.

ج) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ فإن $g(x)\neq 0$.

2. لتكن $f$ دالة معرّفة على $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{6\ln x}{2x+\ln x}$

أ) بيّن أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{6-\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$ من أجل $x\in[1,+\infty[$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

ج) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $f$

د) شكل جدول تغيّرات $f$ ، ما هي قيم العدد الحقيقي $k$ بحيث تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين؟

هـ) جد معادلة للمماس $(\Delta_1)$ للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها 1 حيث $(\mathcal{C}_f)$ يرمز إلى التمثيل البياني للدالة $f$ في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3. نعتبر الدّالة $h$ المعرّفة على $]1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=f(e^x)$ و $(\mathcal{C}_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) شكل جدول تغيّرات الدّالة $h$.

ب) جد معادلة للمماس $(\Delta_2)$ للمنحنى $(\mathcal{C}_h)$ عند النقطة التي فاصلتها 1.

ج) ارسم كلا من $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ ، $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_h)$ في نفس المعلم السابق.

DEL NAIDJI

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

**الجزء الأول:**

h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-1} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ .

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ : $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها.

3. أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

**الجزء الثاني:** لتكن f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمي $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ) احسب $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بيانيا .

ب) باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$ .

جـ) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

د) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ .

هـ) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3. بين أن المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و3,4 .

4. أرسم $(C_f)$.

5. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها :

$y=x-1$ ؛ $x=0$ و $x=1$ .

DEL NAIDJI

تم بحمد الله...

نـجاحكم هدفنا