اختبار الفصل الثالث في مادة الرياضيات

المستوى: ثانية ثانوي- شعبة رياضيات
الأستاذ: قويسم الخليل
المدة: ساعتان
يوم: 22 مـــاي 2023

◄ التمرين الأول: (09 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. m و t عددان حقيقيان

نعتبر النقط $A(-1;2)$، $B(3;0)$، $C(m;-2)$، $D(-1;-4)$ و $E(t;2t-1)$

❶ أ/ عيّن قيمة m حتى يكون المثلث ABC قائم في A [01.00]

ب/ عيّن (γ) معادلة للدائرة المحيطة بهذا المثلث (يُطلب تعيين مركزها I ونصف قطرها) [02.00]

ج/ عيّن (T) معادلة المماس للدائرة (γ) في A [01.00]

❷ (Δ) المستقيم الذي معادلته $y=2x-1$

أ/ تحقق أنّ E تنتمي إلى المستقيم (Δ) [01.00]

ب/ عيّن إحداثيتي E حتى يكون المستقيمين (Δ) و(CE) متعامدين [01.00]

ج/ هل $D\in(\gamma)$؟ [00.50]

❸ نعتبر المجموعة (Γ) للنقط $M(x,y)$ حيث $x^2+y^2+4x-2y-21=0$

أ/ بيّن أنّ (Γ) دائرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r [01.00]

ب/ هل $D\in(\Gamma)$؟ [00.50]

ج/ عيّن نقط تقاطع الدائرتين (γ) وَ (Γ) [01.00]

◄ التمرين الثاني: (09 نقاط)

نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=\frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n\in\mathbb{N}$؛ $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{u_n+4}$

و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{2+u_n}{1-u_n}$

❶ بيّن أنّ (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الاول [01.50]

❷ أستنتج اتجاه تغير (v_n) [01.00]

❸ أكتب عبارة v_n بدلالة n [01.00]

❹ بيّن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $u_n=1-\frac{3}{1+v_n}$، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n [02.00]

❺ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$، ماذا تستنتج ؟ [01.50]

❻ احسب، بدلالة n، كل من S_n و P_n حيث: [02.00]

$$S_n=\frac{1}{1-u_0}+\frac{1}{1-u_1}+\ldots+\frac{1}{1-u_n} \quad \text{وَ} \quad P_n=v_0^2\times v_0^2\times\ldots\times v_n^2$$

◄ التمرين الثالث: (02 نقاط)

أثبت أنّ: $\cos^3(x)=\frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}$ [02.00]

(إرشاد: $\cos(3x)=\cos(2x+x)$)

تصحيح مقترح لاختبار الفصل الثالث في مادة الرياضيات

المستوى: ثانية ثانوي- شعبة رياضيات
الأستاذ: قويسم الخليل

◄ التمرين الأول: (09 نقاط)

❶

أ/ تعيين قيمة m حتى يكون المثلث ABC قائم في A:

ABC مثلث قائم في A معناه: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

لدينا: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}m+1\\-4\end{pmatrix}$

ومنه: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

معناه: $(4)(m+1)+(-2)(-4)=0$

معناه: $4m+4+8=0$

معناه: $m=-3$

إذن: ABC قائم في A لما: $m=-3$

ب/ تعيين معادلة للدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC:

بما أنّ ABC قائم في A

فإنّ قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هو $[BC]$

وعليه $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$

لدينا: $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}3-x\\0-y\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}-3-x\\-2-y\end{pmatrix}$

ومنه: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$

معناه: $(3-x)(-3-x)+(0-y)(-2-y)=0$

معناه: $x^2+y^2+2y-9=0$

إذن: $(\gamma): x^2+y^2+2y-9=0$

- إيجاد I مركز الدائرة (γ)

لدينا I منتصف $[BC]$

ومنه: $I\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$ أي: $I(0;-1)$

- إيجاد نصف القطر:

لدينا: $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$

$$r=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}}{2}=\frac{2\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$$

ج/ تعيين معادلة (T)

لدينا: $(T): ax+by+c=0$

لدينا: (IA) ناظم لـ (T) حيث: $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

فإنّ:

بما أنّ $A\in(T)$

فإنّ: $-(-1)+3(2)+c=0$

أي: $c=-7$

إذن: $(T): -x+3y-7=0$

أي: $(T): x-3y+7=0$

❷

أ/ التحقق أن $E\in(\Delta)$:

لدينا: $2t-(2t-1)-1=0$

معناه: $2t-2t+1-1=0$

معناه: $0=0$

إذن: $E\in(\Delta)$

ب/ تعيين إحداثيتي النقطة E :

المستقيمين (Δ) و (CE) متعامدين معناه: $\vec{u}_\Delta\cdot\overrightarrow{CE}=0$

لدينا: $\vec{u}_\Delta\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}t+3\\2t+1\end{pmatrix}$

ومنه: $\vec{u}_\Delta\cdot\overrightarrow{CE}=0$

معناه: $(1)(t+3)+(2)(2t+1)=0$

معناه: $5t+5=0$

معناه: $t=-1$

إذن: $E(-1;-3)$

ج/ هل $D\in(\gamma)$؟

لدينا: $(\gamma): x^2+y^2+2y-9=0$

ومنه: $(-1)^2+(-4)^2+2(-4)-9=0$

ومنه: $0=0$

إذن: $D\in(\gamma)$

❸

أ/ تبيين أنّ (Γ) دائرة :

لدينا: $x^2+y^2+4x-2y-21=0$

ومنه: $(x+2)^2-4+(y-1)^2-1-21=0$

ومنه: $\left(x-(-2)\right)^2+(y-1)^2=26$

إذن: (Γ) دائرة مركزها $\Omega(-2;1)$ ونصف قطرها $\sqrt{26}$

ب/ هل $D\in(\Gamma)$؟

ومنه: $(-1)^2+(-4)^2-4-2(-4)-21=0$

ومنه: $0=0$

إذن: $D\in(\Gamma)$

ج/ إيجاد نقط تقاطع الدائرتين (γ) و (Γ):

لدينا: $\begin{cases}(\Gamma): x^2+y^2+4x-2y-21=0\\(\gamma): x^2+y^2+2y-9=0\end{cases}$

لدينا: $x^2+y^2+4x-2y-21=x^2+y^2+2y-9$

معناه: $4x-4y-12=0$

معناه: $x-y-3=0$

معناه: $x=y+3$

نعوض قيمة x في (γ)

نجد: $(y+3)^2+y^2+2y-9=0$

ومنه: $y^2+9+6y+y^2+2y-9=0$

ومنه: $2y^2+8y=0$

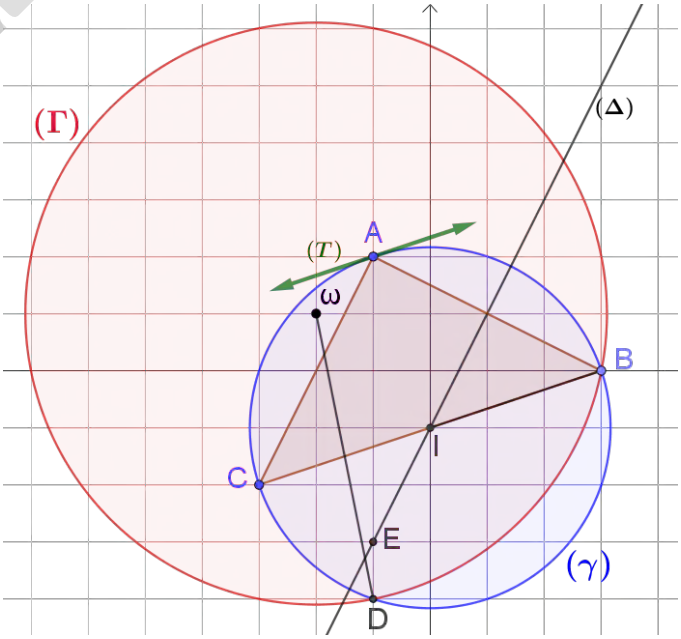
ومنه: $y^2+4y=0$

ومنه: $y(y+4)=0$

ومنه: $\begin{cases}y=0\\\text{أو}\\y=-4\end{cases}$

إذن: $(\Gamma)\cap(\gamma)=\{(3;0);(-1;-4)\}$

أي: $(\Gamma)\cap(\gamma)=\{B;D\}$



◄ التمرين الثاني: (09 نقاط)

❶ تبيين أنّ (v_n) هندسية:

$$v_{n+1}=\frac{2+u_{n+1}}{1-u_{n+1}}=\frac{2+\frac{3u_n+2}{u_n+4}}{1-\frac{3u_n+2}{u_n+4}}=\frac{5u_n+10}{-2u_n+2}$$
$$=\frac{5(u_n+2)}{2(1-u_n)}=\frac{5}{2}v_n$$

❷ استنتاج اتجاه تغير (v_n):

لدينا: $v_0=\frac{2+u_0}{1-u_0}=3$

بما أن: $q=1>0$ و $v_0>0$

فإنّ (v_n) **متزايدة تماما على** $\mathbb{N}$

❸ كتابة عبارة v_n بدلالة n:

$$v_n=\boxed{3\left(\frac{5}{2}\right)^n}$$

❹ تبيين أنّ $u_n=1-\frac{3}{1+v_n}$:

لدينا: $v_n=\frac{2+u_n}{1-u_n}$

ومنه: $v_n(1-u_n)=2+u_n$

ومنه: $v_n-u_nv_n=2+u_n$

ومنه: $v_n-2=u_nv_n+u_n$

ومنه: $u_n(v_n+1)=v_n-2$

ومنه: $u_n=\frac{v_n-2}{v_n+1}$

ومنه: $u_n=\frac{v_n+1-3}{v_n+1}$

ومنه: $u_n=\frac{v_n+1}{v_n+1}-\frac{3}{v_n+1}$

ومنه: $u_n=1-\frac{3}{v_n+1}$

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

$$u_n=1-\frac{3}{v_n+1}=\boxed{1-\frac{3}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n+1}}$$

❺ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n+1}\right)=1$$

لأنّ: $\lim\left(\frac{5}{2}\right)^n=+\infty$

❻ حساب، بدلالة n، كل من S_n و P_n :

لدينا : $u_n = 1 - \dfrac{3}{v_n + 1}$

ومنه : $u_n - 1 = -\dfrac{3}{v_n + 1}$

ومنه : $\dfrac{1}{u_n - 1} = -\dfrac{v_n + 1}{3}$

ومنه : $\dfrac{1}{1 - u_n} = \dfrac{1}{3}(v_n + 1)$

وعليه:

- $S_n = \dfrac{1}{1-u_0} + \dfrac{1}{1-u_1} + \cdots + \dfrac{1}{1-u_n}$
$= \dfrac{1}{3}(v_0 + 1) + \dfrac{1}{3}(v_1 + 1) + \cdots + \dfrac{1}{3}(v_n + 1)$
$= \dfrac{1}{3}(v_0 + 1 + v_1 + 1 + \cdots + v_n + 1)$
$= \dfrac{1}{3}\left(v_0 + v_1 + \cdots + v_n + 1(n+1)\right)$
$= \dfrac{1}{3}\left(3\left(\dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{5}{2} - 1}\right) + n + 1\right)$
$= \boxed{\dfrac{1}{3}\left(2\left(\left(\dfrac{5}{2}\right)^{n+1} - 1\right) + n + 1\right)}$
- $P_n = v_0^2 \times v_0^2 \times \ldots \times v_n^2 = (v_0 \times v_0 \times \ldots \times v_n)^2$
$= \left(3\left(\dfrac{5}{2}\right)^0 \times 3\left(\dfrac{5}{2}\right)^1 \times \ldots \times 3\left(\dfrac{5}{2}\right)^n\right)^2$
$= \left(3^{n+1} \times \left(\dfrac{5}{2}\right)^{0+1+\cdots+n}\right)^2$
$= \left(3^{n+1} \times \left(\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^2$
$= \boxed{3^{2n+2} \times \left(\dfrac{5}{2}\right)^{n(n+1)}}$

◀ التمرين الثالث: (02 نقاط)

اثبات أنّ: $\cos^3(x) = \dfrac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
&\cos(3x) = \cos(2x + x) \\
&= \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x \\
&= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - (2\cos x \sin x)\sin x \\
&= \cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2\cos x \sin^2 x \\
&= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x \\
&= \cos^3 x - 3\cos x\,(1 - \cos^2 x) \\
&= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

إذن:

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

وعليه:

$$\cos^3 x = \frac{\cos(3x) + 3\cos x}{4}$$

بالتوفيق في شهادة البكالوريا العام المقبل



❤️🖤 لا تنسونا من صالح دعائكم 🖤❤️