الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
مديرية التربية لولاية جيجل — الموسم الدراسي: 2022م-2023م
ثانوية راشدي محمد -سيدي معروف — المستوى: الثانية رياضيات

إختبار الفصل الثالث في مادة الرياضيات — المدة: ساعتان

التمرين الأول: (10 نقاط)

I/ المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث: $\left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{i}\right\| = 1cm$.
لتكن النقط $A\left(-1;2\right)$ ، $B\left(3;0\right)$ ، $C\left(-3;-2\right)$ و $D\left(1;-4\right)$ ،
ولتكن النقطة I منتصف القطعة: $[BC]$.

1/ أُحسب إحداثيي النقطة I ثم علّم النقط A ، B ، C ، D و I .

2/ ا/بين أن المثلث ABC قائم في A .

ب/أُكتب معادلة ديكارتية للدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .

ج/أُكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المماس للدائرة (γ) في النقطة A .

3/ لتكن (Γ) مجموعة النقط $M\left(x;y\right)$ من المستوي حيث: $x^2+y^2-2x+8y-23=0$.

ا/أثبت أن (Γ) هي دائرة مركزها النقطة D ونصف قطرها R يُطلب تعيينه.

ب/تحقق حسابيا أن $A \in (\Gamma)$ ، ثم حدد بدقة $d\left(D;(\Delta)\right)$ المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ) .

ج/استنتج الوضعية النسبية لكل من المستقيم (Δ) و الدائرة (Γ) ، ثم أنشئ كلا منهما.

4/ ا/أُحسب $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$ ، ثم استنتج قيمة بالدرجات لقيس الزاوية $\widehat{DBC}$.

ب/أُحسب مساحة المثلث DBC .

5/ حدد طبيعة وعناصر (E) مجموعة النقط N من المستوي التي تحقق: $NB^2+NC^2=22$.

II/ 1/ تأكد أن: $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.

2/ أُحسب القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3/ علما أن: $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ، أُحسب $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

التمرين الثاني: (10 نقاط)

لتكن (U_n) المتتالية المعرفة بـ: $U_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{U_n + 3}$.

1/ على الشكل المرفق المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ ، حيث :

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+3}$ ، و (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

ا/مثّل -دون حساب- الحدود الأربع الأولى للمتتالية (U_n) على محور الفواصل (مبينا خطوط الإنشاء).

ب/ضع تخمينا حول إتجاه تغير وسلوك المتتالية (U_n) .

2/ لتكن (V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = \dfrac{U_n + 2}{U_n - 2}$.

ا/بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ ، ثم أُحسب حدها الأول.

ب/ماهو إتجاه تغير المتتالية (V_n) ؟ مع التعليل.

ج/أُكتب V_n بدلالة n .

3/ ا/بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $U_n = 2 + \dfrac{4}{V_n - 1}$ ، ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n .

ب/أُحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ ، ماذا تستنتج؟

4/ ا/بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\dfrac{1}{U_n - 2} = \dfrac{1}{4}V_n - \dfrac{1}{4}$ ،

ثم أُحسب عندئذ بدلالة n المجموع: $S_n = \dfrac{1}{U_0 - 2} + \dfrac{1}{U_1 - 2} + \cdots + \dfrac{1}{U_n - 2}$.

ب/أُحسب بدلالة n المجموع: $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$ ،

ثم أُحسب بدلالة n الجداء: $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$.

سؤال إضافي: (02 نقطة)

حل المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $1 + \dfrac{x+1}{x-1} + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3 = 0$.

إرشاد: يمكنك وضع: $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

عطلة ☺☺ سعيدة☺☺

لجميع☺☺

ثانوية راشدي محمد ابن ابراهيم
جيجل
-01-

وزارة التربية الوطنية

المؤسسة: ثانوية راشدي محمد - سيدي معروف اختبار الثلاثي: الثالث

التلميذ(ة): / القسم: 2 رياضيات

المادة: الرياضيات التاريخ: 24/05/2023م

أستاذ(ة) المادة: عمورة أيمن الرقم: /

ورقة الإجابة

الرقم: /

العلامة النهائية: 20/20

العلامات الجزئية

السؤال1: .....

السؤال2: .....

السؤال3: .....

السؤال4: .....

السؤال5: .....

التمرين الأول: (10 نقاط)

I) $A(-1;2)$ ؛ $B(3;0)$ ؛ $C(-3;-2)$

و I منتصف $[BC]$ ؛ $D(1;-4)$

1) حساب إحداثيي النقطة I:

$x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$

$y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0-2}{2} = -1$

ومنه: $\boxed{I(0;-1)}$ 0,25

• الإستثناء 0,5

2) أ- تبيان أن المثلث ABC قائم في A:

0,75

ط1// لدينا:

• $AB = \sqrt{(3-(-1))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4^2+2^2}$

$\hookrightarrow AB = \sqrt{20}$.

• $BC = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = BC$

• $AC = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = AC$

نلاحظ أن:

$AB^2 + AC^2 = 20 + 20 = 40 = BC^2$

وحسب مبرهنة فيثاغورس المثلث ABC قائم في A.

ط2// لدينا:

$\vec{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\0-(+2)\end{pmatrix} = \vec{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

و $\vec{AC}\begin{pmatrix}-3-(-1)\\-2-2\end{pmatrix} = \vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

ومنه:

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 4(-2) + (-2)(-4) = -8+8 = 0$

ومنه: $(AC) \perp (AB)$.

$\boxed{\text{إذن المثلث ABC قائم في A}}$

ب- كتابة معادلة للدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC: أي الدائرة (γ) قطرها هو القطعة $[BC]$. 0,25 + 0,75

ط1// الدائرة (γ) هي مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث $\vec{BM}\cdot\vec{CM} = 0$

لدينا: $\vec{CM}\begin{pmatrix}x+3\\y+2\end{pmatrix}$ و $\vec{BM}\begin{pmatrix}x-3\\y\end{pmatrix}$

ومنه: $(\gamma): (x-3)(x+3) + y(y+2) = 0$

ومنه: $\boxed{(\gamma): x^2+y^2+2y-9=0}$

ط2// الدائرة (γ) مركزها $I(0;-1)$ ونصف قطرها $r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$

ومنه: $(\gamma): (x-0)^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{\sqrt{40}}{2}\right)^2$

إذن: $\boxed{(\gamma): x^2 + (y+1)^2 = 10}$

www.dzex

جـ1- كتابة معادلة (Δ) المماس لـ (γ) عند A. معناه الشعاع $\vec{IA}$ ناظمي لـ (Δ) و $A \in (\Delta)$.

ومنه لدينا: $\vec{IA}\begin{pmatrix}0-(-1)\\-1-(2)\end{pmatrix} = \vec{IA}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

ومنه: $(\Delta): x-3y+c=0$

وبما أن: $A(-1,2) \in (\Delta)$ إذن:

$-1-3(2)+c=0$

أي $c=+7$

ومنه $\boxed{(\Delta): x-3y+7=0}$

0,75

3- $(\Gamma): x^2+y^2+8y-2x-23=0$

أ- إثبات أن (Γ) دائرة:

لدينا: $(\Gamma): x^2+y^2-2x+8y-23=0$

تكافئ: $(x-1)^2-1+(y+4)^2-16-23=0$

تكافئ: $(\Gamma): (x-1)^2+(y+4)^2=40$

ومنه (Γ) هي دائرة مركزها $D(1;-4)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{40}$.

0,75

ب- التحقق أن: $A(-1,2) \in (\Gamma)$

لدينا: $(-1)^2+(2)^2-2(-1)+8(2)-23$

$=1+4+2+16-23$

$=23-23=0$

0,25

• حساب المسافة $d(D;(\Delta))$:

$d(D,(\Delta)) = \dfrac{|1-3(-4)+7|}{\sqrt{(1)^2+(-3)^2}} = \dfrac{|20|}{\sqrt{10}}$

$= \dfrac{20\sqrt{10}}{10} = \boxed{2\sqrt{10} = d(D;(\Delta))}$

0,5

جـ1- استنتاج الوضعية النسبية:

لدينا: $A \in (\Delta)$ و $A \in (\Gamma)$ و

$R = DA = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = d(D;(\Delta))$

وإذن $\boxed{\text{المستقيم } (\Delta) \text{ مماس لـ } (\Gamma) \text{ عند } A}$

0,5

• الإنشاء:

1

4- أ- حساب الجداء السلمي $\vec{BD}\cdot\vec{BC}$:

لدينا: $\vec{BD}\begin{pmatrix}1-3\\-4-0\end{pmatrix} = \vec{BD}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

و $\vec{BC}\begin{pmatrix}-3-3\\-2-0\end{pmatrix} = \vec{BC}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$

ومنه:

0,5

$\vec{BD}\cdot\vec{BC} = (-2)(-6)+(-4)(-2) = 12+8$

$\boxed{\vec{BD}\cdot\vec{BC} = 20}$

• إيجاد قيمة الزاوية $D\hat{B}C$:

لدينا: $\vec{BD}\cdot\vec{BC} = BD\cdot BC\cdot\cos(D\hat{B}C)$

$=20$

ولدينا: $BD = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{20}$

$BC = \sqrt{(-6)^2+(-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$\sqrt{40} \times \sqrt{20} \times \cos(\widehat{DBC}) = 20$ ، لدينا

$\cos(\widehat{DBC}) = \frac{20}{\sqrt{20} \times \sqrt{40}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{40}}$ ، ومنه (0,75)

$= \sqrt{\frac{20}{40}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\widehat{DBC} = \frac{\pi}{4}\,rad = 45^\circ$ ، لدينا

: DBC حساب مساحة المثلث ABC -أ

$S_{DBC} = \frac{1}{2} \times DB \times BC \times \sin(\widehat{DBC})$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{20} \times \sqrt{40} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ (0,5)

$= \frac{\sqrt{1600}}{4} = \frac{40}{4} = \boxed{10\,cm^2 = S_{DBC}}$

: (E) نبين أن المجموعة (E) هي دائرة -ب

$NB^2 + NC^2 = 22$

$[BC]$ قطرها I منتصف $[BC]$ ومنه حسب خاصية المتوسط لدينا

$NB^2 + NC^2 = 2NI^2 + \frac{1}{2}BC^2 = 22$

$2NI^2 + \frac{40}{2} = 22$ ، إذن

$2NI^2 = 22 - 20$ ، أي (0,75)

$NI^2 = 1$ ، ومنه

$NI = 1$ ، أي

I هي مركز المجموعة (E) ولها

$r = 1$ كنصف قطر.

$\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ ، نبين أن -أ (II)

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + 3\pi}{4 \times 3} = \frac{7\pi}{12}$ ، لدينا (0,25)

استنتاج قيمة $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$:

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ ، لدينا

$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}$ (0,5)

$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$: حساب -ج

$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ ، ومنه

1.b

$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{7\pi}{12}\right)$

$= 2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)$ (0,5)

$= \frac{2}{16}(2 - 6)$

$= \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

2.b

$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{6\pi + \pi}{6}\right)$

$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\boxed{\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}}$

انتهى الموضوع الأول

التمرين الثاني: (10 نقاط)

$$(u_n): \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+4}{u_n+3} \end{cases}$$

1) أ- تمثيل الحدود الأربع الأولى لـ (u_n) على الشكل المرفق. (1)

ب- التخمين:

نلاحظ أن: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

وأنها تتقارب من بعضها البعض

فنخمن أن (u_n) متزايدة ومتقاربة على $\mathbb{N}$. (0,5)

جـ- $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n-2}$.

أ- تبيان أن (v_n) هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}-2} = \frac{\frac{3u_n+4}{u_n+3}+2}{\frac{3u_n+4}{u_n+3}-2}$$ (1)

$$= \frac{\frac{3u_n+4+2u_n+6}{u_n+3}}{\frac{3u_n+4-2u_n-6}{u_n+3}}$$

$$= \frac{5u_n+10}{u_n+3} \times \frac{u_n+3}{u_n-2}$$

$$= \frac{5(u_n+2)}{u_n-2} = \boxed{5v_n = v_{n+1}}$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول:

$$v_0 = \frac{u_0+2}{u_0-2} = \frac{-1+2}{-1-2} = \boxed{-\frac{1}{3} = v_0}$$ (0,5)

ب- إتجاه تغير المتتالية (v_n):

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=5>1$ وحدها الأول: (1)

$v_0 = -\frac{1}{3} < 0$ فإن المتتالية (v_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

جـ- عبارة الحد العام:

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول $v_0 = -\frac{1}{3}$ (1)

فإن:

$$v_n = \left(-\frac{1}{3}\right) \times 5^n = \boxed{\frac{-5^n}{3} = v_n}$$

ملاحظات الأستاذ(ة) :

إمضاء الولي:

3) أ- تبيان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2 + \frac{4}{v_n - 1}$$

0,5

ط1// لدينا:

$$\boxed{2 + \frac{4}{v_n - 1}} = \frac{2v_n - 2 + 4}{v_n - 1} = 2\left(\frac{v_n + 1}{v_n - 1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\frac{u_n + 2}{u_n - 2} + 1}{\frac{u_n + 2}{u_n - 2} - 1}\right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{u_n + \cancel{2} + u_n - \cancel{2}}{\cancel{u_n - 2}}\right) \times \left(\frac{\cancel{u_n - 2}}{u_n + 2 - u_n + 2}\right)$$

$$= 2 \times \frac{2u_n}{4} = \boxed{u_n}$$

و.ب.م

ط2// لدينا:

$$v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 2}$$

$$= \frac{u_n - 2 + 4}{u_n - 2} = 1 + \frac{4}{u_n - 2}$$

ومنه:

$$\frac{4}{u_n - 2} = v_n - 1$$

ومنه:

$$\frac{u_n - 2}{4} = \frac{1}{v_n - 1}$$

أي:

$$u_n - 2 = \frac{4}{v_n - 1}$$

ومنه:

$$\boxed{u_n = 2 + \frac{4}{v_n - 1}}$$

ط3// لدينا:

$$v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 2}$$

ومنه:

$$v_n(u_n - 2) = u_n + 2$$

أي:

$$v_n u_n - 2v_n = u_n + 2$$

ومنه:

$$v_n u_n - u_n = 2v_n + 2$$

ومنه:

$$u_n(v_n - 1) = 2(v_n + 1)$$

ومنه:

$$u_n = 2 \times \left(\frac{v_n + 1}{v_n - 1}\right) = 2 \times \left(\frac{v_n - 1 + 2}{v_n - 1}\right)$$

$$= 2\left(1 + \frac{2}{v_n - 1}\right)$$

$$\boxed{u_n = 2 + \frac{4}{v_n - 1}}$$

- عبارة u_n:

ومنه:

$$u_n = 2 + \frac{4}{(-\frac{1}{3})5^n - 1}$$

$$\boxed{u_n = 2 - \frac{4}{\frac{5^n}{3} - 1}}$$

1

$$u_n = 2 - \frac{12}{5^n - 3}$$

ب) حساب النهاية:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty}\left(2 - \frac{4}{\underbrace{(\frac{1}{3})5^n}_{+\infty} + 1}\right) = 2$$

0,5

- الاستنتاج:

المتتالية (u_n) متقاربة نحو 2.

0,5

4) أ- تبيان أن:

$$\frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}$$

0,5

لدينا:

$$u_n = 2 + \frac{4}{v_n - 1}$$

ومنه:

$$u_n - 2 = \frac{4}{v_n - 1}$$

$P_n = v_0^{n+1} \times q^{1+2+\cdots+n}$

$P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times 5^{T_n}$

$\boxed{P_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times 5^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

// التمرين الثاني //

(برنامج 2) الدالة الأصلية الأولى

المعادلة $y = \frac{x+1}{x-1}$ حيث

$1 + y + y^2 + y^3 = 0$

المعادلة تقبل حلول من بينها

$q = y$ الحل الذي يحقق

$1 \times \left(\frac{1-y^4}{1-y}\right) = 0$ ومنه

$\begin{cases} 1 - y^4 = 0 \\ 1 - y \neq 0 \end{cases}$ أي

$y \neq 1$ أي $1 - (y^2)^2 = 0$ أي

$(1-y^2)(1+y^2) = 0$

$1 + y^2 = 0$ أو $1 - y^2 = 0$

$|y| = 1$ أي $y^2 = 1$ ومنه

$y = -1$ أي $y \neq 1$ لأن

$\frac{x+1}{x-1} = -1$ ومنه

$2x = 0$ ومنه $x + 1 = -x + 1$

$\boxed{x = 0}$ أي

$\frac{1}{v_n - 2} = \frac{v_n - 1}{4}$ ومنه

$(n) \quad \boxed{\frac{1}{v_n - 2} = \frac{1}{4} v_n - \frac{1}{4}}$ لدينا

S_n حساب

$S_n = \frac{1}{v_0 - 2} + \frac{1}{v_1 - 2} + \cdots + \frac{1}{v_n - 2}$

$= \left(\frac{1}{4} v_0 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} v_1 - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4} v_n - \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{1}{4}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) - \left(\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4}}_{n+1}\right)$

$= \frac{1}{4} \times v_0 \times \left(\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1}\right) - \frac{1}{4}(n+1)$

$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{1}{48}(5^{n+1} - 1) - \frac{1}{4}(n+1)}$

T_n حساب

$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)(n-1+n)}{2}$

$\boxed{T_n = \frac{(n+1)n}{2}}$

المعادلة تقبل حلول من بينها

$r = 1$ الحل الذي

P_n حساب

$P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n$

$= v_0 \times (v_0 \times q) \times (v_0 \times q^2) \times \cdots \times (v_0 \times q^n)$

$= \underbrace{(v_0 \times v_0 \times v_0 \times \cdots \times v_0)}_{n+1} \times (q \times q^2 \times \cdots \times q^n)$

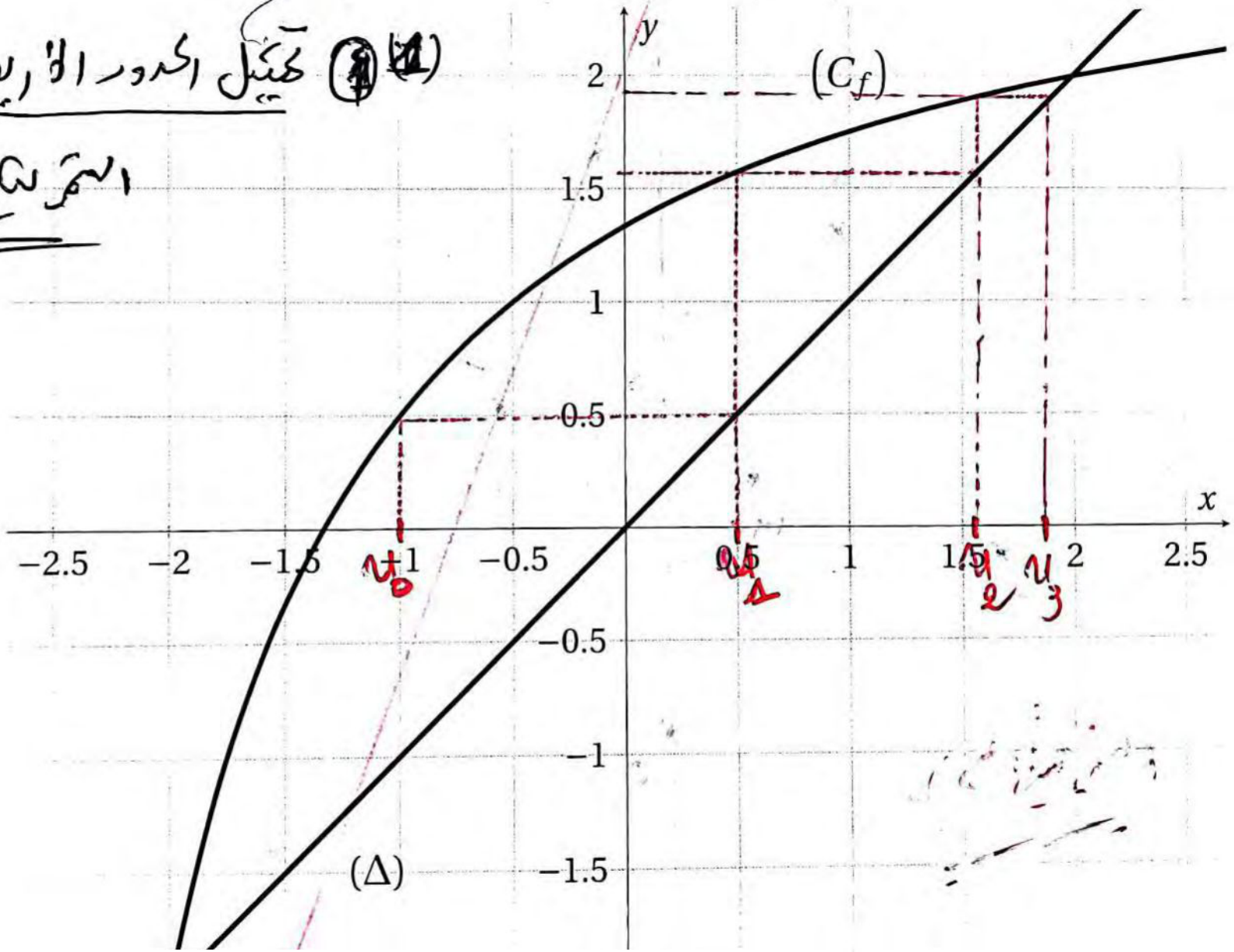
إمضاء الولي:

ملاحظات الأستاذ(ة) :

www.dzex

(1) تمثيل الحدود الأربع الأولى من (u_n)

التمرين الثاني



www.dzexam

$(\Delta): \quad x - 3y + 7 = 0$

جدول مساعد

$(\Delta):$

x	-4	-1
y	1	2

الإنشاء الخاص بالسؤال الأول

