Polaris School | الموسم الدراسي: 2023-2024

اختبار تحضيري للفصل الأول

نموذج ﴿2﴾

المستوى: ثانية ثانوي | الأستاذ: قويسم الخليل

الشعبة: علوم تجريبية | المدة: 02 ساعة

التمرين الأول (05 نقاط)

نعتبر كثيري الحدود P و Q المعرّفين على $\mathbb{R}$ بـ: $Q(x)=3x^2-4x+1$ و $P\left(\frac{x}{3}\right)=Q(x)$

[ن 00.50] ❶ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x)=0$

[ن 01.50] ❷ احسب $P(0)$ و $P(1)$

[ن 01.50] ❸ أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $P(x)=27x^2-12x+1$

[ن 01.50] ❹ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $P(x)=3Q(x)$، ثمّ عيّن إشارة $\frac{P(x)}{3Q(x)}$

التمرين الثاني (09 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3+3x^2+3x+2$، وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

[ن 01.00] ❶ أ- ادرس تغيرات الدالة g

[ن 00.50] ب- ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_g)

[ن 01.50] ❷ أ- احسب $g(-2)$، ثمّ حل المعادلة $g(x)=0$

[ن 01.00] ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\frac{2x^3+7x^2+8x+2}{(x+1)^2}$، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق

[ن 01.00] ❶ أ- بيّن أنّه من أجل كل x حقيقي يختلف عن -1 لدينا، $f'(x)=\frac{2g(x)}{(x+1)^3}$

[ن 01.00] ب- استنتج تغيرات الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها

[ن 01.00] ❷ أ- a، b، c ثلاث أعداد حقيقية، بيّن أنّ: $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}$

[ن 00.50] ب- ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+3$

[ن 00.50] ج- أثبت أنّه لا توجد أي مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ)

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $h(x)=\frac{2x^3-1}{x^2}$

[ن 00.50] ❶ تحقق أنه من أجل كل x حقيقي غير معدوم: $h(x)+1=f(x-1)$

[ن 00.50] ❷ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) منحنى الدالة h إنطلاقا من (C_f)

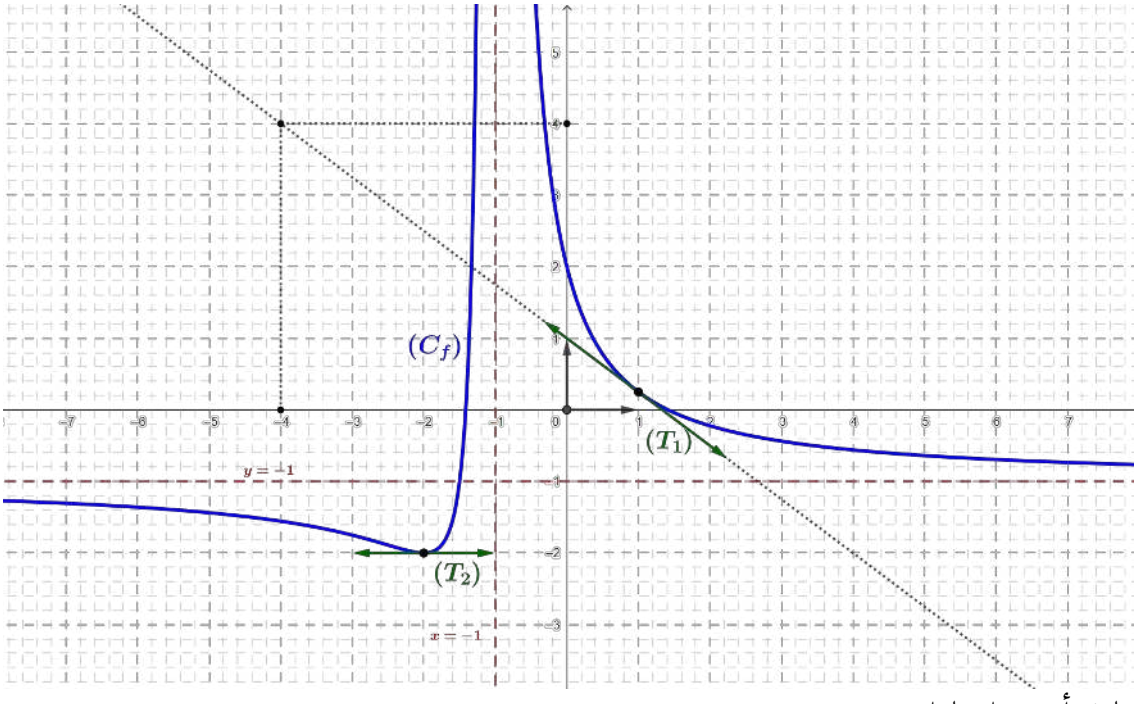
التمرين الثالث (06 نقاط)

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)^2}$ ، حيث a، b و c أعداد حقيقية. و(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(T_1) و(T_2) مماسين للمنحنى (C_f) في النقطتين $A\left(1;\frac{1}{4}\right)$ و $B(-2;-2)$.

كما هو مبين في الشكل الآتي:

www.dzexo



بقراءة بيانية، أجب على ما يلي:

❶ عيّن حلول المعادلة $f'(x)=0$

❷ شكّل جدول إشارة الدالة المشتقة f' ثمّ استنتج جدول تغيرات الدالة f [ن 00.50]

❸ عيّن: $f(0)$، $f(-2)$ ، $f'(-2)$ و $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}\right)$ [ن 00.75]

❹ m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$ [ن 01.75]

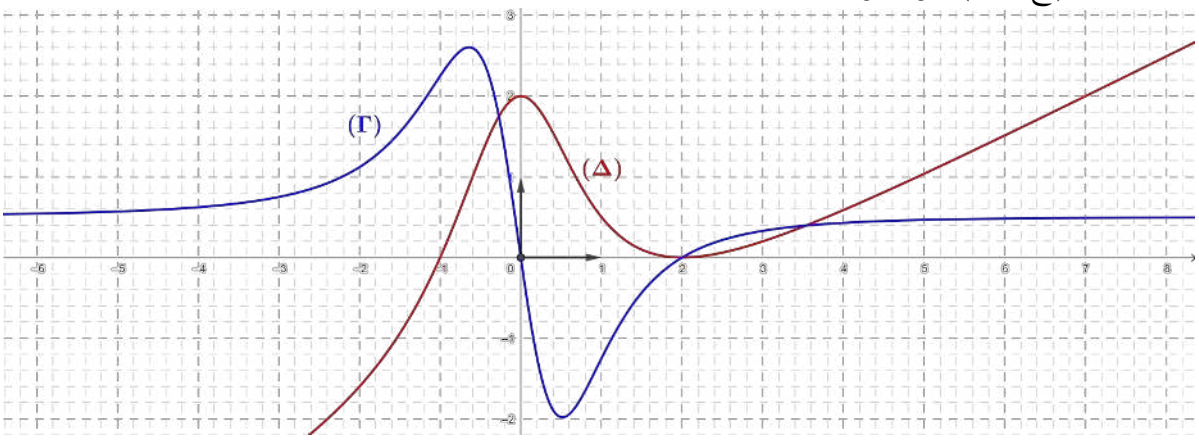
❺ مما سبق، عيّن عبارة (T_1) ، (T_2) و$f(x)$ [ن 01.00]

[ن 02.00]

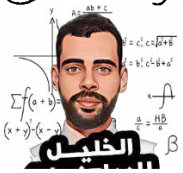
تمرين إضافي: (+01 نقطة)

إليك التمثيلان البيانيان (Δ) و (Γ) أحدهما خاص بالدالة الـ f والآخر لمشتقتها f'

- أنسب (مع التبرير) كل تمثيل لدالته [ن 01.00]



حِكمة: مهما كان العلم متعبًا، فلن يكون أشد إرهاقًا من الجهل



التمرين 1:

1) حل $Q(x)=0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(3)(1)$$
$$= 16 - 12 = 4 > 0$$

اذن يوجد جذران لـ $Q(x)$:

$$x = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2(3)} = 1 \quad \text{و} \quad x = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2(3)} = \frac{1}{3}$$

اذن $S = \{1, \frac{1}{3}\}$

2)

$$P(0) = P\left(\frac{0}{3}\right) = Q(0) = 1$$

$$P(1) = P\left(\frac{3}{3}\right) = Q(3) = 16$$

3) لدينا: $P\left(\frac{n}{3}\right) = Q(n)$

نضع $\frac{n}{3} = t$ ومنه: $n = 3t$

اذن : $p(t) = Q(3t)$

$$p(t) = 3(3t)^2 - 4(3t) + 1$$

$$= 3(9t^2) - 12t + 1$$

$$p(t) = 27t^2 - 12t + 1$$

وعليه :

$$\boxed{p(x) = 27x^2 - 12x + 1}$$

4

لدينا : $p(x) = 3Q(x)$

ومنه : $27x^2 - 12x + 1 = 3(3x^2 - 4x + 1)$

$$27x^2 - 12x + 1 = 9x^2 - 12x + 3$$

$$18x^2 = 2$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1}{9}}$$

$$|x| = \frac{1}{3}$$

اذن $x = \frac{1}{3}$ أو $x = -\frac{1}{3}$

اشارة $\frac{P(x)}{3Q(x)}$

لدينا: $P(x) = Q(3x)$

تكافئ: $\begin{cases} 3x = 1 \\ \text{أو} \\ 3x = \frac{1}{3} \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \text{أو} \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$

اذن $S_{P(x)=0} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right\}$

وعليه: $(3>0)$

②

x	$-\infty$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
$\frac{P(x)}{3Q(x)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

التمرين 2:

2/ ① أ- تغيرات:

لدينا g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$g'(x) = \ldots$

$\Delta = 6^2 - 4(3)(3) = 0$ لدينا:

ومنه $g'(x)=0$ يعني $x = \frac{-6}{2(3)} = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$

إذن الدالة g متزايدة على $\mathbb{R}$.

ب/ الاستنتاج:

لدينا: $g'(x)$ تنعدم عند (-1) و g تغير إشارتها ومنه (C_g) يقبل نقطة انعطاف عند الفاصلة -1.

② آ- حساب $g(-2)$:

$g(-2) = -8 + 12 - 6 + 2 = 0$

=/ حل المعادلة $g(x)=0$.

لدينا: $g(x) = (x+2)(ax^2+bx+c)$

	1	3	3	2
-2	0	-2	-2	-2
	1	1	1	0

لدينا: $g(x)=0$

معناه

$$\begin{cases} x+2=0 \\ \text{أو} \\ x^2+x+1=0 \quad \dots (Q(x)) \end{cases}$$

لدينا: $x+2=0$ معناه $x=-2$

ولدينا: $Q(x)=0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن $\Delta=-3<0$

إذن $S_{g(x)=0}=\{-2\}$

ب/ بما أن: g متزايدة على $\mathbb{R}$، $g(-2)=0$

فإن:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

لدينا f قابلة للاشتقاق على $(\mathbb{R}-\{-1\})$

$$f'(x)=\frac{(6x^2+14x+8)(x+1)^2-(2)(x+1)(2x^3+7x^2+8x+}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)\left[(6x^2+14x+8)(x+1)-2(2x^3+7x^2+8x+2)\right]}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{6x^3+14x^2+8x+6x^2+14x+8-4x^3-14x^2-16x-4)}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{2(x^3$$

ب/ تغيرات f:

لدينا: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$

لدينا $(x+1)^3 = (x+1)^2(x+1)$

لدينا: $x+1 \neq 0$ معناه $x \neq -1$

وعليه:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+1)$		$-$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

وعليه f: متزايدة تماما على $]-\infty, -2]$ و $[-1, +\infty[$ و متناقصة تماما على $[-2, -1[$

- جدول تغيرات f

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

② تعيين a، b، c:

من أجل كل x حقيقي يختلف عن -1، لدينا:

$$ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}=\frac{(ax+b)(x+1)^2+c}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(ax+b)(x^2+2x+1)+c}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+c}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{ax^3+x^2(2a+b)+x(a+2b)+(b+c)}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة مع $f(x)$، نجد:

$$\begin{cases} a=2 \\ 2a+b=7 \\ a+2b=8 \\ b+c=2 \end{cases}$$

www.dzexc

ومنه : $a=2$ ، $b=3$ و $c=-1$.

اذن $f(x)=2x+3-\frac{1}{(x+1)^2}$

ب/ الوضع النسبي :

من أجل كل $x\neq -1$ لدينا :

$$f(x)-(2x+3)=-\frac{1}{(x+1)^2}<0$$

وعليه :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y(x)$	$-$	‖	$-$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)

جـ/ نفرض وجود مماس لـ (C_f) يوازي (Δ)

ونصل إلى تناقض

لدينا : $f'(\alpha)=2$

أي : $\frac{2g(\alpha)}{(\alpha}=2$

$$\frac{2(\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2)}{(\alpha+1)^3}=2$$ ومنه:

ومنه:

$$\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2=(\alpha+1)^3$$

$$\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$$ ومنه

$$2=1$$ ومنه:

وهذا مستحيل

إذن لا يوجد أي مماس لـ (C_f) يوازي (D)

III / 1

① نثبت أن $f(x-1)=h(x)+1$

من أجل كل $x\neq 0$ لدينا:

$$f(x-1)=\frac{2(x-1)^3+7(x-1)^2+8(x-1)+2}{(x-1+1)^2}$$

$$=\frac{2(x^3-3x^2+3x-1)+7(x^2-2x+1)+8x-8+2}{x^2}$$

$$=\frac{2x^3-6x^2+6x-2+7x^2-14x+7+8x-6}{x^2}$$

$$=\frac{2x^3+x^2-1}{x^2}=\frac{2x^3}{x^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}=h(x)+1$$

www.dzexa

لدينا: $h(x)+1 = f(x-1)$

ومنه: $h(x) = f(x-1) - 1$

ومنه (C_h) صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

التمرين 3:

$S_{f'(x)=0} = \{-2; -1\}$ ①

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$		↘	-2	↗	$\|\|$	↘	

②

- $f(0) = 2$
- $f(-2) = -2$

③

• $f'(-2) = 0$

• $\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \right) = f'(1)$

$$= \frac{4 - \frac{1}{4}}{-4 - 1} = \frac{\frac{15}{4}}{-5} = -\frac{3}{5}$$

(4) حلول المعادلة $f(x) = m$

هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = m$

• لما: $m < -2$ لا يوجد حلول.

• لما: $m = -2$ للمعادلة حل وحيد سالب تماما

• لما: $-2 < m < 1$ للمعادلة حلان سالبان تماما

• لما $m = 1$ حل واحد سالب تماما

التمرين الثالث ﴿05 نقاط﴾

❶ **تعيين حلول المعادلة** $f'(x)=0$

$$S_{f'(x)=0}=\{-2\}$$

❷ **تشكيل جدول إشارة الدالة المشتقة** f' **واستنتاج جدول تغيرات الدالة** f:

x	$-\infty$		-2		-1	$-\infty$
$f'(x)$	$-$	0		$+$	$-$	
$f(x)$	↘		-2	↗	↘	

❸ **تعيين** $f(0)$، $f(-2)$، $f'(-2)$ **و** $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right)$:

لدينا: • $f(0)=2$ • $f(-2)=-2$ • $f'(-2)=0$

$$\bullet \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right)=f'(1)=\frac{4-\frac{1}{4}}{-4-1}=-\frac{3}{4}$$

❹ **المناقشة البيانية حسب قيم** m **عدد واشارة حلول المعادلة** $f(x)=m$:

حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y=m$:

- لما: $m<-2$ المعادلة لا تقبل حلولا
- لما: $m=-2$ للمعادلة حل مضاعف سالب تماما
- لما: $-2<m<-1$ للمعادلة حلان سالبان تماما
- لما: $m=-1$ للمعادلة حل سالب تماما
- لما: $-1<m<2$ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة
- لما: $m=2$ للمعادلة حل معدوم وحل سالب تماما
- لما: $m>2$ للمعادلة حلان سالبات تماما

❺ **تعيين عبارة** (T_1)، (T_2) **و**$f(x)$:

- $(T_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)$
  $=-\frac{3}{4}(x-1)+\frac{1}{4}$
  $=-\frac{4}{3}x+1$
- $(T_2): y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$
  $=0(x+2)-2$
  $=-2$

- تعيين عبارة $f(x)$

لدينا: $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)^2}$ و $f'(x)=\frac{(2ax+b)(x+1)^2-2(x+1)(ax^2+bx+c)}{(x+1)^4}$

لدينا: $f(0)=2$ ومنه: $\boxed{c=2}$

لدينا: $f(-2)=-2$ ومنه: $4a-4b+c=-2$ أي: $4a-4b+2=-2$ أي: $4a-4b=-4\ldots(*)$

لدينا: $f'(-2)=0$ ومنه: $(-4a+b)+2(4a-4b+c)=0$ ومنه: $4a-9b=-4$ ومنه: $-4a+9b=4\ldots(**)$

بجمع $(*)$ و $(**)$ نجد: $5b=0$ ومنه: $\boxed{b=0}$

نعوض قيمة b في نجد: $\boxed{}$

إذن: $\frac{x^2+2}{2}$

www.dze